



ISSN: 2658-5782

Номер 2

Апрель-Июнь 2019

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](http://mfs.uimech.org)





## Исследование собственных функций возмущения поперечной составляющей скорости потока термовязких жидкостей<sup>1</sup>

Низамова А.Д.\* , Киреев В.Н.\*\* , Урманчиев С.Ф.\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Башкирский государственный университет, Уфа

Рассмотрено течение вязкой модельной жидкости в плоском канале с линейным профилем температуры. Задача об устойчивости течения термовязкой жидкости решается на основе полученного ранее обобщенного уравнения Орра–Зоммерфельда спектральным методом разложения по полиномам Чебышева. Исследуется влияние учета линейной и экспоненциальной зависимостей вязкости жидкости от температуры на собственные функции уравнения гидродинамической устойчивости и на возмущения поперечной скорости течения несжимаемой жидкости в плоском канале при задании различных значений температуры стенок. Численно найдены собственные функции для двух собственных значений линейной и экспоненциальной зависимостей вязкости от температуры. Представлены графики собственных функций. Собственные функции демонстрируют поведение возмущений поперечной скорости, их возможный рост или затухание с течением времени. Для приведенных в работе собственных функций получены возмущения поперечной скорости течения термовязкой жидкости. Показано, что учет температурной зависимости вязкости влияет на собственные функции уравнения гидродинамической устойчивости и на возмущения поперечной скорости течения. Возмущения поперечной скорости оказывают существенное влияние на гидродинамическую неустойчивость течения жидкостей. По полученным результатам видно, что при рассмотрении неустойчивого собственного значения с течением времени возмущения скорости начинают расти, что приводит к турбулизации течения. Максимальные значения собственных функций и возмущений поперечных скоростей смещены в сторону горячей стенки. Показано, что для неустойчивого собственного значения возмущения поперечной скорости течения возрастают с течением времени, а для устойчивого — затухают.

**Ключевые слова:** термовязкая жидкость, собственные функции, возмущения поперечной скорости, гидродинамическая неустойчивость

### 1. Введение

Гидродинамическая устойчивость течения жидкости является одной из главных задач гидродинамики. Хорошо известно, что существует два

режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. Каждый из этих режимов имеет важное значение в технологических процессах. Ламинарный режим важен с точки зрения энергетической эффективности, а турбулентный — при учете эффективности тепломассопереноса и зависимости вязкости от температуры в плоском канале с линейным профилем температуры.

Особенности устойчивости течения жидкостей с постоянной вязкостью подробно исследованы в работах [1, 2]. Численный алгоритм решения задачи об устойчивости течения жидкости с постоян-

<sup>1</sup>Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию на 2019–2022 гг. (№ 0246-2019-0052), РФФИ (проект № 17-41-020999-р\_а) и Академии наук Республики Башкортостан (Договор № 40/10).

ной вязкостью приведен в работе [3]. Однако, зависимость вязкости жидкости от температуры является важным фактором, определяющим характер течения [4–6], и безусловно отражающимся на закономерностях потери устойчивости потока [7, 8].

В настоящей работе представлены результаты исследования устойчивости течений жидкостей с линейной и экспоненциальной зависимостями вязкости от температуры.

## 2. Постановка задачи об устойчивости течения термовязкой жидкости

Рассматривается течение несжимаемой термовязкой жидкости в плоском канале с линейным профилем температуры.

Задача гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным полем сводится к обобщенному уравнению Орра-Зоммерфельда:

$$\mu_0 \left[ \varphi^{IV} - 2k^2 \varphi'' + k^4 \varphi \right] - ik \operatorname{Re} \left[ (u_0 - c) \times \right. \\ \left. \times (\varphi'' - k^2 \varphi) - u_0'' \varphi \right] + 2\mu_0' (\varphi''' - 2k^2 \varphi') + \\ + \mu_0'' (\varphi'' + 2k^2 \varphi) = 0$$

с граничными условиями:

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0, \quad \varphi'(-1) = \varphi'(1) = 0,$$

где  $\mu$  — вязкость;  $\varphi(y)$  — амплитуда возмущения поперечной скорости;  $u_0 = u_0(y)$  — профиль скорости в невозмущенном состоянии;  $i$  — мнимая единица;  $c = w/k$  — фазовая скорость волны вдоль

оси канала (собственное значение);  $w$  — частота;  $k$  — проекция волнового вектора на ось канала (волновое число);  $\operatorname{Re}$  — число Рейнольдса.

Для решения полученного уравнения применяется спектральный метод, использующий разложения по полиномам Чебышева первого рода.

## 3. Результаты численного моделирования и их анализ

### 3.1. Линейная зависимость вязкости от температуры

Рассмотрим зависимость вязкости жидкости от температуры:

$$\mu_L(T) = 1 - \alpha_L T,$$

где  $\alpha_L < 0,5$  — параметр изменения вязкости;  $T$  — температура.

Собственные функции для первого собственного значения [9] течения жидкости с линейной зависимостью вязкости от температуры при фиксированных параметрах числа Рейнольдса  $\operatorname{Re} = 10^4$  и волновом числе  $k = 1$  представлены на рис. 1(а). Рис. 2 является иллюстрацией вещественных частей возмущений поперечной скорости течения жидкости для первого собственного значения и различных безразмерных временных значений  $t$ . По полученным результатам видно, что при рассмотрении неустойчивого собственного значения с течением времени  $t$  возмущения скорости начинают расти, что приводит к турбулизации течения. Вещественная и мнимая части собственной функции, соответствующей второму собственному значению, представлены на рис. 1(б), а возмущения

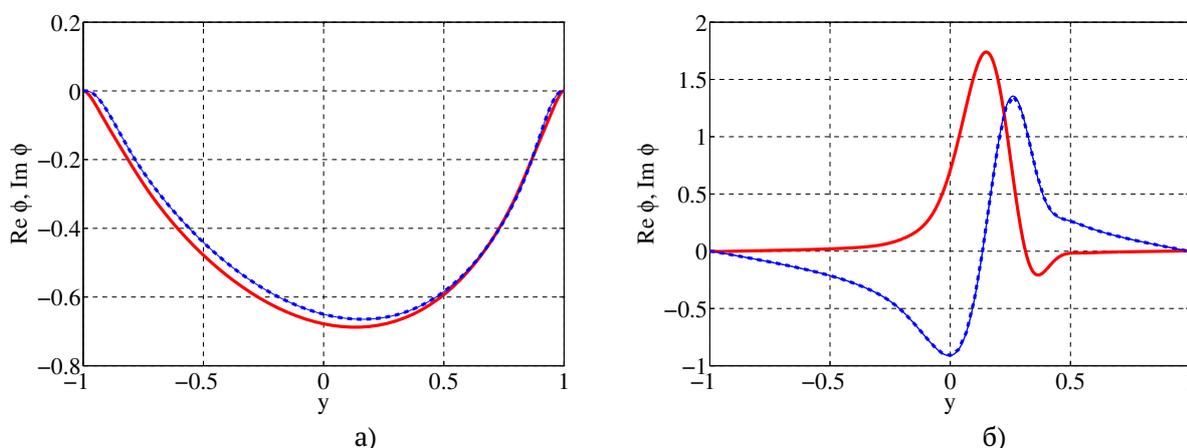


Рис. 1. Вещественная (красная линия) и мнимая (синяя линия) части собственных функций первого (а) и второго (б) собственных значений для жидкости с линейной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $\operatorname{Re} = 10^4, k = 1, \alpha_L = 0.2$

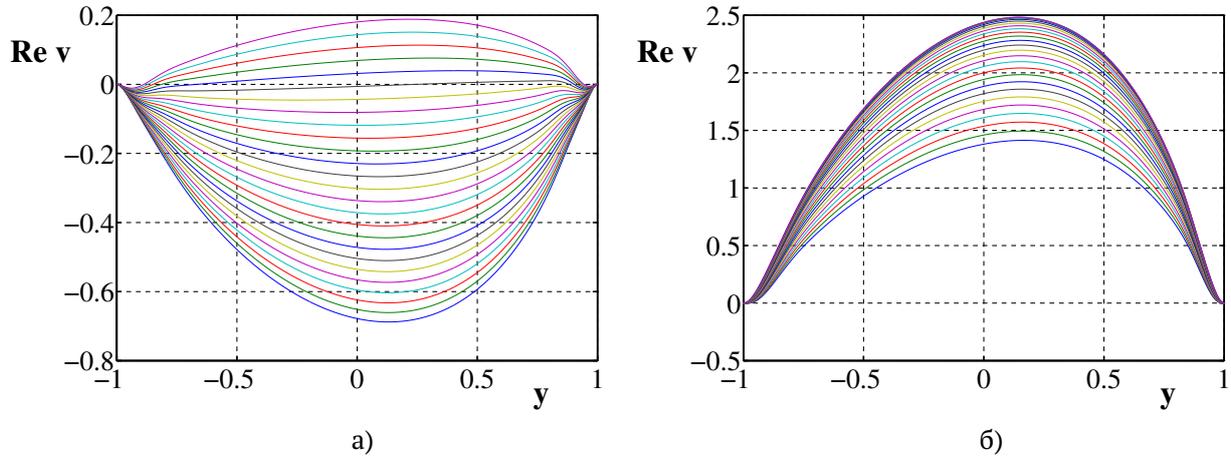


Рис. 2. Вещественная часть возмущений поперечной скорости первого собственного значения для жидкости с линейной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $Re = 10^4$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha_L = 0.2$ : а)  $t = 0$ ; б)  $t = 10^3$

поперечной скорости — на рис. 3. Второе собственное значение является устойчивым и по графикам видно, что с течением времени возмущения поперечной скорости затухают. Также стоит отметить, что собственные функции и возмущения поперечной скорости не обладают признаком симметрии, это следует из того, что профиль скорости в невозмущенном состоянии тоже не обладает симметрией. Максимальные значения собственных функций и возмущений поперечных скоростей смещены вправо от оси  $y = 0$ , это соответствует тому, что возмущения возникают и интенсивно растут вблизи горячей стенки.

### 3.2. Экспоненциальная зависимость вязкости от температуры

Рассмотрим течение жидкости с экспоненциальной температурной зависимостью вязкости:

$$\mu_E(T) = \exp(-\alpha_E T),$$

где  $\alpha_E > 0$  — параметр термовязкости.

На рис. 4(а) представлены графики вещественной и мнимой частей собственной функции, соответствующей первому собственному значению. Рис. 5 является иллюстрацией вещественных частей возмущений поперечной скорости течения

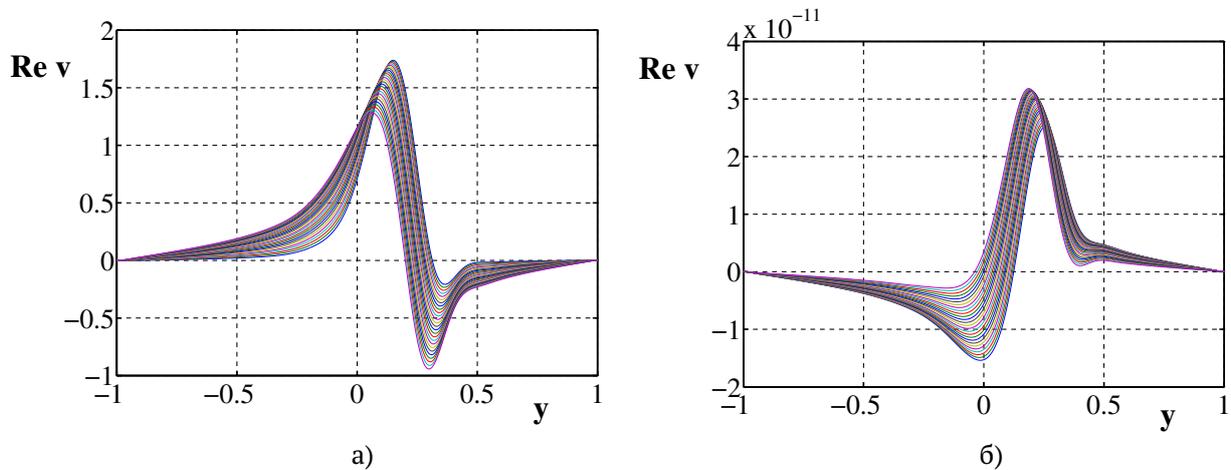


Рис. 3. Вещественная часть возмущений поперечной скорости второго собственного значения для жидкости с линейной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $Re = 10^4$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha_L = 0.2$ : а)  $t = 0$ ; б)  $t = 10^3$

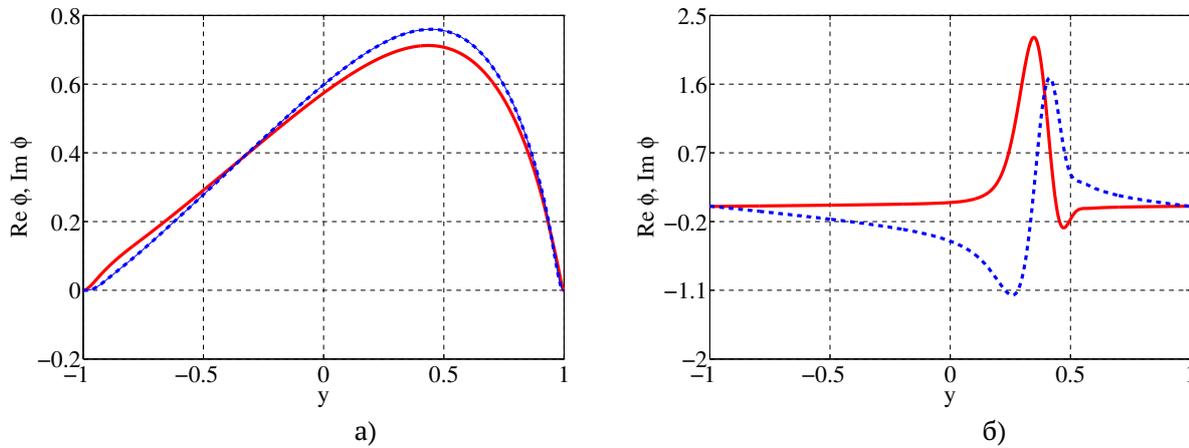


Рис. 4. Вещественная (красная линия) и мнимая (синяя линия) части собственных функций первого (а) и второго (б) собственных значений для жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $Re = 10^4, k = 1, \alpha_E = 1$

жидкости для различных временных значений  $t$ . По полученным результатам видно, что при рассмотрении неустойчивого собственного значения с течением времени  $t$  возмущения скорости начинают расти, что приводит к турбулизации течения. Вещественная и мнимая части собственной функции, соответствующей второму собственному значению показаны на рис. 4(б), а возмущения поперечной скорости — на рис. 6. Второе собственное значение является устойчивым и по графикам можно видеть, что с течением времени возмущения поперечной скорости затухают.

#### 4. Заключение

Установлено, что функциональная зависимость вязкости от температуры влияет на результаты решения задачи о гидродинамической устойчивости. Таким образом, при решении задачи об устойчивости течения термовязкой жидкости следует учитывать зависимость вязкости от температуры.

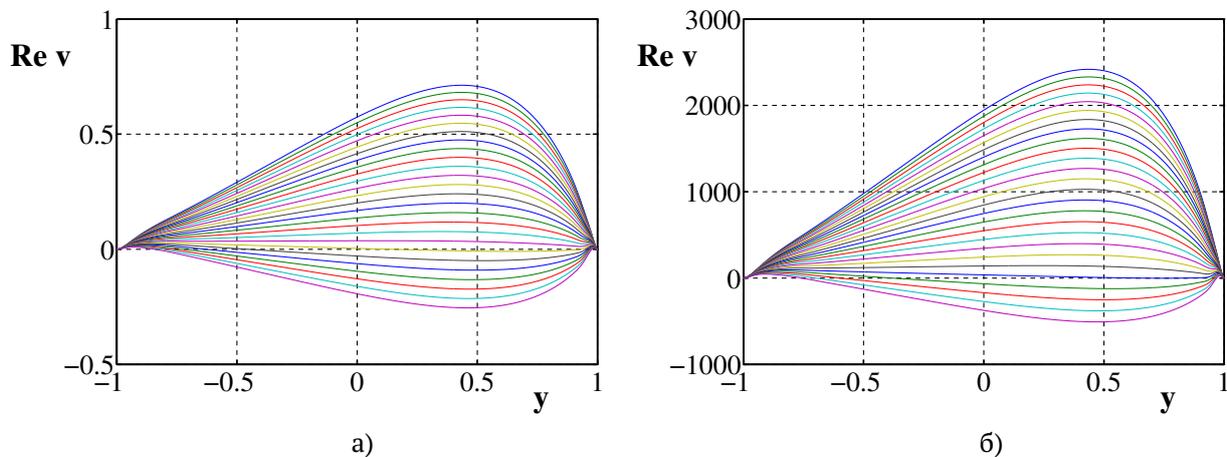


Рис. 5. Вещественная и мнимая части возмущений поперечной скорости первого собственного значения для жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $Re = 10^4, k = 1, \alpha_E = 1$ : а)  $t = 0$ ; б)  $t = 10^3$

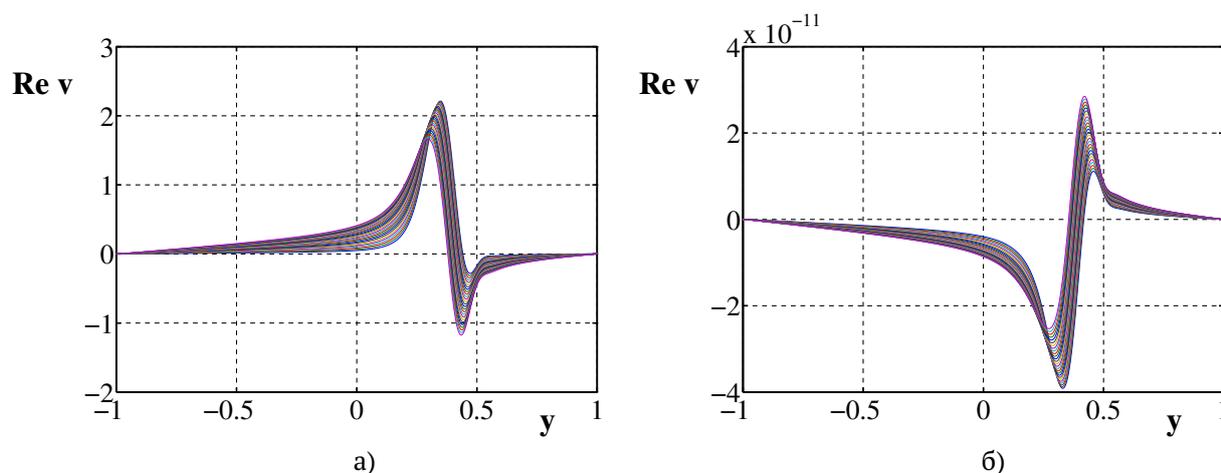


Рис. 6. Вещественная часть возмущений поперечной скорости второго собственного значения для жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $Re = 10^4$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha_E = 1$ : а)  $t = 0$ ; б)  $t = 10^3$

## Список литературы

- [1] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // J. of Fluid Mech. 1971. V. 50, № 4 Pp. 689–703.  
DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [2] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. 1977. 421 с.
- [3] Potter M.C., Graber E.J. Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // Nasa technical note. Nasa TN D-6027. 1970. 12 p.  
<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/197000031354.pdf>
- [4] Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 10. С. 1672–1691.  
<http://mi.mathnet.ru/zvmmf229>
- [5] Урманчев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады академии наук. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=17352428>
- [6] Низамова А.Д. Влияние температурной зависимости вязкости на устойчивость плоскопараллельного течения жидкости // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2014. Вып. 10. С. 90–94.  
DOI: [10.21662/uim2014.1.017](https://doi.org/10.21662/uim2014.1.017)
- [7] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчев С.Ф. О влиянии зависимости вязкости от температуры на устойчивость течения жидкости // Известия УНЦ РАН. 2014. № 4. С. 12–16.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=24326737>
- [8] Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 454–459.  
DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)
- [9] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчев С.Ф. Влияние зависимости вязкости на спектральные характеристики уравнения устойчивости течения термовязких жидкостей // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 52–58.  
DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)



## Research of eigenfunctions perturbation of the transverse component velocity thermoviscous liquids flow

Nizamova A.D.\*, Kireev V.N.\*\*, Urmancheev S.F.\*

\*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

\*\*Bashkir State University, Ufa, Russia

The viscous model fluid flow in a plane channel with a linear temperature profile is considered. The problem of the thermoviscous fluid flow stability is solved on the basis of the previously obtained generalized Orr–Sommerfeld equation by the spectral method of decomposition into Chebyshev polynomials. We study the effect of taking into account the linear and exponential dependences of the viscosity of a liquid on temperature on the eigenfunctions of the hydrodynamic stability equation and on perturbations of the transverse velocity of an incompressible fluid in a plane channel when various wall temperatures are specified. Eigenfunctions are found numerically for two eigenvalues of the linear and exponential dependence of viscosity on temperature. Presented pictures of their own functions. The eigenfunctions demonstrate the behavior of the transverse velocity perturbations, their possible growth or attenuation over time. For the given eigenfunctions, perturbations of the transverse flow velocity of a thermoviscous fluid are obtained. It is shown that taking the temperature dependence of viscosity into account affects the eigenfunctions of the equations of hydrodynamic stability and perturbations of the transverse flow velocity. Perturbations of the transverse velocity significantly affect the hydrodynamic instability of the fluid flow. The results show that when considering the unstable eigenvalue over time, the velocity perturbations begin to grow, which leads to turbulence of the flow. The maximum values of the eigenfunctions and perturbations of the transverse velocities are shifted to the hot wall. It is seen that for an unstable eigenvalue, the perturbations of the transverse flow velocity increase over time, and for a stable one, they decay.

**Keywords:** thermoviscous liquid, eigenfunctions, perturbations of cross section velocity, hydrodynamics instability

### References

- [1] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 50. 1971. V. 50, № 4 Pp. 689–703.  
DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [2] Gol'dshtik M.A., Shtern V.N. [Hydrodynamic stability and turbulence] Novosibirsk: Nauka. 1977. 421 p. (in Russian).
- [3] Potter M.C., Graber E.J. Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // *Nasa technical note.* Nasa TN D-6027. 1970. 12 p.  
<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19700031354.pdf>
- [4] Skorohodov S.L. Numerical analysis of the spectrum of the Orr–Sommerfeld problem // *Computational mathematics and mathematical physics.* 2007. Vol. 47. Issue 10. Pp. 1603–1621.  
DOI: [10.1134/S096554250710003X](https://doi.org/10.1134/S096554250710003X)
- [5] Urmancheev S.F., Kireev V.N. Steady flow of a fluid with an anomalous temperature dependence of viscosity // *Doklady Physics.* 2004. V. 49, № 5. Pp. 328–331.  
DOI: [10.1134/1.1763627](https://doi.org/10.1134/1.1763627)
- [6] Nizamova A.D. [Influence of the temperature dependence of viscosity on the stability of plane-parallel fluid flow] *Trudy Instituta mexaniki im. R.R. Mavlutov URC RAS.* 2014. № 10. P. 90–94 (in Russian).  
DOI: [10.21662/uim2014.1.017](https://doi.org/10.21662/uim2014.1.017)
- [7] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. [Influence of temperature dependence of viscosity on fluid flow stability] *Izvestiya URC RAS.* 2014. № 4. Pp. 12–16 (in Russian).  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=24326737>
- [8] Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F. [Some features of the hydrodynamic instability of the flow of a thermally viscous fluid in a flat channel] *Prikladnaya mexanika i matematika.* 2019. Vol. 83, № 3. Pp. 454–459 (in Russian).  
DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)
- [9] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. [Influence of viscosity temperature dependence on the spectral characteristics of the thermoviscous liquids flow stability equation] *Multiphase systems.* 2019. Vol. 14, № 1. Pp. 52–58. (in Russian).  
DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)