

ISSN: 2658–5782

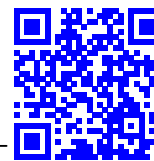
Номер 4

Октябрь–Декабрь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Двумерная динамическая модель взаимодействия жидкости и пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом в плоском канале¹

Насибуллаев И.Ш.* , Даринцев О.В.**,**

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

**Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В работе предлагается двумерная компьютерная модель течения жидкости в плоском канале под действием приложенного перепада давления с погруженным в него плоским керамическим пьезоэлектрическим приводом, изгибающимся в поперечном направлении пропорционально приложенному электрическому напряжению. Предложена математическая модель связанной системы жидкость–пьезопривод в вариационной форме для численного моделирования методом конечных элементов. Поскольку задание граничных условий Дирихле на перемещение в данной задаче затруднительно, была построена эквивалентная схема деформаций пьезопривода с использованием граничных условий Неймана. Рассчитаны деформации и эквивалентные напряжения фон Мизеса на пьезоприводе. Проведен анализ влияния геометрии канала и образуемого пьезоприводом гидродинамического сопротивления на динамику течения жидкости. Предложен алгоритм адаптивного динамического перестроения расчетной сетки канала при деформациях, превышающих размер конечных элементов. При симметричном управляющем сигнале, подаваемом на пьезопривод, асимметрия геометрии приводит к нарушению симметрии расхода жидкости в пределах периода как по величине расхода жидкости, так и по времени. В отсутствие перепада давления при низких частотах колебаний пьезоэлемента (порядка обратного времени релаксации скорости) средний по периоду расход жидкости отличен от нуля и растет с увеличением частоты. При наличии перепада давления между входным и выходным отверстиями канала средний расход жидкости пропорционален перепаду давления; на низких частотах – обратно пропорционален частоте; с ростом частоты – выходит на насыщение. На основе результатов численного моделирования предложены различные варианты новых микрофлюидных технических устройств, генерирующих течение жидкости с помощью пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом: микронасос, создающий течение в замкнутом контуре; регулятор расхода жидкости и дозатор объема жидкости.

Ключевые слова: пьезоэлектрический привод с поперечным изгибом, линейная упругость, гидродинамика, гидросопротивление, плоский канал, *FSI*, метод конечных элементов

1. Введение

В последние три десятилетия активно проводятся исследования в области микрофлюидики [1]. Интерес к данной области связан с особенностями течения жидкости в микро- и наномасштабах,

позволяющими разрабатывать новые устройства, которые обладают новыми свойствами или даже не имеют аналогов в традиционных макросистемах. С развитием микроэлектромеханических систем (МЭМС), широким внедрением микророботов и микротехнологических комплексов появилась возможность синтеза МЭМС с микрофлюидными устройствами [2].

Авторами настоящей работы разрабатывается капиллярный микрозахват [3] для работы с плоскими микрообъектами, мембранами и другими ком-

¹Работа выполнена за счет средств государственного задания № 0246-2018-007.

понентами с достаточной площадью плоской стороны, удержание которых пальцевыми захватами затруднен. Создание макета данного микрозахвата, построенного на базе элемента Пельтье, предполагает использование жидкостного охлаждения для отвода тепла от горячей поверхности элемента Пельтье. Отвод тепловой мощности от элемента Пельтье требует от разработчиков конструирования миниатюрных насосов, а обеспечение режимов работы микрозахвата — разработки соответствующей математической модели, учитывающей специфику микрофлюидики.

Существующие микронасосы [4] имеют множество вариантов реализации и широкий диапазон применений, но недостатки большинства конструкций (значительные пульсации потока и наличие механических узлов) затрудняют их использование для системы охлаждения микрозахвата.

Теоретические модели, разработанные для существующих микронасосов, основаны на эмпирических данных, что не позволяет провести полную геометрическую оптимизацию конструкции и определить оптимальные режимы работы. С другой стороны, генерация течения жидкости в упругом микроканале относится к области мультифизики, а, именно, взаимодействие жидкости и структуры (*fluid-structure interaction, FSI*) [5]. Все это требует при разработке новых технических устройств построения новых математических моделей, связывающих гидродинамику, теорию упругости, процесс теплопереноса, параметрическую оптимизацию и теорию управления устройством, для определения и оптимизации режимов их работы.

Компьютерное моделирование течения жидкости в микроканалах, индуцированного внешним воздействием (например, перепадом давления, поступательным движением границы или деформацией канала), в последнее время активно развивается. Например, авторами настоящей работы были разработаны компьютерные модели, которые могут быть использованы в качестве элемента вычислительного стенда для одного элемента технического устройства (поршень и гидродинамическое сопротивление). Модель поршня для осциллирующего перепада давления, учитывающая пять параметров (амплитуда и частота перепада давления, трение поршня, жесткость пружины, отношение силы трения покоя и трения скольжения), была построена в работе [6] методами факторного вычислительного эксперимента второго порядка.

С развитием математических и компьютерных моделей появились пакеты численного моделирования, использующие метод конечных элементов (МКЭ, *FEM*), позволяющий проводить модели-

рование устройств с практически произвольной геометрией [7].

В работе [8] была построена модель стационарного течения жидкости через цилиндрическое гидросопротивление с учетом перепада давления и радиуса проходного отверстия гидросопротивления, но без учета зависимости модели материала жидкости от температуры. В работе [9] представлено расширение данной модели для описания работы элемента во всей рабочей области температур. В работе [10] изучалось течение жидкости через систему трех элементов. Во всех этих исследованиях геометрия канала была фиксированной.

В следующей работе [11] изучалось течение жидкости в плоском канале с гидросопротивлением для двух случаев динамического изменения геометрии канала: поперечное сжатие проходного отверстия гидросопротивления (течение вызывается приложенным к слою перепадом давления) и продольное движение гидросопротивления вдоль канала (течение вызывается этим движением). Получено, что динамическое изменение геометрии канала позволяет регулировать расход жидкости.

В работе [12] было проведено трехмерное моделирование течения жидкости через трубку, деформируемую пьезоэлементом по гармоническому закону. Деформации задавались граничными условиями Дирихле (заданное перемещение на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента) и Неймана (внешнее давление на поверхности контакта). Было получено, что подбором давления пьезоэлемента на внешнюю часть трубки можно получить такую же деформацию внутренней части трубки, как и при задании перемещения поверхности контакта внутрь на определенную величину (зависимость является линейной), что означает взаимозаменяемость рассматриваемых граничных условий. Было изучено два режима течения жидкости в деформированной трубке: вход трубки закрыт, течение индуцируется деформацией трубки; оба конца открыты, течение индуцируется как деформацией трубки, так и приложенным к слою перепадом давления. Первый режим позволяет провести тестирование компьютерной модели, а второй — предложить механизм дозирования жидкости, управляемый двумя параметрами: частотой сжатия пьезоэлемента и величиной перепада давления.

В работе [13] представлена методика построения элемента вычислительного стенда в виде аналитической формулы на основе трехмерного моделирования течения жидкости через эластичный микроканал, деформируемый пьезоэлементом по гармоническому закону, а также предложены варианты использования полученных результатов в

Таблица 1. Многослойные *PZT* пьезопроводы (размеры: h_l – длина, h_w – ширина, h_h – толщина; амплитуда колебаний – Δh ; блокирующая сила – F_b ; резонансная частота – f_r)

Производитель	h_l , мм	h_w , мм	h_h , мм	ΔH_m , мм	F_b , Н	f_r , Гц
steminc [15]	25	7,1	0,5	0,05	0,005	1000
thorlabs [16]	16	8	0,8	0,135	1,4	930
	28	7,8	0,8	0,45	1,5	370
mmech [17]	21	7,8	0,7-1,8	0,085-0,195	1,2-5,5	730-1800
	32	7,8	0,7-1,8	0,21-0,475	0,75-4,3	275-705
	50	7,8	0,7-1,8	0,635-1,27	0,4-2,9	100-265
bimitech [18]	30	8-20	0,65	0,39-0,48	0,15-0,48	219
piezoproducts [19]	6,5-38	6,5-38	1-7,2	0,07-2,8	0,11-2,3	<1000

практических приложениях. Построена трехмерная компьютерная модель управления режимом течения жидкости, индуцированным приложенным вдоль канала перепадом давления, с помощью величины перепада давления и частоты сжатия трубки пьезоэлементом. Данная модель представляет собой первую часть жидкостной системы охлаждения микрозахвата.

Главным недостатком кольцевых пьезоэлектрических приводов является малая амплитуда деформаций (порядка 2–3 мкм) и, следовательно, ограниченное воздействие на жидкость. Многослойные пьезоэлектрические приводы (один слой гибкой подложки и один или несколько пьезоэлектрических слоев) с поперечным отклонением позволяют значительно увеличить амплитуду колебаний [14] до величин порядка $\pm(50 \div 500)$ мкм. В настоящее время существует большое количество моделей с различными характеристиками. В табл. 1 представлены характеристики нескольких многослойных пьезопроводов *PZT* (пьезоэлектрическая керамика, изготовленная из цирконат-титанат свинца). Пьезопроводы имеют следующие конструктивные особенности:

- резонансная (максимальная) частота f_r колебаний увеличивается при уменьшении размеров пьезопровода, особенно при уменьшении толщины h_h ;
- блокирующая сила F_b растет с увеличением размеров;
- максимальная амплитуда колебаний ΔH_m увеличивается с уменьшением толщины h_h ;
- максимальная амплитуда колебаний ΔH_m пропорциональна разности потенциалов, приложенных к слоям пьезопровода U .

Последнее свойство имеет большое значение для приложений. В работе [20] проведено исследование трехслойного привода, способного откло-

няться в двух поперечных направлениях. Показано, что зависимость амплитуды отклонения от приложенного напряжения линейна при частотах колебаний привода до 800 Гц, а максимальная амплитуда отклонения увеличивается с уменьшением толщины гибкой части пьезопровода.

В настоящей работе строится двумерная математическая и компьютерная модель *FSI*, учитывающая влияние колебаний пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом на динамику жидкости в плоском канале, а также исследуется возможность построения на базе пьезоэлектрического привода микронасоса для системы охлаждения микрозахвата.

2. Постановка задачи и основные уравнения

На рис. 1 показана схема рассматриваемой геометрии с обозначением границ (верхний рисунок), где в плоский канал размерами $L_c \times H_c$ вставлен под углом α пьезопровод. Пьезопровод (нижний рисунок) представляет собой плоскую подложку с прикрепленными к ней сверху и снизу пьезоэлементами. Размер гибкой части пьезопровода $L_p \times H_p$. Гибкая часть пьезопровода Γ_6 может изгибаться в обе стороны в поперечном направлении на величину ΔH_p , пропорциональную электрическому напряжению U . Фиксированная часть пьезопровода Γ_5 жестко закреплена.

Линейные упругие деформации твердого изотропного тела в отсутствии внешних сил описываются условием равновесия тензора напряжений [21]

$$\bar{\bar{\sigma}} = 0, \quad (1)$$

зависящего от тензора деформаций $\bar{\bar{\epsilon}}$ и вектора перемещений $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$:

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} + \lambda(\nabla\mathbf{s})\bar{\bar{I}}, \quad (2)$$

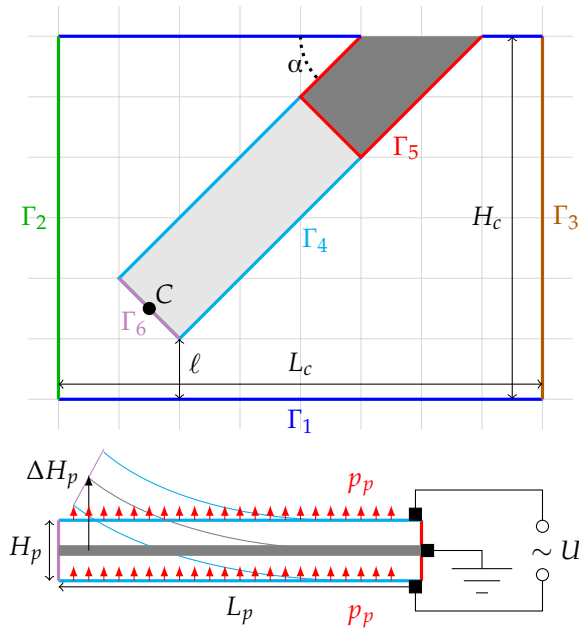


Рис. 1. Геометрия модели. Канал: стенка Γ_1 , входное Γ_2 и выходное Γ_3 отверстия. Пьезопривод: зафиксированная Γ_5 и гибкая Γ_4 части

где $\bar{\bar{I}}$ — единичный тензор; ∇ — оператор набла; коэффициенты Ламе

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

зависят от модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν .

Подставляя (2) в уравнение (1) и исключая тензор деформаций $\bar{\bar{\epsilon}}$, согласно определению

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{s} + (\nabla \mathbf{s})^T),$$

получим уравнение равновесия, содержащее только вектор перемещений (уравнение Ламе):

$$\nabla \left[\mu (\nabla \mathbf{s} + (\nabla \mathbf{s})^T) + \lambda (\nabla \mathbf{s}) \bar{\bar{I}} \right] = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) является стационарным, т.е. применяется только для времени процесса деформации выше характерного времени упругой релаксации

$$\tau_e \sim \Delta H_m \sqrt{\frac{\rho_e}{E}},$$

где ρ_e — плотность пьезоэлемента; E — модуль Юнга материала пьезоэлемента. Для типичных параметров $\rho_e = 2300 \text{ кг/м}^3$, $E = 30 \text{ ГПа}$ и амплитуды колебаний $\Delta H_m = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ получим

$\tau_e = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, т.е. уравнение (3) применимо для частоты колебаний $f \ll 7 \text{ МГц}$, что укладывается в характеристики пьезопроводов (см. f_r в табл. 1). Относительное удлинение $\Delta H_m / L_p \approx 1,7\%$ укладывается в пределы применимости линейных уравнений упругости (3%). Отметим, что в рассматриваемой модели точность расчетов мало зависит от величины относительного удлинения, а преимущественно от того, насколько выполняется условие линейности $\Delta H_p(U)$.

Течение несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнением неразрывности [22]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

где ρ — плотность жидкости; $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ — вектор скорости жидкости; t — время; p — давление, μ — динамическая вязкость жидкости; Δ — оператор Лапласа.

Уравнения (3)–(5) записывались в вариационной форме и решались численно МКЭ в пакете численного моделирования *FreeFem++* [23]. Дискретизация по времени проводилась по неявной схеме Эйлера.

Деформации \mathbf{s} определялись решением уравнения (3) численно в вариационной формулировке:

$$\int_{\Omega} \frac{\mu}{2} (\nabla \mathbf{s} + \nabla \mathbf{s}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \lambda (\nabla \mathbf{s}) (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{s} \Omega = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ — пробные функции; интегрирование производится по всему объему Ω трубки.

Уравнения гидродинамики (4)–(5) в вариационной форме записывались в виде:

$$F(\mathbf{u}, p) = 0, \quad (7)$$

$$F(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} \left[\rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} \mathbf{w} + \rho (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \mathbf{w} - p^{n+1} \nabla \mathbf{w} + \mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{u}^{n+1} q + \varepsilon_p p^{n+1} q \right] d\Omega,$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$ — шаг по времени; индексы n и $n + 1$ означают предыдущий и текущий шаг по времени; \mathbf{w} и q — пробные функции для переменных \mathbf{u} и p , соответственно; $\varepsilon_p \sim 10^{-10}$ — безразмерный коэффициент, определяющий малую искусственную сжимаемость (повышающую устойчивость численной схемы, но практически не влияющую на определяемое поле скоростей).

Уравнения (7) являются нелинейными и решались итерационным методом Ньютона:

$$F(\mathbf{u}, p) + dF(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}, \delta p) = 0,$$

где дифференциал $dF(\mathbf{u}, p)$ имеет вид:

$$dF(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}, \delta p) = \int \left[\frac{1}{\tau} \rho \delta\mathbf{u}\mathbf{w} \, d\Omega + \right. \\ \left. + \rho((\delta\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1}\nabla)\delta\mathbf{u}\right]\mathbf{w} - \delta p\nabla\mathbf{q} + \\ + \mu\nabla\delta\mathbf{u}\nabla\mathbf{w} + \nabla\delta\mathbf{u}\mathbf{q} + \varepsilon_p\delta p\mathbf{q} \, d\Omega.$$

На k -й итерации решение обновляется

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k-1} + \delta\mathbf{u}, \quad p^k = p^{k-1} + \delta p,$$

пока невязка $\|F\|$ не станет меньше заданной погрешности ε_F и невязка решений $\max(\|\delta\mathbf{u}\|, \|\delta p\|) \leq \varepsilon_\delta$. Для повышения устойчивости схемы Ньютона начальное приближение решения на $k = 0$ итерации находилось решением уравнения

$$F(\mathbf{u}, p) = 0$$

с линеаризацией нелинейного конвективного слагаемого по схеме Пикарда

$$(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1} \rightarrow (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1}.$$

При приложении к пьезоэлементам напряжения пьезопривод изгибается в поперечном направлении на величину, пропорциональную приложенному напряжению $\Delta H_p \sim U$. Изменение напряжения на пьезоприводах линейно

$$U = U_m F_p(i, i_m),$$

где U_m — амплитуда напряжения; i — номер шага по времени; i_m — количество временных шагов за период, а безразмерная ограниченная в интервале $[-1, 1]$ кусочно-линейная функция F_p имеет вид:

$$F_p(i, i_m) = 1 - 2 \left| \frac{(i + \lfloor i_m/4 \rfloor) \bmod i_m}{\lfloor i_m/2 \rfloor} - 1 \right|, \quad (8)$$

где $\lfloor a/b \rfloor$ означает неполное частное, $a \bmod b$ — остаток при делении целых чисел a/b .

Особенностью пьезопривода с поперечным изгибом является линейная связь между поперечным перемещением ΔH_p и приложенным напряжением U :

$$\Delta H_p = kU, \quad k = \frac{\Delta H_m}{U_m},$$

где k — коэффициент пропорциональности; ΔH_m — амплитуда поперечного перемещения.

Величина ΔH_p напрямую связана с компонентой вектора деформации s_y на границе Γ_6 . Однако, напрямую нельзя задать это условие в качестве граничного условия Дирихле (например, в виде $s_y = \Delta H_p$ на границе Γ_6), поскольку в процессе изгиба меняется форма пьезоэлемента и вторая компонента s_x не определена. Поскольку величина изгиба пропорциональна напряжению U , в расчетах использовались граничные условия Неймана (задавалось давление $p_p \sim U$ на верхней и нижней границах Γ_4), которые позволяют определить форму пьезопривода в процессе деформации и рассчитать соответствующее значение ΔH_p :

$$\Gamma_4 : \sigma_{yy} = p_p \sin \alpha, \quad \sigma_{xy} = p_p \cos \alpha, \quad (9)$$

где p_p определяется из условия, что максимальное значение $p_m = \max(p_p)$ соответствует максимальному отклонению ΔH_m .

Пьезопривод закреплен на границе

$$\Gamma_5 : s_x = 0, \quad s_y = 0.$$

Граничные условия на скорость жидкости (условие залипания):

$$\begin{cases} \Gamma_1, \Gamma_5 : u_x = 0, u_y = 0, \\ \Gamma_4, \Gamma_6 : u_x = \delta s_x / \tau, u_y = \delta s_y / \tau, \\ \Gamma_2, \Gamma_3 : u_y = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где δs_x и δs_y соответствуют изменению деформаций s_x и s_y соответственно за временной промежуток τ . Для создания пуазейлевского течения вдоль слоя приложен перепад давления Δp :

$$p(\Gamma_2) = \Delta p / 2, \quad p(\Gamma_3) = -\Delta p / 2.$$

3. Результаты

В расчетах использовались следующие параметры геометрии: канал имеет длину $L_c = 60$ мм и высоту $H_c = 5$ мм; пьезопривод имеет длину $L_p = 30$ мм и высоту $H_p = 1$ мм с амплитудой максимального поперечного отклонения $\Delta H_m = 0,5$ мм (отклонения происходят в обе стороны в диапазоне $-\Delta H_m \dots \Delta H_m$). Физические параметры выбраны при температуре $T_0 = 20^\circ \text{C}$: в качестве рабочей жидкости использовалась вода с объемной плотностью $\rho = 998 \text{ кг/м}^3$ и динамической вязкостью $\mu = 1,002 \text{ МПа}\cdot\text{с}$; материалом пьезопривода была выбрана керамика с модулем Юнга $E = 30 \text{ ГПа}$ и коэффициентом Пуассона $\lambda = 0,29$. Угол между пьезоприводом и каналом составлял $\alpha = 6^\circ$.

Решением линейной задачи упругости (6) с условием нагружения пьезопривода (9) было получено, что максимальное поперечное отклонение

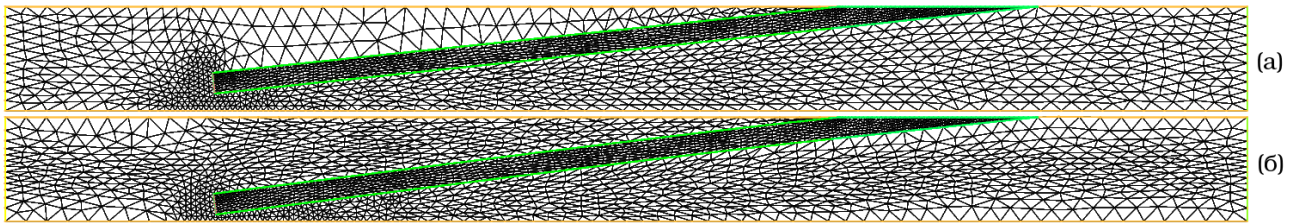


Рис. 2. Расчетная сетка для установившегося течения без колебаний пьезопривода (а) с 1872 КЭ и динамического течения с колебаниями пьезопривода частотой $f = 0,2$ Гц (б) с 2128 КЭ; $t = 3T/4$, $\Delta p = 1$ Па

пьезопривода достигает заданного значения ΔH_m для амплитуды давления $p_m = 9,6$ кПа.

Моделирование происходит на двух двумерных согласованных между собой расчетных сетках. Сначала решались уравнения упругости на сетке, определяющей пьезопривод. По полученному полю деформации на каждом шаге по времени перестраивалась расчетная сетка для канала. Затем на расчетной сетке канала решались уравнения гидродинамики. Для предотвращения появления ошибки, связанной с перемещением узлов одного конечного элемента (КЭ) внутрь другого КЭ (появление отрицательных объемов $V_e \leq 0$), при перестроении расчетной сетки для канала был разработан алгоритм «безопасной» перестройки сетки (в случае возникновения отрицательных объемов меняется коэффициент трансформации, в противном случае происходит трансформация; проверка повторяется до полной трансформации расчетной сетки). Схема алгоритма представлена далее в Приложении. На рис. 2 показана расчетная сетка моделирования Пуазейлевского течения без колебаний пьезоэлемента и с колебаниями частотой $f = 0,2$ Гц.

На рис. 3(а) показана зависимость управляющего сигнала F_p (синие круги), заданного выраже-

нием (8), и отклонение пьезопривода ΔH_p (красные диски) от времени t . Значение ΔH_p рассчитывалось по компонентам s_x и s_y вектора деформаций \mathbf{s} взятых в точке С (центральная точка на границе Γ_6 , обозначена на рис. 1) из геометрических соотношений:

$$\Delta H_p = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}.$$

Видно, что зависимость является линейной и использование граничных условий Неймана в виде (9) полностью соответствует условию

$$\Delta H_p = \Delta H_m F_p$$

для величины давления

$$p_p = p_m F_p.$$

Разделив первое условие на второе, можно напрямую связать ΔH_p и p_p :

$$\Delta H_p = \Delta H_m \frac{p_p}{p_m}.$$

На рис. 3(б) показана траектория движения центральной граничной точки пьезопривода С. Из-за того, что угол α является острым, перемещение

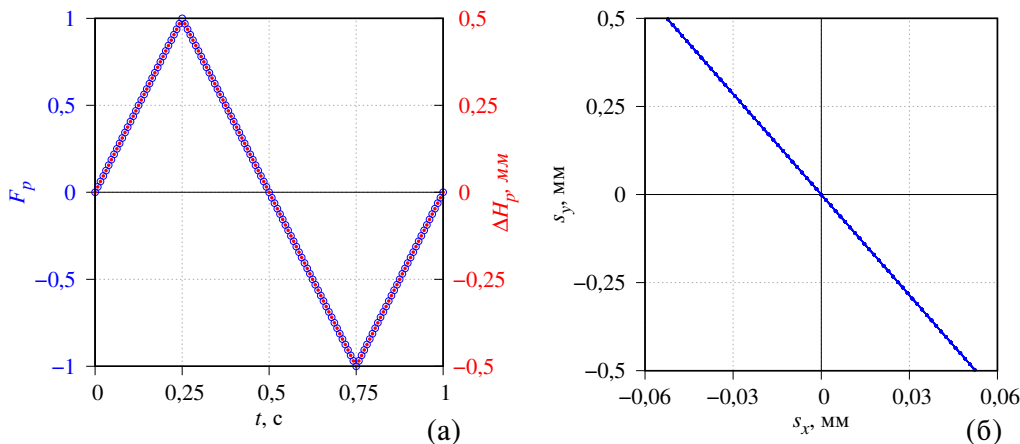


Рис. 3. Зависимость управляющего сигнала F_p (синие круги) и отклонение пьезопривода ΔH_p (красные диски) от времени t (а) и траектория движения центральной точки С (б); $f = 1$ Гц

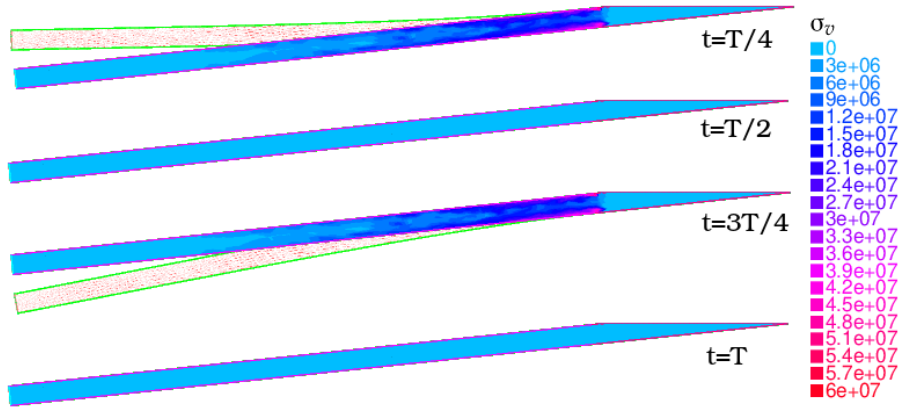


Рис. 4. Напряжения фон Мизеса (11) при деформации пьезопривода в различные моменты периода T . Величина деформаций s увеличена в 4 раза

идет в основном по оси Oy , а сама траектория является практически линейной (представляет собой небольшую дугу с большим радиусом кривизны).

На рис. 4 показаны деформации и возникающие в пьезопроводе эквивалентные напряжения фон Мизеса, вычисленные по формулам [21]:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2}, \quad (11)$$

где

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x};$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

Напряжения распределены вдоль пьезопривода нелинейно с концентрацией напряжений вблизи точки закрепления. Для наглядности величина деформаций увеличена в 4 раза.

Рассмотрим влияние колебаний пьезопривода на динамику течения жидкости. Скорость течения жидкости определяется двумя механизмами: приложенный вдоль слоя перепад давления Δp индуцирует пуазейлевское течение; смещение поверхности пьезопривода во время колебаний вызывает смещение жидкости. При высоте канала 5 мм зазор между пьезоэлементом и нижней стенкой канала составляет $\ell \sim 0,5-1,5$ мм, т.е. пьезопровод создает динамическое гидросопротивление. Изменение скорости течения жидкости $u_x(y)$ (и ее амплитуды u_m) через зазор и расход жидкости Q можно оценить по формуле пуазейлевского течения в плоском канале [24]:

$$u_x(y) = \frac{u_m}{2} y(y - \ell), \quad u_m = \frac{\Delta p \ell^2}{8\mu L}, \quad Q = \frac{2u_m \ell \ell^*}{3\mu}, \quad (12)$$

где $\ell^* = 5$ мм — фиктивная ширина канала вдоль оси Oz (вводится для удобства и сохранения размерности), т.е. скорость течения жидкости меняется до

$$\frac{u_x(\ell_0 + \Delta H_m)}{u_x(\ell_0 - \Delta H_m)} \approx \left(\frac{1,5}{0,5} \right)^2 = 9$$

раз в зависимости от фазы деформации пьезопривода, где ℓ_0 — ширина зазора между стенкой канала и недеформированным пьезопроводом. Также амплитуда скорости на входном и выходном отверстиях будет в $H_c/\ell \approx 3,3-10$ раз ниже, поскольку расход в любом вертикальном сечении канала остается неизменным:

$$Q = \frac{2u_m(0)H_c}{3\mu} \ell^* = \frac{2u_m(x_\ell)\ell}{3\mu} \ell^*, \quad (13)$$

где $u_m(x_\ell)$ — амплитуда скорости в зазоре.

Скорость жидкости вблизи пьезопривода определяется скоростью деформаций поверхности пьезопривода $\mathbf{u}(\Gamma_4, \Gamma_6) \sim \mathbf{s}/\tau$ по граничным условиям (10), где $\tau = 1/(f \cdot N_T)$ зависит от частоты f и количества временных шагов за период $N_T = 128$, т.е. составляет $u \sim 0,125 \cdot f$ [м/с] (квадратными скобками здесь и далее обозначена полная размерность формулы, включающая размерность числовых коэффициентов). Расход жидкости в результате смещения поверхности пьезопривода определяется как объем смещенной жидкости, деленный на время, за которое это смещение произошло:

$$Q = 0,5 \cdot \Delta H_c \cdot L_p \cdot \ell^* \cdot \tau \approx 5 \cdot f \text{ [мм}^3/\text{с]}.$$

Используя формулу (13), получим дополнительную прибавку к скорости в зазоре за счет деформации пьезопривода $\Delta u \approx 14 \cdot f$ [мм/с], т.е. скорость жидкости в зазоре может быть значительно выше скорости на поверхности пьезопривода.

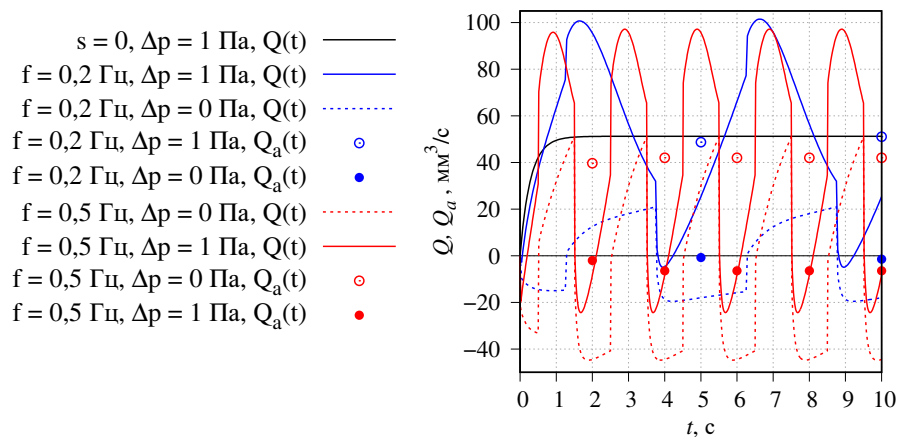


Рис. 5. Расход жидкости Q (линии) и средний расход жидкости Q_a (символы) в зависимости от времени при различных режимах работы пьезопривода: пьезопривод неподвижен (черная линия); колебания пьезопривода с частотой $f = 0,2$ Гц (синие линии и символы) и $f = 0,5$ Гц (красные линии и символы). Перепад давления $\Delta p = 0$ Па (сплошные линии) и $\Delta p = 1$ Па (пунктирные линии)

Для повышения точности расчетов использовалась адаптивная (обновляемая на каждом временном шаге) неравномерная (плотность КЭ зависела от градиентов компонент скорости $[\nabla u_x, \nabla u_y]$) расчетная сетка.

Расход жидкости Q на выходном отверстии Γ_4 определялся численным интегрированием

$$Q(t) = \ell^* \int_{\Gamma_4} u_x(t) d\Gamma.$$

Средний расход жидкости Q_a определялся как изменение объема жидкости V , протекающей через выходное отверстие за период колебаний $T = 1/f$:

$$Q_a = [V^i(T) - V^{i-1}(T)] \cdot f,$$

где индексы i и $i - 1$ соответствуют текущему и предыдущему периоду.

На рис. 5 показаны расход жидкости Q и средний расход жидкости Q_a от времени при различных вариантах работы пьезопривода. В отсутствии деформаций и при постоянном перепаде давления устанавливается стационарный режим течения жидкости (расход жидкости выходит на постоянную величину) за характерное время релаксации скорости τ_u :

$$\tau_u = \frac{\rho \ell^2}{\eta}. \tag{14}$$

Видно, что течение (рис. 5, сплошная черная линия) выходит на стационарный режим за время порядка $\tau_u \approx 1$ с.

При колебании пьезопривода в отсутствие перепада давления Δp течение создается вытал-

киванием жидкости за счет перемещения поверхности. В интервалах времени $t = [0, T/4]$ и $t = [3T/4, T]$ пьезопривод деформируется вверх, жидкость выталкивается в отрицательном направлении (по оси Ox) и зазор ℓ увеличивается. За время $t = [3T/4, 3T/4 + \tau]$ расход жидкости выходит на квазистационарный режим. Помимо выталкиваемой жидкости добавляется течение через зазор в отрицательном направлении (в результате падения давления в области зазора). При смещении пьезоэлемента вниз ($t = [T/2, 3T/4]$) зазор уменьшается. Вследствие инерции жидкости требуется время (порядка τ_u) для создания течения жидкости через зазор в положительном направлении, но зазор за это время уменьшается, что приводит, согласно (12), к меньшему дополнительному потоку жидкости. За период T в положительном направлении протекает меньше жидкости, чем в отрицательном, и средний расход жидкости Q_a отличен от нуля. С ростом частоты колебаний период T уменьшается и вклад интервала времени, когда течение меняет свое направление, увеличивается, что приводит к росту $|Q_a|$. С увеличением частоты в пределах $f < 1/\tau_u$ амплитуда Q (а также $|Q_a|$) возрастает пропорционально f .

Если к каналу приложить дополнительный перепад давления, то, согласно (12), расход жидкости будет пропорционален ℓ^3 : с уменьшением ℓ поток создается преимущественно движением границы пьезопривода, а при увеличении ℓ основной вклад идет от пуазейлевского течения. Пик расхода жидкости в интервале $t = [T/2, T/2 + \tau_u]$ соответствует широкому зазору и выталкиванию жидкости в положительном направлении. С ростом частоты (в пределах $f < 1/\tau_u$) минимальное значение Q

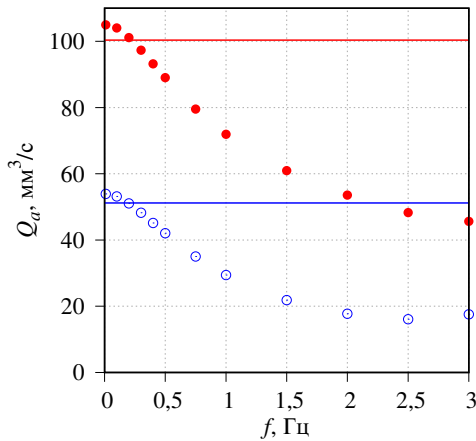


Рис. 6. Зависимость среднего расхода жидкости Q_a от частоты f при перепаде давления $\Delta p = 1$ Па (синяя линия с символами) и $\Delta p = 2$ Па (красная линия с символами). Линии – установившееся пуазейлевское течение без деформаций пьезопривода; символы – течение с колебаниями пьезопривода

уменьшается пропорционально f (выталкивание жидкости пьезоприводом), а максимальное значение Q незначительно снижается (вклад от пуазейлевского течения не меняется, а влияние инерции жидкости увеличивается).

При частотах $f \geq 1/\tau_u$ период колебаний $T \ll \tau_u$ и движение поверхности пьезоэлемента оказывает значительное влияние на пуазейлевское течение во время всего периода. Зависимость среднего расхода жидкости Q_a от частоты переходит с линейной на константу $Q_a \rightarrow Q_s$ (рис. 6). С ростом перепада давления Δp время выхода на стационарное значение Q_s увеличивается, поскольку с ростом скорости перемещения поверхности пьезопривода $u_p \sim f$ создается дополнительный перепад давления $\delta p \sim f^2$ вблизи поверхности пьезопривода.

Деформации пьезопривода оказывают значительное влияние на динамику жидкости. Но жидкость также оказывает влияние на деформацию пьезопривода. Максимальное напряжение U_m соответствует максимальной деформации ΔH_m в воздушной среде, но при погружении пьезоэлемента в жидкость среда оказывает сопротивление деформациям. Величина сопротивления определяется перепадом давления жидкости относительно противоположных сторон поверхности пьезопривода (на рис. 1 обозначены через Γ_4). Расчеты показали, что реальная амплитуда колебаний пьезопривода равняется

$$\Delta H_m^* = \Delta H_m - \delta H_m,$$

где

$$\delta H_m = 5 \cdot 10^{-6} \cdot f^2 \text{ [мм]}.$$

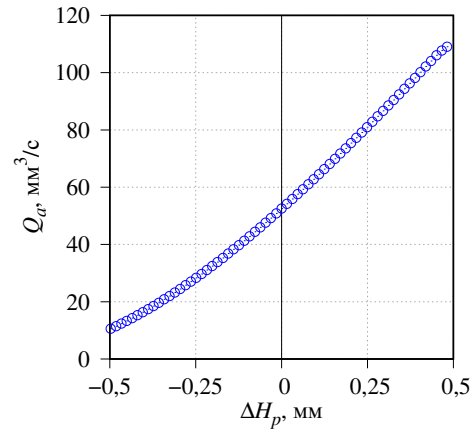


Рис. 7. Расход жидкости Q в зависимости от величины перемещения пьезопривода ΔH_p при перепаде давления $\Delta p = 1$ Па

Например, при частоте $f = 100$ Гц величина $\delta H_m = 0,05$ мм, т.е. составляет 10% от максимального значения ΔH_m . Отметим, что предложенная модель при высоких частотах требует больших вычислительных ресурсов. Оценка величины δH_m проводилась в диапазоне $f = 0,01 \div 20$ Гц.

Рассмотрим практические приложения полученных результатов.

При малых частотах колебаний создается отличное от нуля течение жидкости, что позволяет (в отсутствии перепада давления Δp) разработать миниатюрный насос со средним расходом жидкости порядка 10 мкл/с. Данный насос можно применять в замкнутом контуре. В открытой системе необходимо преодолеть силы поверхностного натяжения. В воде поверхностное натяжение создает на границе давление

$$P \sim 2\zeta/H_c \approx 28 \text{ Па}$$

с коэффициентом поверхностного натяжения $\zeta = 0,073$ Н/м [24]. Предложенная модель позволяет достичь такого перепада давления на частотах порядка $f = 6$ Гц, однако, для определения возможности создания течения в открытой системе требуются дополнительные, более детальные исследования, учитывающие поверхностное натяжение и гравитацию.

Изменением напряжения U на пьезоприводе можно менять величину перемещения пьезопривода при этом меняя высоту зазора ℓ и величину создаваемого гидросопротивления. На рис. 7 показана зависимость Q_a от величины перемещения ΔH_p . Видно, что средний расход жидкости мож-

но регулировать в широком диапазоне (минимальная и максимальная величины Q_a изменяются в 11 раз), что можно использовать в качестве миниатюрного регулятора жидкости со временем перехода на новое стационарное значение расхода жидкости τ_u (14).

Геометрия модели позволяет настроить расположение пьезопривода таким образом, чтобы при некоторой деформации зазор был нулевым, что можно использовать в качестве дозатора жидкости. Пределом применимости модели дозатора является величина перепада давления Δp : сила, создаваемая этим давлением, не должна превышать блокирующую силу пьезопривода F_b .

4. Заключение

Разработана двумерная компьютерная модель течения жидкости в плоском канале под действием перепада давления с динамически изменяемым гидродинамическим сопротивлением, представляющим собой погруженный в жидкость пьезоэлектрический привод с поперечным изгибом.

Показано, что использование граничных условий Неймана позволяет получить линейную зависимость величины деформации от приложенного к поверхности давления. Определены величины деформации и напряжений на пьезоприводе в процессе колебаний. Для повышения точности расчетов строилась адаптивная динамическая расчетная сетка канала с плотностью КЭ, определяемой градиентом поля скоростей. Разработан алгоритм «безопасной» перестройки расчетной сетки, предотвращающий появление отрицательных объемов. При частотах колебаний $f < 1$ Гц пьезопривод создает ненулевой средний за период расход жидкости.

При наличии пуазейлевского течения в канале с ростом частоты колебаний пьезоэлемента средний расход жидкости уменьшается линейно при $f < 1$ Гц и выходит на постоянное значение при $f > 3$ Гц. Проведена оценка сопротивления жидкости деформации пьезопривода. Предложены практические приложения модели: пьезоэлектрический микронасос для замкнутого контура; регулятор расхода жидкости и дозатор жидкости.

Приложение. «Безопасная» перестройка расчетной сетки

В динамическом режиме модели деформации пьезопривода приводят к изменению геометрии канала и в следствии этого на каждом временном шаге необходимо перестраивать расчетную сетку канала. В области зазора между пьезоприводом и стенкой канала, где скорость жидкости максимальна (а, значит при исполь-

зовании адаптивной сетки размеры КЭ будут минимальными), величина перемещения КЭ на границе пьезопривода также максимальна. В результате этого может возникнуть ситуация, когда КЭ после перемещения сжимает соседний элемент на величину, превышающую его размер, что приводит к появлению элементов с отрицательным объемом и аварийному прерыванию программы. Идея предлагаемого алгоритма следующая: вместо полного перемещения узлов КЭ производятся частичные перемещения с шагом, предотвращающим появление отрицательных объемов. После каждого частичного перемещения производилась адаптация расчетной сетки. Частичные перемещения продолжались до тех пор, пока в сумме не дадут полное перемещение:

```

1:  $t \leftarrow 1.0$ 
2:  $c \leftarrow 1.0$ 
3: while  $t > 0$  do
4:   if  $\text{checkmovemesh}(V_e > 0.0)$  then
5:      $\text{movemesh}(x \leftarrow x + c \cdot s_x; y \leftarrow y + c \cdot s_y)$ 
6:      $\text{em adaptmesh}()$ 
7:      $t \leftarrow t - c$ 
8:   else
9:      $c \leftarrow c/2.0$ 
10:  end if
11: end while

```

Для реализации алгоритма использовались следующие средства *FreeFem++*: проверка возможности появления отрицательных объемов *checkmovemesh* (строка 4), трансформация сетки *movemesh* (строка 5) и адаптация сетки *adaptmesh* (строка 6). Отметим, что данный алгоритм работает при дроблении диапазона трансформации не более, чем 31 раза (зависит от разрядности целого типа данных) без потери точности, поскольку при делении на 2 происходит сдвиг разрядности на одну позицию. При используемых параметрах расчета (размеры КЭ лежат в интервале 0,1–0,25 мм, максимальное смещение на пьезоприводе составляло $\Delta H_p/64 \approx 0,016$ мм) производилось не более 2-х частичных перемещений.

Список литературы

- [1] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics. *Micro and Nano Engineering*. 2019. V. 2. Pp. 76–91. DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003
- [2] Dietzel A. A Brief Introduction to Microfluidics. *Microsystems for Pharmatechnology. Manipulation of Fluids, Particles, Droplets, and Cells*. Springer, Cham. 2016. Pp. 1–21. DOI: 10.1007/978-3-319-26920-7
- [3] Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Капиллярный микрозахват с обратной связью. Патент на изобретение № 2261795. Опубликовано: 10.10.2005. Бюл. № 28. https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html

- [4] Laser D.J., Santiago J.G.: A review of micropumps. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. V. 14, No. 6. Pp. R35–R64.
DOI: [10.1088/0960-1317/14/6/R01](https://doi.org/10.1088/0960-1317/14/6/R01)
- [5] Bungartz H.-J., Schäfer M.: *Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization*. LNCSE. 2006. V. 5. DOI: [10.1007/3-540-34596-5](https://doi.org/10.1007/3-540-34596-5)
- [6] Насибуллаев И.Ш. Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // *Вычислительные технологии*. 2016. Т. 21, № 2. Pp. 26–41.
<http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1724>
- [7] Мазо А.Б. *Вычислительная гидродинамика. Часть 2. Сеточные схемы метода конечных элементов. Учебное пособие*. Казань: Казанский университет, 2018. 125 с
https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F866005032/UchPosVG_2.pdf (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [8] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В. Динамика течения жидкости в технических системах с жиклерами // *Известия Уфимского научного центра РАН*. 2015. № 4. С. 20–25.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25732231>
- [9] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–9.
DOI: [10.21662/uim2016.1.001](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.001)
- [10] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через систему связанных элементов технического устройства типа труба–гидросопротивление–труба // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 2. С. 141–149.
DOI: [10.21662/uim2016.2.021](https://doi.org/10.21662/uim2016.2.021)
- [11] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66.
DOI: [10.21662/uim2017.1.009](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.009)
- [12] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлемент канал // *Многофазные системы*. 2018. Т. 13, № 3. С. 1–10.
DOI: [10.21662/mfs2018.3.001](https://doi.org/10.21662/mfs2018.3.001)
- [13] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Моделирование течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом эластичный микроканал системы охлаждения микрозахвата // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2019. Т. 20, № 12. С. 740–750.
DOI: [10.17587/mau.20.740-750](https://doi.org/10.17587/mau.20.740-750)
- [14] Ballas R.G. *Piezoelectric Multilayer Beam Bending Actuators: Static and Dynamic Behavior and Aspects of Sensor Integration*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2007. 358 p.
DOI: [10.1007/978-3-540-32642-7](https://doi.org/10.1007/978-3-540-32642-7)
- [15] STEMiNC STEINER & MARTINS, INC.
<http://steminc.com> (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [16] Thorlabs Inc.
<http://thorlabs.com> (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [17] Micromechatronics, Inc.
<http://mmech.com> (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [18] Bimitech, Inc.
<http://bimitech.com> (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [19] Johnson Matthey Piezo Products GmbH.
<http://piezoproducts.com> (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [20] Rougeot P., Mohand-Ousaid A., Gendreau D., Hammouche M., Rakotondrabe M. Design, modeling and simulation of a three-layer piezoelectric cantilevered actuator with collocated sensor. *Proc. SPIE 9859, Sensors for Next-Generation Robotics III*, 98590F. 2016.
DOI: [10.1117/12.2229515](https://doi.org/10.1117/12.2229515)
- [21] Ландау Л., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости*. М.: Наука, 2003. 259 с.
- [22] Ландау Л., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика*. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [23] Hecht, F. New development in FreeFem++. *Journal of Numerical Mathematics*. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.
DOI: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013)
- [24] Bruus H. *Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition*. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. 237 p.
http://homes.nano.aau.dk/Lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20Lectures.pdf (дата обращения: 10.05.2020 г.)



Two-dimensional dynamic model of the interaction of a fluid and a piezoelectric bending actuator in a plane channel

Nasibullayev I.Sh.^{*}, Darintsev O.V.^{*,**}

^{*}Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

^{**}Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

The paper proposes a two-dimensional computer model of the fluid flow in a plane channel under the action of an applied pressure drop with a flat ceramic piezoelectric actuator immersed in it, bending in the transverse direction in proportion to the applied electric voltage. A mathematical model of the coupled liquid-piezodrive system in variational form for numerical simulation by the finite element method is proposed. Since the assignment of the Dirichlet boundary conditions for displacement in this problem, is difficult, an equivalent piezo actuator deformation scheme using the Neumann boundary conditions is constructed. The deformations and equivalent stresses of von Mises on a piezo actuator are calculated. The influence of the geometry of the channel and the hydrodynamic resistance formed by the piezo actuator on the dynamics of the fluid flow is analyzed. An algorithm is proposed for adaptive dynamic remeshing of the channel computational mesh under deformations exceeding the size of finite elements. With a symmetric control signal supplied to the piezoelectric actuator, the asymmetry of the geometry leads to a violation of the symmetry of the fluid flow within the period, both in terms of fluid flow rate and in time. In the absence of a pressure drop at low frequencies of the oscillations of the piezoelectric element (of the order of the inverse relaxation time of the velocity), the period-average liquid flow rate is nonzero and increases with increasing frequency. In the presence of an external pressure drop along the layer, the average liquid flow rate is proportional to the pressure drop; at low frequencies, it is inversely proportional to the frequency; with increasing frequency, it reaches saturation. Based on the results of numerical modeling, various variants of new microfluidic technical devices generating a fluid flow using a piezoelectric bending actuator are proposed: a micropump creating a closed-circuit flow; fluid flow regulator and fluid volume dispenser.

Keywords: piezoelectric bending actuator, linear elasticity, hydrodynamics, hydrodynamic resistance, plane channel, FSI, finite element method

References

- [1] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics. *Micro and Nano Engineering*. 2019. V. 2. Pp. 76–91.
DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003
- [2] Dietzel A. A Brief Introduction to Microfluidics. *Microsystems for Pharmatechnology. Manipulation of Fluids, Particles, Droplets, and Cells*. Springer, Cham. 2016. Pp. 1–21.
DOI: 10.1007/978-3-319-26920-7
- [3] Darintsev O.V., Migranov A.B. [Capillary micro-grip with feedback] Capilarnyi mikrozhvat s obratnoi svyazju. Patent RF No. 2261795 RU, [Published] Opublikovano 10.10.2005. Byul. N. 28 (in Russian).
https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html
- [4] Laser D.J., Santiago J.G.: A review of micropumps. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. V. 14, No. 6. Pp. R35–R64.
DOI: 10.1088/0960-1317/14/6/R01
- [5] Bungartz H.-J., Schäfer M.: Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization. LNCSE. 2006. V. 5.
DOI: 10.1007/3-540-34596-5
- [6] Nasibullayev I.Sh. [The development of a computer model for the main element of the fuel metering unit] Razrabotka komputernoy modeli osnovnogo elementa agregata dozirovaniya topliva. [Computational Technologies] Vychislitel'nye tehnologii. 2016. V. 21, No. 2. Pp. 26–41 (In Russian).
<http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1724>
- [7] Mazo A.B. [Computational hydrodynamics. Part 2. Grid schemes of the finite element method. Textbook] Vychislitel'naya gidrodinamika. Chast' 2. Setochnye shemy metoda konechnykh elementov. Kazan: Kazan University, 2018. 125 p. (In Russian).
https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F866005032/UchPosVG_2.pdf (Accessed: 10.05.2020 r).

- [8] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Denisova E.V. [Dynamics of fluid flow in technical systems with jets] Dinamika techeniya zhidkosti v tehnikeskikh sistemah s jiklerami. *Bulletin of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences* [Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN]. 2015. No. 4. P. 20–25 (In Russian).
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25732231>
- [9] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The effect of temperature on the dynamics of fluid flow in technical systems with jets] Vliyaniye temperatury na dinamiku techeniya zhidkosti v tehnikeskikh sistemah s jiklerami. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]ches, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 1. P. 1–9 (In Russian).
DOI: 10.21662/uim2016.1.001
- [10] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The fluid flow through a system of connected elements of a technical device such as pipe-hydraulic resistance-pipe] Techeniya zhidkosti cherez sistemu svyazannykh elementov tekhnicheskogo ustroystva tipa truba-gidrosoprotivleniye-truba. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]ches, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 2. P. 141–149 (In Russian).
DOI: 10.21662/uim2016.2.021
- [11] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Fluid flow through hydraulic resistance with dynamically changing geometry] Techeniy zhidkosti cherez gidrosoprotivleniye s dinamicheski izmenyayemoy geometriyey. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]ches, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2017. V. 12, N. 1. P. 59–66 (In Russian).
DOI: 10.21662/uim2017.1.009
- [12] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Study of fluidflow through a channel deformed by piezoelement] Izucheniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom kanal. *Multiphase Systems* [Mnogofaznyye sistemy]. 2018. V. 13, No. 3. Pp. 1–10 (In Russian).
DOI: 10.21662/mfs2018.3.001
- [13] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Simulation of fluid flow through a elastic microchannel deformed by a piezoelement in microgrip cooling systems] Modelirovaniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom elastichnyy mikrokanal sistemy okhlazhdeniye mikrozhkhvata. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2019. V. 20, No. 12. Pp. 740–750 (In Russian).
DOI: doi:10.17587/mau.20.740-750
- [14] Ballas R.G. Piezoelectric Multilayer Beam Bending Actuators: Static and Dynamic Behavior and Aspects of Sensor Integration. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2007. 358 p.
DOI: 10.1007/978-3-540-32642-7
- [15] STEMiNC STEINER & MARTINS, INC.
<http://steminc.com> (Accessed: 10.05.2020 r).
- [16] Thorlabs Inc.
<http://thorlabs.com> (Accessed: 10.05.2020 r).
- [17] Micromechatronics, Inc.
<http://mmech.com> (Accessed: 10.05.2020 r).
- [18] Bimitech, Inc.
<http://bimitech.com> (Accessed: 10.05.2020 r).
- [19] Johnson Matthey Piezo Products GmbH.
<http://piezoproducts.com> (Accessed: 10.05.2020 r).
- [20] Rougeot P., Mohand-Ousaid A., Gendreau D., Hammouche M., Rakotondrabe M. Design, modeling and simulation of a three-layer piezoelectric cantilevered actuator with collocated sensor. Proc. SPIE 9859, Sensors for Next-Generation Robotics III, 98590F. 2016.
DOI: 10.1117/12.2229515
- [21] Landau L.D., Lifshitz E.M. Theoretical physics. V. 7. Theory of Elasticity. M.: Nauka, 2003. 259 p. (In Russian).
- [22] Landau L.D., Lifshitz E.M. Theoretical physics. V. 6. Fluid Mechanics. M.: Nauka, 1988. 736 p. (In Russian).
- [23] Hecht, F. New development in FreeFem++. Journal of Numerical Mathematics. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.
DOI: 10.1515/jnum-2012-0013
- [24] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. 237 p.
http://homes.nano.aau.dk/Lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20lectures.pdf (Accessed: 10.05.2020 r)