



ISSN: 2658–5782

Номер 1

Январь–Март 2019

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](http://mfs.uimech.org)





## Исследование акустического рассеяния от пары звуконепроницаемых сфер при внешнем воздействии<sup>1</sup>

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе представлена обобщенная математическая модель и проведены численные исследования задачи акустического рассеяния от двух звуконепроницаемых сфер (случай твердых сфер) с произвольным акустическим импедансом при прохождении сферической волны от монопольного источника излучения, произвольно расположенного в пространстве. Случай двух сфер представляет практический интерес, поскольку, с одной стороны, рассеянные поля от сфер взаимодействуют друг с другом, а с другой стороны, взаимодействие является достаточно простым для того, чтобы его можно было подробно исследовать. При решении уравнений Гельмгольца используется численная техника, основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени. Тестирование алгоритма проведено на основе известных из литературы расчетных данных функции отклика на поверхности одной из сфер в случае, когда ось, соединяющая монопольный источник излучения и центр первой сферы, перпендикулярна оси, соединяющей центры двух сфер. Исследовано распределение давления вокруг сфер для различных значений расстояния между центрами сфер и произвольного расположения монопольного источника излучения в пространстве. Показано, что при определенных параметрах системы наличие второй сферы может привести к появлению зоны повышения или понижения давления. Полученные результаты в дальнейшем позволят провести обобщения математической модели на случаи акустического рассеяния от пары звукопроницаемых сфер (случаи газовых пузырьков или жидких капель) и множества сфер (как коаксиально, так и произвольно расположенных в пространстве), а также могут использоваться для проведения тестовых расчетов при верификации численного решения данных обобщенных задач.

**Ключевые слова:** акустическое рассеяние, звуконепроницаемая сфера, монопольный источник излучения, акустический импеданс

### 1. Введение

При взаимодействии акустической волны с препятствиями появляются дополнительные (рассеянные) волны, распространяющиеся во все стороны от препятствий. Данное явление называется рассеянием (дифракцией) звука и его изучение является одной из важных задач акустики, поскольку на нем основываются многие практические применения акустических волн, такие как гидролокация,

приборы неразрушающего контроля, медицинские сканеры, зондирование атмосферы и океана и т.п. Одной из актуальных подзадач является исследование акустического рассеяния на множествах сфер, в том числе твердых сферах, при различных внешних воздействиях.

Настоящая работа обобщает математическую модель, представленную в [1], на случай пары звуконепроницаемых сфер (т.е. случай твердых сфер) с произвольным акустическим импедансом и произвольно расположенным в пространстве монопольным источником излучения. Также обобщена методика расчета [2], основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов и ми-

<sup>1</sup>Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию № 0246-2019-0052.

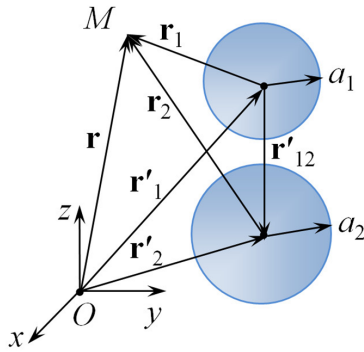


Рис. 1. Обозначения в разных системах отсчета для пары сфер

минимизировать машинное время. Случай двух сфер интересен, поскольку, с одной стороны, рассеянные поля от сфер взаимодействуют друг с другом, а с другой стороны, взаимодействие является достаточно простым для того, чтобы его можно было подробно исследовать.

Целью настоящей работы является обобщение численной модели для определения поля вокруг пары звуконепроницаемых сфер с произвольным акустическим импедансом при падении сферической волны от монополюсного источника излучения, расположенного произвольным образом в пространстве.

## 2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматриваются две сферы различных радиусов  $a_1$  и  $a_2$  с центрами в координатах  $\mathbf{r}'_1 = (x'_1, y'_1, x'_1)$  и  $\mathbf{r}'_2 = (x'_2, y'_2, x'_2)$  соответственно, расположенных в бесконечном трехмерном пространстве, заполненном однородной средой, характеризующейся плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$  (см. рис. 1). Сферы являются звуконепроницаемыми, т.е. через их поверхность волна не проходит, с произвольным акустическим импедансом (полной комплексной проводимостью)  $\sigma_p$  ( $p = 1, 2$ ).

Задача рассеяния звука от сфер сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала  $\psi(\mathbf{r})$  с волновым числом  $k$ :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями общего сопротивления на поверхности  $S_p$   $p$ -й сферы:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial n} + i \sigma_p \psi \right)_{S_p} = 0, \quad p = 1, 2. \tag{2}$$

Здесь  $n$  — нормаль к поверхности;  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

При решении данной задачи потенциал внешнего поля представляется в форме

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}),$$

где  $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$  — потенциал падающего поля;  $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$  — потенциал поля рассеяния, который должен удовлетворять условию излучения Зоммерфельда, соответствующему уходящим на бесконечность волнам (данное условие выделяет единственное решение уравнения (1) в классе обобщенных функций в неограниченной области):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik \psi_{\text{scat}} \right) = 0.$$

Далее осуществляется разложение по мультиполям следующим образом. Вводятся системы отсчета, связанные с центрами сфер, и осуществляется переход к сферической системе координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p = \mathbf{r}_p = (r_p, \theta_p, \varphi_p)$  ( $p = 1, 2$ ). На рис. 1 схематично представлены обозначения, используемые при разложении. Тогда разложение потенциала рассеянного поля может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) &= \sum_{p=1}^2 \psi_p(\mathbf{r}) = \\ &= \sum_{p=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^{(p)m} S_n^m(\mathbf{r}_p), \end{aligned}$$

где  $A_n^{(p)m}$  — неизвестные коэффициенты разложения по мультиполям;  $S_n^m(\mathbf{r}_p) = h_n(kr_p) Y_n^m(\theta_p, \varphi_p)$  — мультиполь порядка  $n$  и степени  $m$ ;  $h_n(kr)$  — сферические функции Ханкеля 1-го типа, удовлетворяющие условию Зоммерфельда;  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  — ортогональные сферические гармоники. Вид данных функций представлен, например, в книге [3].

Разложение потенциала падающего поля около  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_p$  в ряд регулярных фундаментальных решений будет иметь вид:

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_p) R_n^m(\mathbf{r}_p), \tag{3}$$

где  $C_n^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_p)$  — коэффициенты разложения;  $j_n(kr)$  — сферические функции Бесселя 1-го типа;  $R_n^m(\mathbf{r}_p) = j_n(kr_p) Y_n^m(\theta_p, \varphi_p)$  — регулярные фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах, связанные с  $p$ -й сферой.

На следующем этапе проводится повторное разложение по мультиполям. Для этого берется  $q$ -я

сфера и около нее ( $|\mathbf{r}_q| \leq |\mathbf{r}'_p - \mathbf{r}'_q|$ , где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_q$  — центр сферы) мультиполи  $S_n^m(\mathbf{r})$  ( $p \neq q$ ) разлагаются повторно в ряд регулярных фундаментальных решений:

$$S_n^m(\mathbf{r}_p) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq}) R_l^s(\mathbf{r}_q),$$

$p, q = 1, 2; p \neq q$ . Здесь  $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq})$  — коэффициенты перехода при повторном разложении.

В случае двух сфер ось  $z$  можно выбрать таким образом, чтобы она совпала с осью, соединяющей центры данных сфер. Тогда задача становится осесимметричной и формулы упрощаются, поскольку коэффициенты повторного разложения будут зависеть только от относительного расположения центров сфер, а не от углов. В этом случае предыдущее разложение можно представить в виде:

$$S_n^m(\mathbf{r}_p) = \sum_{l=|m|}^{\infty} (S|R)_{ln}^m(r'_{pq}) j_l(kr_q) Y_l^m(\theta_q, \varphi_q)$$

( $p, q = 1, 2; p \neq q$ ), где коэффициенты повторного разложения определяются как

$$(S|R)_{ln}^m(r'_{pq}) = (S|R)_{ln}^{mm}(r'_{pq})$$

( $l, n = 0, 1, \dots; m = -n, \dots, n$ ) и для них имеют место следующие равенства

$$(S|R)_{ln}^m(r'_{pq}) = (-1)^{l+n} (S|R)_{ln}^m(r'_{pq})$$

( $l, n = 0, 1, \dots; m = -n, \dots, n$ ).

Тогда представление решения уравнения Гельмгольца (1) около  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_q$  примет следующий вид:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l \left[ B_l^{(q)s} j_l(kr_q) + A_l^{(q)s} h_l(kr_q) \right] Y_l^s(\theta_q, \varphi_q), \quad (4)$$

$$B_l^{(q)s}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = C_l^{(in)s}(\mathbf{r}'_q) + \sum_{\substack{p=1, \\ p \neq q}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq}) A_n^{(p)m}. \quad (5)$$

При подстановке (4) в граничные условия (2) для  $q$ -й сферы после некоторых преобразований получим следующее выражение коэффициентов  $B_l^{(q)s}$  через коэффициенты  $A_s^{(q)s}$ :

$$B_l^{(q)s} = -\frac{kh'_l(ka_q) + i\sigma_q h_l(ka_q)}{kj'_l(ka_q) + i\sigma_q j_l(ka_q)} A_l^{(q)s}, \quad (6)$$

( $q = 1, 2; l = 0, 1, \dots; s = -l, \dots, l$ ).

Далее соотношения (5), (6) сводятся к системе линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $A_s^{(q)s}$ . В случае осевой симметрии данная система может быть представлена в виде  $2m + 1$  независимых линейных систем (для каждого  $m$ ) в следующем матричном виде:

$$\mathbf{L}^m \mathbf{A}^m = \mathbf{D}^m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где матрицы и вектора представляются как

$$\mathbf{L}^m = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{(11)m} & \mathbf{L}^{(12)m} \\ \mathbf{L}^{(21)m} & \mathbf{L}^{(22)m} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)m} \\ \mathbf{A}^{(2)m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^m = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{(1)m} \\ \mathbf{D}^{(2)m} \end{pmatrix}.$$

Здесь вектора  $\mathbf{A}^{(q)m}$  и  $\mathbf{D}^{(q)m}$  и матрицы  $\mathbf{L}^{(qp)m}$  скомпонованы следующим образом:

$$\mathbf{A}^{(q)m} = \{A_n^{(q)m}\}^T, \quad \mathbf{D}^{(q)m} = \{D_n^{(q)m}\}^T,$$

$$\mathbf{L}^{(qp)m} = \{L_{ln}^{(qp)m}\},$$

( $p, q = 1, 2; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; l, n = |m|, |m| + 1, \dots$ ) с элементами матриц, вычисляемыми по следующим формулам:

$$L_{ln}^{(qp)m} = \frac{kj'_l(ka_q) + i\sigma_q j_l(ka_q)}{kh'_l(ka_q) + i\sigma_q h_l(ka_q)} (S|R)_{ln}^m(r'_{pq})$$

для  $p \neq q$  и  $L_{ln}^{(qq)m} = \delta_{ln}$ ;

$$D_n^{(q)m} = -\frac{kj'_l(ka_q) + i\sigma_q j_l(ka_q)}{kh'_l(ka_q) + i\sigma_q h_l(ka_q)} C_l^{(in)m}(\mathbf{r}'_q).$$

В последних формулах знак «Т» — знак транспонирования;  $\delta_{ln}$  — символ Кронекера.

Осесимметричные коэффициенты  $(S|R)_{l|m|}^m$  достаточно вычислить для  $l \geq n \geq m \geq 0$  благодаря соотношению симметрии:

$$(S|R)_{ln}^m = (S|R)_{ln}^{-m}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Процесс заполнения матрицы  $\{(S|R)_{l|m|}^m\}$  может быть выполнен с помощью следующих рекуррентных соотношений:

- заполняем слой  $m = 0$ . Начальные значения зависят от ориентации вектора  $\mathbf{r}'_{pq}$  относительно единичного вектора  $\mathbf{i}_z$  оси  $z$  и задаются формулой

$$(S|R)_{l0}^0(r'_{pq}) = (S|R)_{l0}^{00}(\mathbf{r}'_{pq}) \sqrt{4\pi} (-1)^l S_l^0(\mathbf{r}'_{pq}) = \varepsilon_{lpq} \sqrt{2l+1} h_l(kr'_{pq}),$$

где

$$\varepsilon_{lpq} = \left( -\frac{\mathbf{r}'_{pq} \cdot \mathbf{i}_z}{|\mathbf{r}'_{pq}|} \right)^l = \begin{cases} (-1)^l, & \text{для } \mathbf{r}'_{pq} \cdot \mathbf{i}_z = |\mathbf{r}'_{pq}|, \\ 1, & \text{для } \mathbf{r}'_{pq} \cdot \mathbf{i}_z = -|\mathbf{r}'_{pq}|; \end{cases}$$

- для фиксированного  $m \geq 0$  и при увеличении порядка  $n$  решается следующее уравнение

$$a_n^m (S|R)_{l,n+1}^m = a_{n-1}^m (S|R)_{l,n-1}^m - a_l^m (S|R)_{l+1,n}^m + a_{l-1}^m (S|R)_{l-1,n}^m \quad (7)$$

( $n = m, m + 1, \dots$ ) с коэффициентами  $a_n^m$ , определяемыми по формуле

$$a_n^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{(n+1+|m|)(n+1-|m|)}{(2n+1)(2n+3)}}, & n \geq |m|, \\ 0, & n < |m|, \end{cases}$$

где  $n = -1, 0, \dots, M; m = -M, \dots, M; M$  — число усечения ряда в случае, когда усечение внешней суммы производится при фиксированном числе  $M$  в каждом разложении;

- при увеличении  $m$  используется следующее уравнение

$$b_{m+1}^{-m-1} (S|R)_{l,m+1}^{m+1} = b_l^{-m-1} (S|R)_{l-1,m}^m - b_{l+1}^m (S|R)_{l+1,m}^m$$

с коэффициентами  $b_n^m$ , определяемыми по формуле

$$b_n^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}}, & 0 \leq m \leq n, \\ -\sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}}, & -n \leq m < 0, \\ 0, & |m| > n, \end{cases}$$

где  $n = -1, 0, \dots, M; m = -M, \dots, M;$

- остальные  $(S|R)_{ln}^{m+1}$  вычисляются с помощью уравнения (7).

Число усечения  $M$  определяется по следующей формуле [2]:

$$M = \frac{1}{2} ekr'_{12}, \quad (8)$$

где  $e$  — число Эйлера.

В случае монополярного источника излучения, расположенного в некоторой точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$ , падающее поле, соответствующее фундаментальному

решению уравнения Гельмгольца, определяется по формуле

$$\Psi_{in}(\mathbf{r}) = -V_0 \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}, \quad (9)$$

где  $V_0$  — амплитуда объемной скорости (или производительность) монополярного источника. Здесь и далее опускается временной множитель  $e^{-i\omega t}$ , где  $\omega = kc_0$  — угловая частота внешнего поля.

Разложение функции (9) около центра  $q$ -й сферы  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_q$  может быть определено как (см., например, [2])

$$\Psi_{in}(\mathbf{r}) = -V_0 ik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n S_n^{-m}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q) R_n^m(\mathbf{r}_q),$$

$|\mathbf{r}_q| \leq |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q|$ . Сравнивая последнее выражение с разложением (3), получим

$$C_n^{(in)m}(\mathbf{r}'_q) = -V_0 ik S_n^{-m}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q) = -V_0 ik h_n(k|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q) Y_n^{-m}(\theta_{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q}, \varphi_{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q}).$$

Поскольку задача является осесимметричной, без ограничения общности задачи, начало отсчета выберем в центре первой сферы, а в качестве плоскости  $Oyz$  возьмем плоскость, содержащую монополярный источник излучения. Пусть задано расстояние от центра первой сферы до источника  $d = |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q| = |\mathbf{r}_s|$  и угол между осью  $z$  и вектором  $\mathbf{r}_s - \theta_{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q} = \theta_s$ , тогда  $\varphi_{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q} = \pi/2$  или  $-\pi/2$ . Обозначим через  $\chi$  наименьшее расстояние между поверхностями двух сфер, тогда  $r'_{12} = a_1 + a_2 + \chi a_1$ .

### 3. Численные результаты

В результате численного моделирования были написаны программные коды на языке Fortran 90. Для вычисления специальных функций и их производных  $h_l(z), h'_l(z), j_l(z), P_l(z)$  были адаптированы программные коды [4], написанные на языке Fortran 77.

Для проведения сравнения с расчетами работы [2] использованы следующие значения параметров:  $c_0 = 343.1$  м/с — скорость звука в воздухе;  $f = 2$  кГц;  $k = 2\pi f/c_0$ ;  $a_1 = 3.0255/k$ ;  $a_2 = 1.3253a_1$ ;  $d = 10a_1$ ; сферы жесткие, т.е.  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ .

Для сравнения с известными численными данными была рассчитана следующая переходная функция  $H$  для первой сферы, измеренная в децибелах, которая представляет отношение амплитуды акустического поля при особом расположении поверхности к амплитуде падающего поля в центре сферы:

$$H = 20 \lg \left| \frac{\Psi|_{S_1}}{\Psi_{in}(\mathbf{r}'_1)} \right|.$$

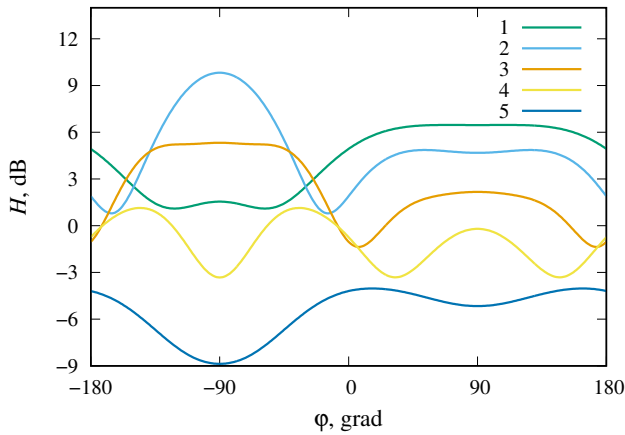


Рис. 2. Функция  $H$  в зависимости от угла  $\varphi_1$  для различных значений угла  $\theta_1$ : 1 –  $30^\circ$ ; 2 –  $60^\circ$ ; 3 –  $90^\circ$ ; 4 –  $120^\circ$ ; 5 –  $150^\circ$

При расчетах производилось усечение ряда в разложении по формуле (8). На рис. 2 каждая кривая соответствует фиксированной величине сферического полярного угла  $\theta_1$  и демонстрирует зависимость от угла  $\varphi_1$ . Отметим, что зависимость от угла  $\varphi_1$  имеет место только благодаря наличию второй сферы. Данные результаты хорошо согласуются с результатами расчетов, представленных в работе [2], и являются тестовыми для настоящей работы.

Проведены расчеты распределения давления

вне сфер для различных значений  $\chi$  и угла  $\theta_s$ . На рис. 3 представлено распределение давления вокруг сфер в плоскости  $x = 0$ , когда они соприкасаются в одной точке ( $\chi = 0$ ) и точек соприкосновения нет ( $\chi = 0.5$ ), а также для сравнения представлен случай одиночной сферы радиуса  $a_1$ . Видно, что, как и в случае одиночной сферы (см., например [1]), при определенных параметрах может наблюдаться повышение давления за системой сфер («освещенная» зона за второй сферой на рис. 3(а), так называемое пятно Пуассона [5]). При увеличении расстояния между сферами данная зона повышения давления увеличивается (рис. 3(б)). Кроме того, возможно появление зоны понижения давления («теньевая» зона между сферами на рис. 3(а)). При сравнении со случаем одиночной сферы (рис. 3(в)) видно, что данные зоны появляются благодаря наличию второй сферы.

На рис. 4 показано распределение давления для сфер с  $\chi = 1$  при различном расположении монополюсного источника излучения (для разных значений угла между осью координат  $Oz$  и осью, соединяющей центр первой сферы и монополюсный источник излучения,  $-\theta_s$ ) в плоскости  $x = 0$ . Здесь также наблюдается повышение давления в системе, например, зоны за большей сферой на рис. 4(а), между сферами на рис. 4(в) и за сферами на рис. 4(г). Видно также, что для значений  $\theta_s \neq 0^\circ$  отраженные от сфер волны сильно искажают окружающее поле и картина взаимодействия волн перестает быть симметричной.

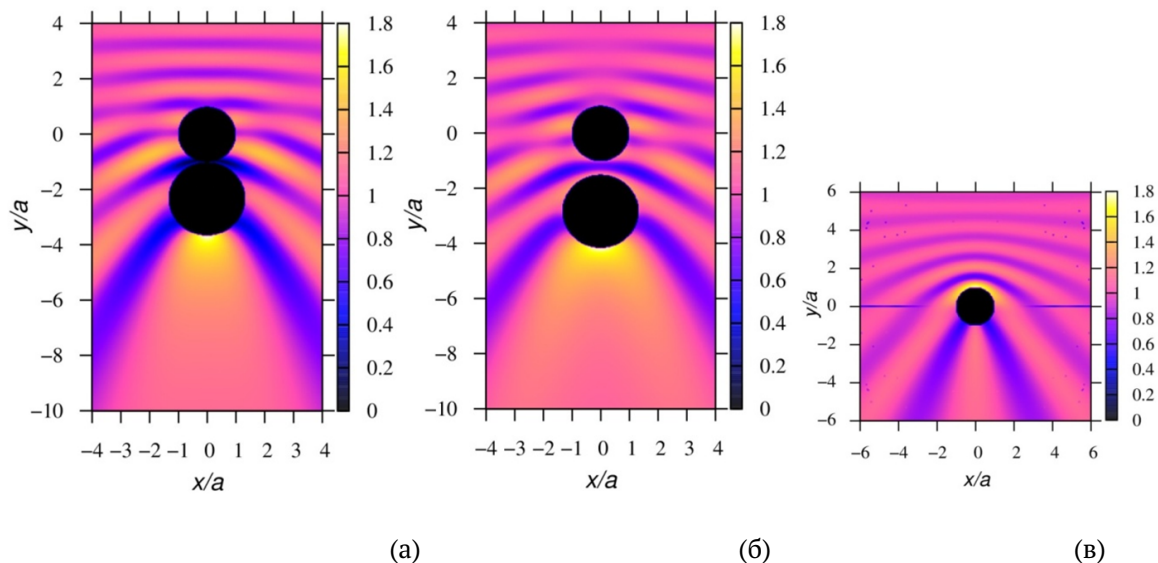


Рис. 3. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг звуконепроницаемых сфер в воздухе при монополюсном источнике излучения, расположенном сверху на одной оси с центрами сфер: (а) –  $\chi = 0$  (сферы соприкасаются в одной точке); (б) –  $\chi = 0.5a_1$  (сферы не соприкасаются); (в) – одиночная сфера радиуса  $a_1$

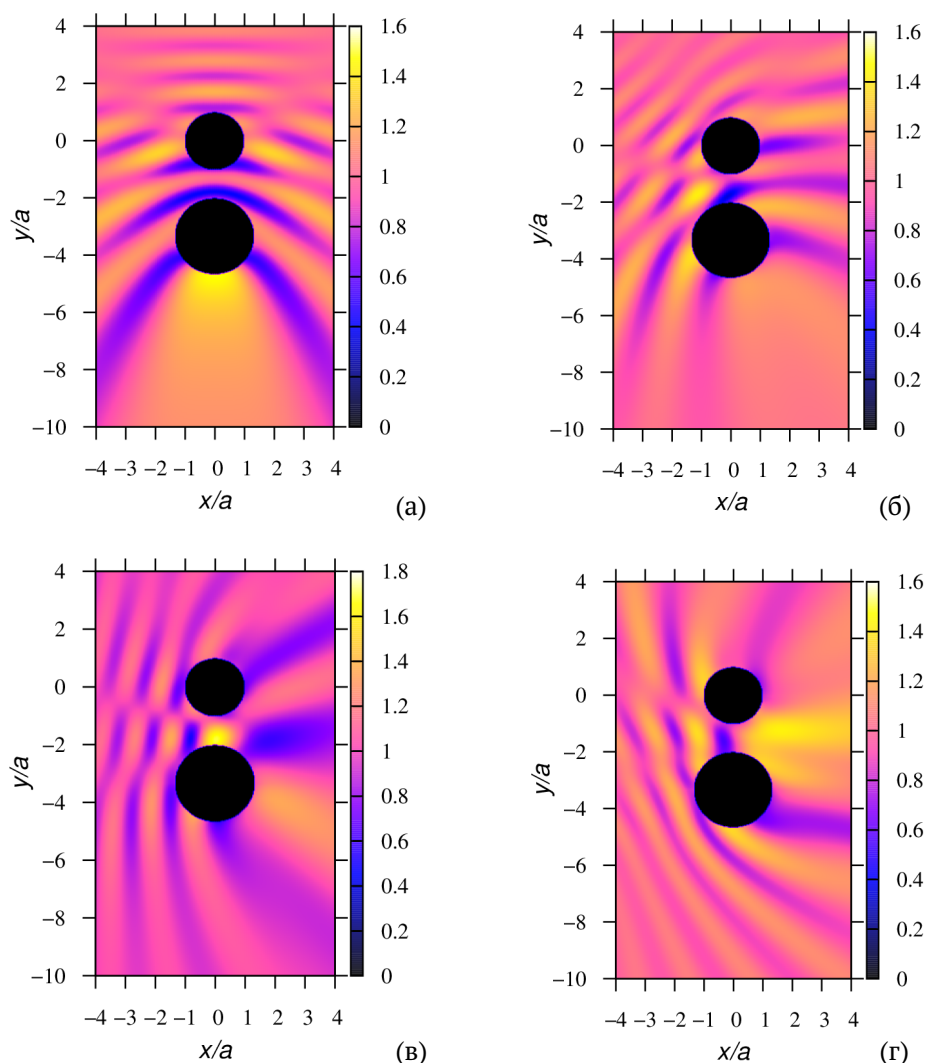


Рис. 4. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг звукопроницаемых сфер в воздухе для  $\chi = 1$  при различных расположениях монопольного источника излучения: (а) –  $\theta_s = 0^\circ$ ; (б) –  $\theta_s = 45^\circ$ ; (в) –  $\theta_s = 90^\circ$ ; (г) –  $\theta_s = 135^\circ$

#### 4. Заключение

В работе проведено исследование акустического рассеяния от пары сфер, при условии, что волна внутрь сфер не проходит, при прохождении сферической волны от монопольного источника излучения, произвольно расположенного в пространстве. Представлена методика разложения по мультиполям в случае произвольного акустического импеданса сфер в соответствии с работой [2] и проведено обобщение на случай произвольного расположения внешнего источника воздействия.

При тестировании алгоритма проведены расчеты функции отклика на поверхности одной из сфер для параметров, которые использовались при расчетах, проведенных в работе [2]. Тестирование

показало хорошее соответствие с известными расчетными данными.

Проведены расчеты распределения давления вокруг двух жестких сфер для различных значений расстояния между сферами и расположения монопольного источника излучения. Показано, что при определенных параметрах возможно как повышение, так и понижение давления в рассматриваемой системе.

В дальнейшем планируется проведение подробного параметрического анализа для более широкого диапазона параметров, а также для различных значений радиусов сфер, акустического импеданса и физических свойств окружающей среды и т.п.

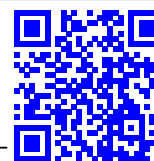
Полученная в настоящей работе численная мо-

дель позволит также провести обобщения и тестовые расчеты на случаи акустического рассеяния от пары звукопроницаемых (пузырьки или капли) сфер, множества как коаксиально расположенных, так и произвольно расположенных в пространстве сфер.

### Список литературы

- [1] Насибуллаева Э.Ш. Исследование рассеяния от звукопроницаемой одиночной сферы при внешнем воздействии // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 73–82.  
DOI: [10.21662/uim2017.1.011](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.011)
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, no. 6, P. 2688–2701.  
DOI: [10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253)
- [3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
- [4] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. NY: Wiley-Interscience, 1996. 717 p.
- [5] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.





## Investigation of acoustic scattering from a pair soundproof spheres under external influence

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

A mathematical model extension is presented and numerical studies were made for the problem of acoustic scattering from two soundproof spheres (the case of hard spheres) with an arbitrary acoustic impedance under the action a spherical wave from a monopole radiation source arbitrarily located in space. The case of two spheres is of practical interest, since, on the one hand, the scattered fields from the spheres interact with each other, and on the other hand, the interaction is simple enough for it to be studied in detail. When solving the Helmholtz equations, a numerical technique based on the fast multipole method is used, which allows to achieve high accuracy of the results obtained with minimal computer time. The testing of the algorithm was carried out on the basis of the known data (from the literature) of the response on the surface of one of the spheres in the case when the axis connecting the monopole radiation source and the center of the first sphere is perpendicular to the axis connecting the centers of the two spheres. The pressure distribution around the spheres is investigated for different values of the distance between the centers of the spheres and the arbitrary location of the monopole radiation source in space. It is shown that with certain parameters of the system, the presence of a second sphere can lead to the appearance of an increase or decrease zone of pressure. The obtained results will further allow generalizations of the mathematical model to the cases of acoustic scattering from a pair of sound-permeable spheres (cases of gas bubbles or liquid droplets) and many spheres (both coaxially and arbitrarily arranged in space), and can also be used for test calculations during verification numerical solution of these generalized problems.

**Keywords:** acoustic scattering, soundproof sphere, monopole radiation source, acoustic impedance

### References

- [1] Nasibullaeva E.Sh. [Investigation of scattering from soundproof single sphere under external influence]. *Trudy Instituta mekhaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN Multiphase systems* [Proceedings of the Institute of Mechanics. R.R. Mavlyutov Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences]. 2017. V. 12, No. 1. Pp. 73–82 (in Russian). DOI: 10.21662/uim2017.1.011
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. V. 112, No. 6. Pp. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [3] Korn G.A., Korn Th.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw Hill Book Company, 1968. 943 p.
- [4] Zhang S., Jin J. *Computation of special functions*. NY: Wiley-Interscience, 1996. 717 p.
- [5] Grinchenko V.T., Vovk I.V., Macyura V.T. [Osnovy akustiki] *Basics of acoustics*. K: Naukova Dumka, 2009. P. 867 (in Russian).