ISSN: 2658–5782

Номер 3 Июль–Сентябрь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 3, с. 214–217

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.028
DOI: 10.21662/mfs2019.3.028
УДК 534.113

Получена: 12.12.2019
Принята: 23.12.2019

Определение размеров цилиндрического концевого груза стержня

Аитбаева А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В настоящей статье рассматриваются свободные изгибные колебания однородного стержня. Левый конец стержня заделан, а на правом конце сосредоточен цилиндрический груз. В качестве известных акустических данных используются собственные частоты колебания стержня. Целью работы является определение параметров концевого цилиндрического груза стержня (масса, момент инерции, длина и радиус) по собственным частотам его колебаний. Для решения поставленной задачи используется дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. Это уравнение с известными граничными условиями сводится к спектральной задаче. Для нахождения массы и момента инерции груза был применен метод дополнительной неизвестной величины. Суть этого метода состоит в том, что в характеристическом определителе помимо слагаемых, которые содержат только неизвестные коэффициенты краевых условий в «чистом виде», присутствуют также произведения неизвестных коэффициентов. Некоторые из этих произведений предлагается считать новыми дополнительными неизвестными, через которые можно выразить остальные. Было показано, что по трем собственным частотам колебаний стержня можно найти массу и момент инерции груза. С помощью полученных выкладок выведены формулы для нахождения длины и радиуса цилиндрического груза, а также рассмотрены соответствующие примеры нахождения неизвестных параметров.

Ключевые слова: собственные значения, собственные частоты, цилиндрический груз, стержень

1. Введение

Современная жизнь человека неразрывно связана с многочисленными механизмами и устройствами. Поэтому на сегодняшний день становится важным изучение процессов, протекающих в механических системах. Особое значение имеют колебания и вибрации, которые, в силу непредвиденности, могут вызвать погрешности в работе машин, увеличить износ и заметно понизить надежность, возможны также разрушения и аварии. Вот почему важно решать задачи оперативного контроля технических конструкций и механизмов по характеристикам звуковых колебаний. Рассматриваемая в статье задача часто возникает в технических устройствах, поскольку деталями многих механизмов являются стержни с сосредоточенной массой на конце. Такими системами можно считать, в частности, краны и автомобили, автоматические записывающие устройства с трубками, из которых вытекает краска, детали некоторых механизмов виброзащиты. Если конец стержня недоступен для визуального осмотра, а разбор механизма представляет собой дорогостоящую процедуру, то для сохранения надежной работы механизма, возникает потребность в его ранней неразрушающей диагностике, например, акустической, то есть возникает задача определения параметров закрепления конца стержня по характеристикам звуковых колебаний.

Вопросы вычисления собственных частот распределенных механических систем достаточно хорошо изучены [1–4]. Обратные задачи для таких систем стали решаться относительно недавно [5–11]. Так, в работе [5] рассматриваются дискретные и непрерывные системы, с помощью которых моделируются изучаемые объекты. Данная книга посвящена задаче распознавания дефектов колеба-

---

тельных систем по характеру колебаний. В [7, 9] решаются задачи идентификации сосредоточенных масс на стержне и балке по собственным частотам продольных и изгибных колебаний. Работы [8, 11] посвящены задачам идентификации вида и параметров закрепления стержней и балок. В [11] определяются вид и параметры краевого условия одного из концов стержня по минимальному числу собственных частот колебаний. Найдены формулы для определения значений параметров груза, прикрепленного к концу стержня (массы и момента инерции) по трем собственным частотам его колебаний. В настоящей статье рассматривается цилиндрический груз на конце стержня, известны собственные частоты колебаний и требуется найти радиус и длину этого груза.

Исследуемая проблема возникает в связи с задачами неразрушающей диагностики, а также при создании виброзащитных и безопасных для здоровья технических систем.

2. Постановка задачи

Рассматривается однородный стержень, левый конец которого заделан, а на правом конце сосредоточен цилиндрический груз массой m_1 и моментом инерции I_1. Требуется определить размеры этого груза (радиус r_2 и высоту h) по собственным частотам колебаний стержня.

Для решения поставленной задачи используем уравнения свободных изгибных колебаний стержня [3]:

$$EI\frac{\partial^4 U(X,t)}{\partial X^4}+\rho F\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

где $U(X,t)$ — прогиб оси стержня; EI — изгибная жесткость стержня; ρ — плотность материала; F — площадь поперечного сечения стержня.

При $t=0$ должны выполнятся начальные условия: $U(X,0) = f(X)$, $U(x,t) = g(X)$, где $f(X)$, $g(X)$ — функции, определяющие начальное положение оси стержня.

Краевые условия для случая, когда левый конец стержня заделан, а на правом конце сосредоточен груз, имеют вид:

$$\begin{gathered}X=0: U(X,t)=0,\ \frac{\partial U(X,t)}{\partial X}=0;\\ X=L: EI\frac{\partial^3 U(X,t)}{\partial X^3}=-m\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2},\\ EI\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2}=-I_1\frac{\partial^3 U(X,t)}{\partial X\partial t^2}.\end{gathered} \qquad (2)$$

Введем обозначения $x = X/L$, $u = U/L$, где L — длина стержня, тогда уравнение (1) и краевые условия (2) запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}+\frac{\rho F L^4}{EI}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0,\\ x=0: u(x,t)=0,\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0,\\ x=L: EI\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}=-m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\\ EI\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=-I_1\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\partial t^2}.\end{gathered}$$

Обозначим $\rho F L^4/(EI)$ через λ^4. Тогда заменой $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$ поставленная выше задача сводится к следующей спектральной задаче [2]:

$$y^{(4)}=\lambda^4 y, \qquad (3)$$

$$\begin{gathered}Y_1(y)=y(0)=0,\quad Y_2(y)=y'(0)=0;\\ Y_3(y)=y'''(1)-a_1\lambda^4 y(1)=0,\\ Y_4(y)=y''(1)-a_2\lambda^4 y'(1)=0,\end{gathered} \qquad (4)$$

где $a_1 = m/(\rho F L)$, $a_2 = I_1/(\rho F L^3)$.

Требуется по собственным значениям задачи (3), (4) определить размеры (длину h и радиус r_2) концевого цилиндрического груза.

3. Решение задачи

Коэффициенты a_1 и a_2 по трем собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ задачи (3), (4) определяются по формулам [11, с. 20]:

$$a_1 = D_1/D,\quad a_2 = D_2/D, \qquad (5)$$

где

$$\begin{gathered}f_0(\lambda)=(1+\cos\lambda\cosh\lambda)/\lambda^4,\\ f_1(\lambda)=(\cos\lambda\sinh\lambda-\sin\lambda\cosh\lambda)/\lambda^3,\\ f_2(\lambda)=-(\sin\lambda\cosh\lambda+\cos\lambda\sinh\lambda)/\lambda,\\ f_3=\cos\lambda\cosh\lambda-1,\end{gathered}$$

$$D=\begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_3(\lambda_1)\\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_3(\lambda_2)\\ f_1(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_3(\lambda_3)\end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} f_0(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_3(\lambda_1)\\ f_0(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_3(\lambda_2)\\ f_0(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_3(\lambda_3)\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_0(\lambda_1) & f_3(\lambda_1)\\ f_1(\lambda_2) & f_0(\lambda_2) & f_3(\lambda_2)\\ f_1(\lambda_3) & f_0(\lambda_3) & f_3(\lambda_3)\end{vmatrix}.$$

Верна следующая

Теорема. *Если λ_1, λ_2, λ_3 являются действительными собственными значениями задачи (3)–(4), причем определитель D отличен от нуля, то задача нахождения коэффициентов a_1 и a_2 по собственным* *значениям является корректной, а ее единственное решение дается формулами (5).*

Выразим массу m_1 и момент инерции I_1 груза через найденные коэффициенты a_1 и a_2:

$$m = a_1 F L \rho, \quad I_1 = a_2 F L^3 \rho. \tag{6}$$

Момент инерции полого толстостенного цилиндра массой m с внешним радиусом r_2 и внутренним радиусом r_1 определяется по формуле:

$$I_1 = \frac{m(r_2^2 + r_1^2)}{2}. \tag{7}$$

Массу концевого груза можно найти следующим образом:

$$m = \rho_1(V_2 - V_1) = \rho_1(\pi h r_2^2 - \pi h r_1^2) = \pi h \rho_1 (r_2^2 - r_1^2), \tag{8}$$

где $(V_2 - V_1)$ — объем полого толстостенного цилиндра; r_1 — радиус стержня (внутренний радиус цилиндра); ρ_1 — плотность материала груза; h — высота цилиндра.

Используя формулы (6)–(8), а также зная площадь поперечного сечения $F = \pi r_1^2$, получим систему уравнений с двумя неизвестными h и r_2:

$$a_1 \rho r_1^2 L = h \rho_1 (r_2^2 - r_1^2), \quad 2 a_2 L^2 = a_1 (r_2^2 + r_1^2).$$

Откуда, учитывая, что радиус не может быть отрицательным, получим формулы для нахождения размеров груза цилиндрической формы (длины и радиуса):

$$h = \frac{a_1^2 r_1^2 \rho L}{\rho_1 (2 a_2 L^2 - 2 r_1^2 a_1)}, r_2 = \sqrt{\frac{2 a_2 L^2 - r_1^2 a_1}{a_1}}. \tag{9}$$

Пример 1. Рассматривается стальной стержень длиной $L = 15$ см и радиусом $r_1 = 0.7$ см. Левый конец стержня заделан, а на правом конце имеется цилиндрический груз. Известны собственные значения: $\lambda_1 = 2.156242$, $\lambda_2 = 5.724958$, $\lambda_3 = 9.465460$. Плотность груза и плотность стержня одинаковы $\rho = \rho_1 = 7,86$ г/см^3. Требуется найти размеры концевого груза: длину и радиус.

Используя формулу (5) по известным собственным значениям найдем коэффициенты a_1 и a_2:

$$a_1 = 0.110190, \quad a_2 = 0.000365.$$

Полученные значения и известные параметры подставим в (9) и найдем радиус r_2 и длину h цилиндрического концевого груза:

$$r_2 = 1.0003796 \approx 1 \text{ см}, \quad h = 0.550444 \approx 0.5 \text{ см}.$$

Пример 2. Имеется стальной стержень длиной $L = 10$ см и радиусом $r_1 = 0.5$ см. Левый конец стержня заделан, а на правом конце имеется цилиндрический груз из серебра (плотность стали $\rho = 7,86$ г/см^3, плотность серебра $\rho_1 = 11,5$ г/см^3). Требуется по собственным значениям $\lambda_1 = 2.663834$, $\lambda_2 = 6.530157$, $\lambda_3 = 9.652572$ найти размеры этого груза: длину и радиус.

Используя формулу (5) по известным собственным значениям найдем коэффициенты a_1 и a_2:

$$a_1 = 0.210693, \quad a_2 = 0.000779.$$

Полученные значения и известные параметры подставим в (9) и найдем радиус r_2 и длину h цилиндрического концевого груза:

$$r_2 = 0.699997 \approx 0.7 \text{ см}, \quad h = 1.7219023 \approx 1.7 \text{ см}.$$

4. Заключение

Показано, что по трем собственным частотам колебаний стержня можно найти массу и момент инерции груза. С помощью полученных выкладок выведены формулы для нахождения длины и радиуса цилиндрического груза, а также рассмотрены соответствующие примеры нахождения неизвестных параметров.

Список литературы

[1] Стрэтт Дж.В. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.

[2] Колатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 504 с.

[3] Вибрации в технике: справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания нелинейных систем / Под редакцией В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

[4] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Частотно-параметрический анализ собственных колебаний неоднородных стержней // ПММ. 2003. Т. 67, вып. 4. С. 588–602. `https://elibrary.ru/item.asp?id=17296425`

[5] Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.

[6] Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.

[7] Morassi A., Dilena M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse probl. eng. 2002. V. 10, № 3. P. 183–201. DOI: 10.1080/10682760290010378

[8] Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.

[9] Ахтямов А.М., Урманчеев С.Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. XI, № 4. С. 19–24. `https://elibrary.ru/item.asp?id=11673127`

[10] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.

[11] Аитбаева А.А. Математическое моделирование и идентификация вида и параметров закрепления конца стержня по собственным частотам его колебаний: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Уфим. гос. авиац. университет, Уфа, 2018. 95 с. `https://www.ugatu.su/assets/files/documents/dissov/06/2018/AitbaevaAA/Autoref_AitbaevaAA.pdf`

ISSN 2658–5782 14 (2019), **3**, 214–217

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.028
DOI: 10.21662/mfs2019.3.028

Received: 12.12.2019
Accepted: 23.12.2019

Determination of the dimensions of the cylindrical weight at the end of the rod

Aitbaeva A.A.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa

This article discusses free transverse vibrations of a homogeneous rod. The left end of the rod is clamped, and a cylindrical weight is concentrated at the right end. The eigenfrequencies of the rod vibration are known. The purpose of this work is to determine the parameters of the end cylindrical weight of the rod (mass, moment of inertia, length and radius) by the natural frequencies of the rod vibrations. We use a partial differential equation derivative of the fourth order to solve this problem. This equation and boundary conditions are reduced to a spectral problem. To find the mass and moment of inertia of the weight, the «Method of an additional unknown» was applied. In the characteristic determinant of the spectral problem, there are terms that contain products of unknown coefficients. The essence of the «Method of an additional unknown» is that some of these products are proposed to be considered new additional unknowns, through which the rest can be expressed. It is shown that the mass and moment of inertia of the weight can be found using the three natural frequencies of the rod vibrations. Formulas for finding the length and radius of a cylindrical weight are obtained, and corresponding examples of finding unknown parameters are considered.

Keywords: eigenvalues, natural frequencies, cylindrical weight, rod

References

[1] Strutt J.W. Teoriya zvuka. V. 1. M.: Gostekhizdat, 1955. P. 504 (in Russian).

[2] Kolatts L. Zadachi na sobstvennyye znacheniya (s tekhnicheskimi prilozheniyami). M.: Nauka, 1968. P. 504 (in Russian).

[3] Vibratsii v tekhnike: spravochnik v 6 tomakh. T. 1. Kolebaniya nelineynykh sistem / Pod redaktsiyey V.V. Bolotina. M.: Mashinostroyeniye, 1978. P. 352 (in Russian).

[4] Akulenko L.D., Nesterov S.V. A frequency-parametric analysis of natural oscillations of non-uniform rods // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2003. V. 67, No. 3. Pp. 525–537. https://elibrary.ru/item.asp?id=28927800

[5] Gladvell G.M.L. Obratnyye zadachi teorii kolebaniy. M.-Izhevsk: NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2008. P. 608 (in Russian).

[6] Yurko V.A. Vvedeniye v teoriyu obratnykh spektral'nykh zadach. M.: Fizmatlit, 2007. P. 384 (in Russian).

[7] Morassi A., Dilena M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse probl. eng. 2002. V. 10, No. 3. P. 183–201. DOI: 10.1080/10682760290010378

[8] Akhtyamov A.M. Teoriya identifikatsii krayevykh usloviy i yeye prilozheniya. M.: Fizmatlit, 2009. P. 272 (in Russian).

[9] Akhtyamov A.M., Urmancheev C.F. Determination of the parameters of a rigid body clamped at an end of a beam from the natural frequencies of vibrations // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2010. V. 4. DOI: 10.1134/S1990478910010011

[10] Vatul'yan A.O. Obratnyye zadachi v mekhanike deformiruyemogo tela. M.: Fizmatlit, 2007. P. 224 (in Russian).

[11] Aitbayeva A.A. Matematicheskoye modelirovaniye i identifikatsiya vida i parametrov zakrepleniya kontsa sterzhnya po sobstvennym chastotam yego kolebaniy: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk: 05.13.18. Ufim. gos. aviats. universitet, Ufa, 2018. P. 95 (in Russian). https://www.ugatu.su/assets/files/documents/dissov/06/2018/AitbaevaAA/Autoref_AitbaevaAA.pdf