ISSN: 2658–5782

Номер 1 Январь–Март 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 1, с. 27–35

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.1.004
DOI: 10.21662/mfs2019.1.004
УДК 532.529

Получена: 14.03.2019
Принята: 26.03.2019

Аналитические исследования акустики суспензий[1]

Галимзянов М.Н., Шагапов В.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассмотрено одномерное нестационарное течение суспензии с учетом стандартных допущений для рассматриваемых задач: смесь монодисперсная, дробление и слипание частиц отсутствуют, вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия. Смесь полагается идеальной, частицы — абсолютно твердыми и имеющими сферическую форму, а жидкость — линейно сжимаемой. Учитывается сила трения, действующая на одну сферическую частицу. Решение исходной системы ищется в виде бегущей волны. На основе одномерных нестационарных уравнений течения жидкости с твердыми частицами выписаны дисперсионные соотношения, из которых получены формулы для фазовых скоростей. Получены формулы для коэффициента затухания от частоты возмущений. Установлено, что при низких частотах в зависимости от величины $\tilde{\rho}^0_{p0} = \rho^0_{p0}/\rho^0_{\ell 0}$ равновесная скорость может быть выше или ниже скорости звука в несущей фазе. Если дисперсная фаза тяжелее несущей фазы ($\tilde{\rho}^0_{p0} > 1$), то равновесная скорость превышает скорость звука. Это связано с тем, что при низких частотах, когда реализуется равновесность по скоростям, сжимаемость смеси происходит только за счет несущей фазы, а за счет содержания дисперсной фазы ($\tilde{\rho}^0_{p0} > 1$) смесь становится более тяжелой (инерционной). При $\tilde{\rho}^0_{p0} < 1$ смесь, наоборот, является более легкой, чем несущая фаза, и равновесная скорость становится выше, чем скорость звука. При высоких частотах величина скорости звука не зависит от $\tilde{\rho}^0_{p0}$ и равна скорости звука для несущей фазы.

Ключевые слова: акустическая волна, суспензия, дисперсионный анализ, фазовая скорость, декремент затухания, инкремент затухания

Введение

Суспензия (от лат. suspensio, подвешивание) — взвесь, в которой твердое вещество равномерно распределено в виде мельчайших частиц в жидком веществе во взвешенном (не осевшем) состоянии [1]. Суспензии находят применение в самых разных областях: от строительства глубоких скважин [2, 3] до пищевой промышленности [4]. Стоит также отметить широкое применение в медицине [5–7] и в сельском хозяйстве [8, 9].

Наиболее частыми способом получения суспензий является ультразвуковое воздействие на среду [10–12], но встречаются и механические способы [13].

Широкое использование суспензий влечет за собой определенные требования к ним в зависимости от области их применения. В научной литературе опубликовано достаточное количество статей, в которых описываются различные формы и способы воздействия на суспензии: лазерное [14], ультразвуковое [15, 16], электрохимическое [17], акустическое [18] и др.

Цель настоящей работы — вывод дисперсионных уравнений, описывающих движение акустической волны по суспензии, на основе которых выводятся формулы для фазовых скоростей. Результаты аналитического построения расширят знания в области механики многофазных систем и могут быть использованы для тестирования численных моделей.

[1]Работа поддержана средствами государственного бюджета по государственному заданию на 2019–2022 гг. (№ 0246-2019-0052).

1. Уравнение неразрывности

Рассмотрим двухфазную систему, когда дисперсная фаза представляет собой твердые частицы или жидкие капельки, а несущей фазой является газ или жидкость. При этом пусть скорости составляющих υ_i ($i = \ell, s$) различаются $\upsilon_\ell \neq \upsilon_s$. Здесь ℓ относится к жидкой фазе, а s — к твердым включениям. Для выявления основных принципиальных особенностей влияния межфазных взаимодействий в различных дисперсных системах на динамику акустических волн ограничимся лишь рассмотрением плоскооднородных возмущений. В соответствии с этим будем полагать, что все компоненты скорости, кроме одной, направленной по оси x, равны нулю. Кроме того, параметры, описывающие возмущенное движение, являются функциями времени и координаты x.

С учетом стандартных допущений для рассматриваемых задач имеют место следующие уравнения сохранения масс фаз и числа дисперсных частиц:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_i \upsilon_i = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \upsilon_s = 0, \tag{1}$$

где $\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i$, ρ_i и α_i — плотность и объемное содержание i-ой фазы; n — число включений в единице объема.

Можно ввести среднемассовую скорость υ:

$$\rho \upsilon = \rho_\ell \upsilon_\ell + \rho_s \upsilon_s, \quad \rho = \rho_\ell + \rho_s.$$

Складывая уравнение (1) по i, получим уравнения неразрывности для всей смеси в целом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \upsilon = 0.$$

Если учесть, что i-ая фаза несжимаема ($\rho_i^0 = \mathrm{const}$), то из (1) получим

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_i \upsilon_i = 0. \tag{2}$$

Если обе фазы несжимаемы, то складывая уравнения (2) по i и учитывая также, что $\alpha_\ell + \alpha_s = 1$, получим

$$\nabla(\alpha_\ell \upsilon_\ell + \alpha_s \upsilon_s) = 0.$$

Отсюда, в свою очередь, имеем

$$\alpha_\ell \upsilon_\ell + \alpha_s \upsilon_s = \upsilon(t).$$

Это выражение означает, что суммарный объемный расход двухфазной смеси с несжимаемыми составляющими при одномерном течении не зависит от координаты, т.е. для всех сечений расход одинаковый.

Пусть дисперсная фаза ($i = s$) представляет частицы с радиусом a. Если дробление и слияние частиц отсутствуют, то можем записать уравнение сохранения числа частиц

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \upsilon_s = 0. \tag{3}$$

Используя кинематическую связь

$$\alpha_s = \frac{4}{3}\pi a^3 n, \tag{4}$$

из уравнения (2) при $i = s$ с учетом (4) можем получить

$$\frac{d_s}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 0, \tag{5}$$

где $d_i/dt = \partial/\partial t + \upsilon_i \cdot \nabla$. Таким образом, уравнение неразрывности для дисперсной фазы в этом случае эквивалентно уравнению (5).

2. Уравнение импульсов

Примем гипотезу о том, что смесь в целом можно принять как идеальную. Тогда компоненты тензора напряжений для всей смеси можно представить в виде:

$$\sigma^{ke} = -p\delta^{ke},$$

где p — давление в смеси; δ^{ke} — символы Кронекера. Запишем уравнения импульсов для смеси в интегральной форме:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho_\ell \upsilon_\ell - \rho_s \upsilon_s) dV = \\ &= -\int_S (\rho_\ell \upsilon_\ell (\upsilon \cdot n) + \rho_s \upsilon_s (\upsilon_s \cdot n) dS - \\ &- \int_S pn dS + \int_V (\rho_\ell g_\ell + \rho_s g_s) dV. \end{aligned}$$

Здесь V — неподвижный объем в пространстве; S — его поверхность; g_i — удельномассовая сила. Применяя теорему Гаусса–Остроградского и проведя стандартные выкладки, получим уравнение импульсов для всей смеси в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\ell \upsilon_\ell + \rho_s \upsilon_s) + \nabla(\rho_\ell \upsilon_\ell \upsilon_\ell + \rho_s \upsilon_s \upsilon_s) &= \\ = -\nabla p + \rho_\ell g_\ell + \rho_s g_s&. \end{aligned} \tag{6}$$

Используя уравнения неразрывности (6), следует

$$\rho_\ell \frac{d_\ell \upsilon_\ell}{dt} + \rho_s \frac{d_s \upsilon_s}{dt} = -\nabla p + \rho_\ell g_\ell + \rho_s g_s. \tag{7}$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона для одной дисперсной частицы, находящейся в элементарной частице с коэффициентом x как

$$m_s \frac{d_s \upsilon_s}{dt} = f_{s\ell} + m g_s, \quad m_s = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_s^0, \tag{8}$$

где m_s — масса частицы; $f_{p\ell}$ — сила со стороны несущей фазы; верхний индекс «0» здесь и в дальнейшем означает истинное значение параметра.

Уравнение (8) умножим на n, тогда будем иметь:

$$\rho_s \frac{d_s \upsilon_s}{dt} = n f_{s\ell} + \rho_s g_s, \tag{9}$$
$$(\rho_s = n m_s = n \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_s^0 = \alpha_s \rho_s^0).$$

Из $f_{s\ell}$ выделим ту часть f_{A}, которая возникает даже в случае отсутствия движения дисперсных частиц относительно несущей фазы и тогда

$$f_{s\ell} = f_{\text{A}} + f.$$

Здесь f — часть силы со стороны несущей фазы, которая связана с относительным движением. Эту составляющую в дальнейшем будем называть силой трения. Составляющую f_{A} будем называть Архимедовой силой и примем в виде:

$$f_{\text{A}} = -\frac{4}{3}\pi a^3 \nabla p. \tag{10}$$

Вычитая из уравнения импульсов всей смеси (7) уравнение (9) с учетом (10), получим уравнение импульсов для несущей фазы

$$\rho_\ell \frac{d_\ell \upsilon_\ell}{dt} = -\alpha_\ell \nabla p - n f + \rho_\ell g_\ell. \tag{11}$$

Умножим скалярно уравнение (11) и (9) соответственно на υ_ℓ и υ_s. Тогда получим следующие уравнения для изменения кинетических энергий фаз:

$$\rho_\ell \frac{d_\ell}{dt}\frac{\upsilon_\ell^2}{2} = -\alpha_\ell (\upsilon_\ell \cdot \nabla) p - n(f \cdot \upsilon_\ell) + \rho_\ell (g_\ell \cdot \upsilon_\ell), \tag{12}$$

$$\rho_s \frac{d_s}{dt}\frac{\upsilon_s^2}{2} = -\alpha_s (\upsilon_s \cdot \nabla) p - n(f \cdot \upsilon_s) + \rho_s (g_s \cdot \upsilon_s), \tag{13}$$

где $\upsilon_i^2 = \upsilon_i \cdot \upsilon_i$. Здесь $\upsilon_i^2/2$ — удельномассовая кинетическая энергия i-ой фазы.

3. Уравнение энергии

Введем удельномассовую полную энергию фаз как

$$E_i = \frac{\upsilon_i^2}{2} + e_i, \quad (i = \ell, s), \tag{14}$$

где e_i — удельная внутренняя энергия.

Запишем уравнение для изменения полной энергии смеси, находящейся в неподвижном объеме V ограниченном поверхностью S:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V \left(\rho_\ell \left(\frac{\upsilon_\ell^2}{2} + e_\ell \right) + \rho_s \left(\frac{\upsilon_s^2}{2} + e_s \right) \right) dV = \\
= \int\limits_S \left(\rho_\ell \left(\frac{\upsilon_\ell^2}{2} + e_\ell \right) (\upsilon_\ell \cdot n) + \right. \\
\left. + \rho_s \left(\frac{\upsilon_s^2}{2} + e_s \right) (\upsilon_s \cdot n) \right) dS - \\
- \int\limits_S p(\alpha_\ell (\upsilon_\ell \cdot n) + \alpha_s (\upsilon_s \cdot n)) dS + \\
+ \int\limits_V (\rho_\ell (g_\ell \cdot \upsilon_\ell) + (\rho_s g_s \cdot \upsilon_s)) dV.
\end{gathered} \tag{15}$$

В этом уравнении первое слагаемое в правой части выражает изменение энергии в объеме за счет течения через его поверхность, а второе и третье слагаемые выражают работу сил давления и массовых сил. При записи этого уравнения пренебрегалось теплопроводностью и наличием объемных источников тепла. Применяя теорему Гаусса-Остроградского, из (15) можно получить уравнение для изменения полной энергии в дифференциальной форме

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_\ell \left(\frac{\upsilon_\ell^2}{2} + e_\ell \right) + \rho_s \left(\frac{\upsilon_s^2}{2} + e_s \right) \right) + \\
+ \nabla \left(\rho_\ell \left(\frac{\upsilon_\ell^2}{2} + e_\ell \right) \upsilon_\ell + \rho_s \left(\frac{\upsilon_s^2}{2} + e_s \right) \upsilon_s \right) = \\
= -\nabla p(\alpha_\ell \upsilon_\ell + \alpha_s \upsilon_s) + \\
+ \rho_\ell (g_\ell \cdot \upsilon_\ell) + \rho_s (g_s \cdot \upsilon_s),
\end{gathered}$$

которое с учетом уравнений неразрывности (1) можно привести к виду:

$$\begin{gathered}
\rho_\ell \frac{d_\ell}{dt} \left(\frac{\upsilon_\ell^2}{2} + e_\ell \right) + \rho_s \frac{d_s}{dt} \left(\frac{\upsilon_s^2}{2} + e_s \right) = \\
= \nabla p(\alpha_\ell \upsilon_\ell + \alpha_s \upsilon_s) + \rho_\ell (g_\ell \cdot \upsilon_\ell) + \rho_s (g_s \upsilon_s).
\end{gathered} \tag{16}$$

Полагая дисперсную фазу несжимаемой, запишем для одной частицы уравнение для изменения внутренней энергии (уравнение первого начала термодинамики)

$$m_s \frac{d_s e_s}{dt} = q. \tag{17}$$

Здесь q — интенсивность поступления тепла к частице от несущей фазы. Умножив уравнение (17) на число частиц n в единице объема, получим:

$$\rho_s \frac{d_s e_s}{dt} = nq. \tag{18}$$

Из уравнения (16) вычтем уравнения (13), (14) и (18). Тогда, после некоторых преобразований, можем получить:

$$\rho_\ell \frac{d_\ell e_\ell}{dt} = -p\nabla(\alpha_\ell \upsilon_\ell + \\ +\alpha_s \upsilon_s) + n(g \cdot (\upsilon_\ell - \upsilon_s)) - nq. \tag{19}$$

Для дальнейшего упрощения (19) запишем уравнение вида (2) для несжимаемой дисперсной фазы

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \nabla \alpha_s \upsilon_s = 0. \tag{20}$$

Из уравнения неразрывности для первой фазы после подстановки $\rho_\ell = \rho_\ell^0 \alpha_\ell$ следует

$$\frac{\partial \alpha_\ell}{\partial t} + \nabla(\alpha_\ell \upsilon_\ell) = -\frac{\alpha_\ell}{\rho_\ell^0} \frac{d_\ell \rho_\ell^0}{dt}. \tag{21}$$

Складывая уравнения (20) и (21), учитывая при этом, что $\alpha_\ell + \alpha_s = 1$, будем иметь:

$$\nabla(\alpha_\ell \upsilon_\ell + \alpha_s \upsilon_s) = -\frac{\alpha_\ell}{\rho_\ell^0} \frac{d_\ell \rho_\ell^0}{dt}.$$

Подставляя это выражение в (20), получим уравнение для изменения внутренней энергии несущей фазы в более привычной форме:

$$\rho_\ell \frac{d_\ell e_\ell}{dt} = \frac{\alpha_\ell p}{\rho_\ell^0} \frac{d_\ell \rho_\ell^0}{dt} + n(f \cdot (\upsilon_\ell - \upsilon_s)) - nq. \tag{22}$$

Здесь f — сила трения, первое слагаемое в правой части выражает работу сил давления, второе — приток тепла за счет межфазного трения, третье — отток тепла в дисперсную фазу.

Система из вышеполученных уравнений неразрывности (1) и (3), импульсов (9) и (12), энергии (18) и (22), вообще говоря, незамкнута, т.е количество уравнений меньше числа входящих в эти уравнения неизвестных функций.

При течении таких систем температурные неравновесности обычно несущественны. Это обстоятельство избавляет от привлечения уравнений энергии для теоретического анализа. В акустических процессах для замыкания системы из уравнений масс и импульсов, помимо гипотезы о несжимаемости дисперсной фазы, примем уравнение состояния несущей жидкости в акустическом приближении

$$\rho_\ell^0 = \rho_{\ell 0}^0 + (p - p_0)/C_\ell^2. \tag{23}$$

Здесь нижний индекс «0» здесь и в дальнейшем означает значение параметра в исходном состоянии, соответствующее значению давления p_0; C_ℓ — величины скорости звука для несущей фазы. В дальнейшем будем считать, что давление в фазах равны $p_\ell = p_s = p$ и, кроме того, вместо $p_{\ell 0}$ и p_{s0} примем одно и тоже значение давления p_0 $(p_{\ell 0} = p_{p0} = p_0)$. Вместо p_0 будем использовать значение давления для некоторого исходного равновесного состояния.

Здесь и в дальнейшем параметры с дополнительным индексом «0» внизу соответствуют некоторому состоянию равновесия, а параметры без этого индекса — возмущению относительно этого состояния.

4. Сила трения

Сила трения, действующая на одну сферическую частицу, в наиболее общем виде задается как сумма сил присоединеной массы, Стокса и Бассэ:

$$f = f^{(m)} + f^{(S)} + f^{(B)},$$

где

$$f^{(m)} = \frac{2\pi a^3}{3} \rho_\ell^0 \left(\frac{d_\ell \upsilon_\ell}{dt} - \frac{d_s \upsilon_s}{dt} \right),$$
$$f^{(S)} = 6\pi a \rho_\ell^0 \nu_\ell^{(\mu)} (\upsilon_\ell - \upsilon_s),$$
$$f^{(B)} = 6\pi a^2 \rho_\ell^0 \sqrt{\frac{\nu_\ell^{(\mu)}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\frac{d_\ell \upsilon_\ell}{d\tau} - \frac{d_s \upsilon_s}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}}.$$

Здесь $\nu_\ell^{(\mu)} = \mu_\ell / \rho_\ell^0$, μ_ℓ, $\nu_\ell^{(\mu)}$ — соответственно коэффициенты динамической и кинематической вязкостей для несущей фазы.

5. Акустика суспензий

Как уже отмечалось, будем считать, что частицы являются абсолютно твердыми и имеют сферическую форму, а несущая фаза — линейно сжимаемая жидкость с уравнением состояния (23). Тогда, из уравнений неразрывности (1) с учетом уравнения состояния можем получить

$$\frac{(1-\alpha_{s0})}{C_\ell^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_{\ell 0}^0 (1-\alpha_{s0}) \frac{\partial \upsilon_\ell}{\partial x} + \\ + \rho_{s0}^0 \alpha_{s0} \frac{\partial \upsilon_s}{\partial x} = 0. \tag{24}$$

Запишем также в линеаризированном приближении уравнение импульсов для всей смеси в целом при отсутствии массовых сил:

$$\rho_{\ell 0}^0 (1-\alpha_{s0}) \frac{\partial \upsilon_\ell}{\partial t} + \rho_{s0}^0 \alpha_{s0} \frac{\partial \upsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{25}$$

Из всех сил, действующих на частицу, наиболее существенной является сила Стокса. Оставляя только эту силу, из уравнения импульсов для дисперсной фазы будем иметь:

$$\frac{\partial \upsilon_s}{\partial t} = \frac{\upsilon_s - \upsilon_\ell}{t^{(\upsilon)}}, \tag{26}$$

$$t^{(\upsilon)} = \frac{2}{9}\frac{\tilde{\rho}^0_{s0} a^2}{\nu^{(\mu)}_\ell}, \quad \tilde{\rho}^0_{s0} = \frac{\rho^0_{s0}}{\rho^0_{\ell 0}}.$$

Параметр $t^{(\upsilon)}$ выражает время релаксации скоростной неравновесности.

Полученные уравнения (24)–(26) образуют замкнутую систему для $\upsilon_\ell, \upsilon_s$ и p. В случае отсутствия частиц ($\alpha_{s0} = 0$) из этих уравнений следуют обычные волновые уравнения:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = C^2_\ell \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \upsilon_\ell}{\partial t^2} = C^2_\ell \frac{\partial^2 \upsilon_\ell}{\partial x^2}. \tag{27}$$

6. Дисперсионный анализ

Для дальнейшего упрощения уравнений полагаем, что объемное содержание дисперсной фазы мало ($\alpha_s << 1$). Тогда, пренебрегая α_{s0} по сравнению с единицей, из (24) и (25) получим:

$$\rho^0_{\ell 0} C^2_\ell \left(\frac{\partial \upsilon_\ell}{\partial x} + \alpha_{s0}\tilde{\rho}^0_{s0}\frac{\partial \upsilon_s}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \tag{28}$$

$$\rho^0_{\ell 0} \left(\frac{\partial \upsilon_\ell}{\partial x} + \alpha_{s0}\tilde{\rho}^0_{s0}\frac{\partial \upsilon_s}{\partial t}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{29}$$

Решение системы из уравнений (27), (28) и (29) будем искать в виде действительной части следующего комплексного выражения

$$\mathrm{W} = \mathrm{A}\exp\left[i(\mathrm{K}x - \Omega t)\right]. \tag{30}$$

где вектор $\mathrm{A}(\mathrm{A}^{(s)}, \mathrm{A}^{(\upsilon)}_\ell, \mathrm{A}^{(\upsilon)}_s)$ определяет амплитуды возмущений $\mathrm{W}(p, \upsilon_\ell, \upsilon_s)$; K и Ω — комплексные волновое число и частота возмущений. Подставляя (30) в полученные уравнения и сокращая на $\exp\left[i(\mathrm{K}x - \Omega t)\right]$, получим линейную однородную систему уравнений для амплитуд возмущений:

$$\mathrm{A}^{(\upsilon)}_\ell + (i\Omega t^{(\upsilon)} - 1)\mathrm{A}^{(\upsilon)}_s = 0, \tag{31}$$

$$\rho^0_{\ell 0} C^2_\ell \mathrm{K}(\mathrm{A}^{(\upsilon)}_\ell + \alpha_{s0}\mathrm{A}^{(\upsilon)}_s) - \Omega \mathrm{A}^{(s)} = 0, \tag{32}$$

$$\rho^0_{\ell 0}\Omega(\mathrm{A}^{(\upsilon)}_\ell + \alpha_{s0}\tilde{\rho}^0_{s0}\mathrm{A}^{(\upsilon)}_s) - \mathrm{K}\mathrm{A}^{(p)} = 0. \tag{33}$$

Введем коэффициент скольжения фаз как

$$k^{(\upsilon)} = \mathrm{A}^{(\upsilon)}_s / \mathrm{A}^{(\upsilon)}_\ell. \tag{34}$$

Тогда из (31) следует, что

$$k^{(\upsilon)} = \frac{1}{1 - i\Omega t^{(\upsilon)}}.$$

Уравнения (32) и (33) с учетом (34) запишутся

$$\rho^0_{\ell 0} C^2_\ell \mathrm{K}(1 + \alpha_{s0} k^{(\upsilon)})\mathrm{A}^{(\upsilon)}_\ell - \Omega \mathrm{A}^{(s)} = 0, \tag{35}$$

$$\rho^0_{\ell 0}\Omega(1 + \alpha_{s0}\tilde{\rho}^0_{s0} k^{(\upsilon)})\mathrm{A}^{(\upsilon)}_\ell - \mathrm{K}\mathrm{A}^{(s)} = 0. \tag{36}$$

Исключая из уравнений (35) и (36) $\mathrm{A}^{(\upsilon)}_\ell$, будем иметь

$$\begin{gathered}\left(\mathrm{K}^2 C^2_\ell \left(1 + \alpha_{s0} k^{(\upsilon)}\right) - \right.\\ \left. -\Omega^2\left(1 + \alpha_{s0}\tilde{\rho}^0_{s0} k^{(\upsilon)}\right)\right)\mathrm{A}^{(s)} = 0.\end{gathered} \tag{37}$$

Чтобы уравнение (37) имело нетривиальное решение ($\mathrm{A}^{(s)} \neq 0$), получим дисперсионное уравнение, связывающее волновое число с частотой:

$$\mathrm{K}^2 = \frac{\Omega^2}{C^2_\ell}\frac{1 + \alpha_{s0}\tilde{\rho}^0_{s0} k^{(\upsilon)}}{1 + \alpha_{s0} k^{(\upsilon)}}. \tag{38}$$

Если известна частота $\Omega = \omega$, причем $\omega > 0$, то на основе (38) можно определить два комплексных волновых числа

$$\mathrm{K} = \pm(k + i\delta). \tag{39}$$

Из (39) выберем одно решение, для которого действительная часть волнового числа положительна ($\mathrm{Re}(\mathrm{K}) > 0$). Тогда на основе решений вида (30) можно рассмотреть следующую граничную задачу. Пусть на границе полубесконечной области ($0 < x < \infty$) давление меняется по закону.

$$p = \mathrm{A}^{(p)}\cos(\omega t). \tag{40}$$

Здесь $\mathrm{A}^{(s)}$ — амплитуда, действительное число. Решение вышеприведенной системы, удовлетворяющее условию (40) при $x = 0$, можем искать в виде:

$$p = \mathrm{Re}(\mathrm{A}^{(s)} e^{i(\mathrm{K}x - \omega t)}).$$

Подставляя сюда волновое число в виде (39) и учитывая при этом, что $k > 0$, получим формулу:

$$p = \mathrm{A}^{(s)} e^{-\delta x}\cos k(x - C_s t), \quad C_s = \omega / k, \tag{41}$$

которая описывает затухающую бегущую волну со скоростью C_s, зависящую от частоты ω. Параметр C_s называется фазовой скоростью. Величина, обратная коэффициенту затухания δ, определяет характерное расстояние, на котором амплитуда колебаний возмущений уменьшается в **e** раз. Поэтому длину $x_\delta = 1/\delta$ будем называть глубиной проникания акустических возмущений, имеющих частоту ω.

Если же считать известным волновое число $K = k$, $k > 0$, то (38) является уравнением относительно комплексной частоты $\Omega = \omega + ib$, где b — мнимая часть комплексной частоты. Если $b < 0$, то коэффициент равный $(-b)$ называется декрементом затухания, если же $b > 0$, то коэффициент (b) называется инкрементом. В этом случае решения вида (30) описывает эволюцию возмущений («k»-волны), которые в начальный момент времени $(t = 0)$ в объеме $(-\infty < x < \infty)$ распределены по гармоническому закону. Возмущения, соответствующие (30), когда известна ω, будем называть «ω»-волной. Проанализируем дисперсионное уравнение (38) для «ω»-волн, причем рассмотрим волны вида (41), распространяющиеся направо. Для таких волн на основе (38) можем записать:

$$K = \frac{\omega}{C_\ell}\sqrt{\frac{1+\alpha_{p0}\tilde{\rho}^0_{p0}k^{(v)}}{1+\alpha_{p0}k^{(v)}}},\quad k^{(v)} = \frac{1}{1-i\omega t^{(v)}}. \tag{42}$$

Отсюда видно, что если дисперсная фаза обладает нейтральной плавучестью ($\tilde{\rho}^0_{s0} = 1$) то $C_s = C_\ell$ и $\delta = 0$. Таким образом, для этого случая, в рамках принятого приближения при $\alpha_{s0} << 1$, наличие взвешенной фазы не приведет к дисперсии при распространении малых возмущений.

В двух предельных случаях, когда $\omega \to 0$ и $\omega \to \inf$ (при этом $k^{(v)} \to 1$ и $k^{(v)} \to 0$) для фазовой скорости получим соответственно

$$C_e = C_\ell\sqrt{\frac{1+\alpha_{s0}}{1+\alpha_{s0}\tilde{\rho}^0_{s0}}},\quad C_f = C_\ell.$$

Здесь C_e и C_f — называются равновесной и замороженной скоростями звука. Видно, что в первом случае ($\omega \to 0$) несущая и дисперсная фаза движутся с одинаковыми скоростями за счет сил трения. В зависимости от величины $\tilde{\rho}^0_{p0}$ равновесная скорость может быть выше или ниже скорости звука в несущей фазе. Если дисперсная фаза тяжелее несущей фазы ($\tilde{\rho}^0_{s0} > 1$), то равновесная скорость превышает C_e. Это связано с тем, что при низких частотах, когда реализуется по скоростям равновесность, сжимаемость смеси происходит только за счет несущей фазы, а за счет содержания дисперсной фазы при $\tilde{\rho}^0_{s0} > 1$ смесь становится более тяжелой (инерционной). При $\tilde{\rho}^0_{s0} < 1$ смесь, наоборот, является более легкой, чем несущая фаза, и величина равновесной скорости становится выше, чем C_e. При высоких частотах ($\omega \to \infty$) имеет место $k^{(v)} \to 0$ (частицы становятся неподвижными). Величина скорости звука в этом случае не зависит от $\tilde{\rho}^0_{s0}$ и равна скорости звука для несущей фазы. Из выражения (42) для $k^{(v)}$ следует, что всегда выполняется условие $\left|k^{(v)}\right| < 1$.

Пусть для дисперсной системы, помимо условия $\alpha_{s0} << 1$, выполняется соотношение $\tilde{\rho}^0_{s0}\alpha_{s0} << 1$. Тогда из дисперсионного уравнения (42) следует

$$K = \frac{\omega}{C_\ell}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha_{s0}(\tilde{\rho}^0_{s0} - 1)k^{(v)}\right).$$

Отсюда для низких $\left(t^{(v)}\omega << 1\right)$ и высоких $\left(t^{(v)}\omega >> 1\right)$ частот получим:

$$C_s = C_\ell\left(1 - \frac{1}{2}\alpha_{s0}\left(\tilde{\rho}^0_{s0} - 1\right)\right)$$
$$\text{при}\quad \delta = \frac{\alpha_{s0}\left(\tilde{\rho}^0_{s0} - 1\right)t^{(v)}\omega^2}{2C_\ell},$$
$$C_s = C_\ell$$
$$\text{при}\quad \delta = \frac{\alpha_{s0}\left(\tilde{\rho}^0_{s0} - 1\right)}{C_\ell t^{(v)}}.$$

Отметим, что полученные приближенные формулы справедливы лишь при $\tilde{\rho}^0_{s0} >> 1$. Если же истинные плотности фаз близки или же истинная плотность дисперсной фазы ниже истинной плотности несущей фазы, то для межфазного силового взаимодействия необходимо учитывать также силы Архимеда и присоединенных масс.

Заключение

Исследовано одномерное нестационарное течение суспензии. На основе одномерных нестационарных уравнений течения жидкости с твердыми частицами с учетом стандартных допущений для рассматриваемых задач выписаны дисперсионные соотношения и получены формулы для скоростей фаз. Выписаны формулы для зависимости коэффициента затухания от частоты возмущений. Установлено, что при низких частотах в зависимости от величины $\tilde{\rho}^0_{s0} = \rho^0_{s0}/\rho^0_{\ell 0}$ равновесная скорость может быть выше или ниже скорости звука в несущей фазе. Если дисперсная фаза тяжелее несущей фазы ($\tilde{\rho}^0_{s0} > 1$), то равновесная скорость превышает скорость звука. При $\tilde{\rho}^0_{p0} < 1$ смесь, наоборот, является более легкой, чем несущая фаза, и величина равновесной скорости становится выше, чем скорость звука. При высоких частотах величина скорости звука не зависит от $\tilde{\rho}^0_{s0}$ и равна скорости звука для несущей фазы.

Список литературы

[1] Шиц Л.А. Суспензии. М.: Советская энциклопедия, 1976. — (Большая советская энциклопедия: [в 30 т.] / гл. ред. А.М. Прохоров; 1969–1978, т. 25).

[2] Ганиев С.Р. Исследование и разработка энергосберегающих технологий приготовления и гомогенизации буровых и тампонажных растворов, основанных на эффектах волновой механики: Диссерт. … канд. тех. наук: 05.02.13 / Ганиев Станислав Ривнерович. Москва, 2010. 196 с.
https://elibrary.ru/item.asp?id=19220357

[3] Ганиев С.Р., Кузнецов Ю.С. Влияние волновой обработки на технологические характеристики тампонажного раствора в процессах разобщения пластов нефтяных и газовых скважин // Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море. 2019. № 2. С. 29–34.
DOI: 10.30713/0130-3872-2019-2-29-34

[4] Руськина А.А., Попова Н.В., Руськин Д.В. Модификация крахмала с помощью ультразвукового воздействия как инструмент изменения его технологических характеристик // Вестник южно-уральского государственного университета. Серия: Пищевые и биотехнологии. 2018. Т. 6, № 1. С. 69–76.
DOI: 10.14529/food180108

[5] Белов С.В., Данилейко Ю.К., Осико В.В., Салюк В.А. Суспензия водная для лазерного управляемого ударно-волнового воздействия на кожные покровы и слизистые оболочки // Медицинская техника. 2017. № 6. С. 43–45.
DOI: 10.1007/s10527-017-9660-4

[6] Макеева И.М., Семенов А.М., Бякова С.Ф., Новожилова Н.Е., Дежурко-Король В.А. Оценка эффективности растворов для поверхностной стерилизации бычьих зубов, инфицированных суспензией escherichia coli // IV международная научная конференция SCIENCE, TECHNOLOGY AND LIFE: сборник трудов (24–25 декабря 2017). Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов. 2018. С. 464–469.

[7] Журавлева И.Е., Котова Е.Ю., Серегина Е.К. Изучение острой, хронической токсичности и безопасности применения суспензии магнитных наночастиц оксида железа в эксперименте на животных // XX Областного конкурса научно-исследовательских работ «Научный Олимп» по направлению «Естественные науки»: сборник статей. Москва.: ООО «Эдитус». 2018. С. 126–130.
https://elibrary.ru/item.asp?id=35342112

[8] Ермагамбет Б.Т., Нургалиев Н.У., Касенова Ж.М., Зикирина А.М., Абылгазина Л.Д. Эффективность использования кавитационного диспергирования угольной суспензии для получения гуминовых удобрений // Наука, техника и образование. 2016. № 10(28). С. 37–39.
https://elibrary.ru/item.asp?id=27196414

[9] Осипова Е.А., Лебедев С.В., Каныгина О.Н., Короткова А.М. Оценка изменения содержания токсичных элементов (Pb, As, Hg, Cd) в надземной части пшеницы Triticum vulgare vill под воздействием вносимой в почву водной суспензии гуминовых кислот с различными формами железа // Вестник российского университета дружбы народов. Серия: Экология и безопасность жизнедеятельности. 2018. Т. 26, № 2. С. 195–206.
DOI: 10.22363/2313-2310-2018-26-2-195-206

[10] Самойлов В.М., Николаева А.В., Данилов Е.А., Ерпулева Г.А., Трофимова Н.Н., Абрамчук С.С., Понкратов К.В. Получение водных суспензий графена под воздействием ультразвука в присутствии фторсодержащего ПАВ // Неорганические материалы. 2015. Т. 51, № 2. С. 137–145.
DOI: 10.7868/S0002337X15010169

[11] Гордеев В.В., Казутин М.В., Козырев Н.В. Определение предпочтительных параметров ультразвукового воздействия при изготовлении нанотермита AL/CUO // Южно-сибирский научный вестник. 2017. № 4(20). С. 121–125.
https://elibrary.ru/item.asp?id=32244971

[12] Колесниченко Н.В., Яшина О.В., Ежова Н.Н., Бондаренко Г.Н., Хаджиев С.Н. Нанодисперсные суспензии цеолитов — катализаторы конверсии диметилового эфира в олефины // Журнал физической химии. 2018. Т. 92, № 1. С. 115–121.
DOI: 10.7868/S0044453718010120

[13] Колесниченко Н.В., Ежова Н.Н., Яшина О.В. Формирование наночастиц цеолита типа MFI и суспензий на его основе // Нефтехимия. 2016. Т. 56, № 6. С. 37–39.
DOI: 10.7868/S0028242116060113

[14] Михеев К.Г., Михеев Г.М., Могилева Т.Н., Кузнецов В.Л., Мосеенков С.И., Шуваева М.А. Лазерная модификация оптических свойств суспензий углеродных наноматериалов // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39, № 7. С. 43–50.
http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/12844

[15] Антошкина Е.Г., Смолко В.А. Влияние ультразвуковой обработки на вязкость водно-глинистых суспензий для песчано-глинистых смесей // Вестник южно-уральского государственного университета. Серия: Металлургия. 2015. Т. 15, № 1. С. 11–16.
https://elibrary.ru/item.asp?id=23286920

[16] Малая Е.В. Влияние ультразвуковой обработки водных суспензий магнитотвёрдых ферритов // Инновационные процессы в науке и образовании: сборник статей. Пенза: «Наука и Просвещение». 2017. С. 157–167.
https://elibrary.ru/item.asp?id=29049225

[17] Бунин И.Ж., Рязанцева М.В., Самусев А.Л., Хабарова И.А. Теория и практика применения комбинированных физико-химических и энергетических воздействий на геоматериалы и водные суспензии // Горный журнал. 2017. № 11. С. 77–83.
DOI: 10.17580/gzh.2017.11.14

[18] Курнеев Я.А., Шарендо Н.А., Рубаник В.В., Рубаник В.В., Шилин А.Д., Белоус Н.Х., Родцевич С.П., Шилина М.В. Исследование влияния акустического воздействия на шунгитовые суспензии // 50-я Международная научно-технической конференции преподавателей и студентов, посвященной году науки: материалы докладов (12–13 апреля 2017). Витебск: Витебский государственный технологический университет. 2017. С. 343–345.
https://elibrary.ru/item.asp?id=30073379

ISSN 2658–5782 14 (2019), 1, 27–35

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.1.004
DOI: 10.21662/mfs2019.1.004

Received: 14.03.2019
Accepted: 26.03.2019

Analytical studies of suspension acoustics

Galimzyanov M.N., Shagapov V.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

The one-dimensional unsteady flow of the suspension is considered taking into account the standard assumptions for this problems: the mixture is monodisperse, there is no crushing and sticking of particles, viscosity and thermal conductivity are essential only in the process of interfacial interaction. The mixture supposed perfect. The particles are taken absolutely solid and spherical, and the liquid is linearly compressible. The frictional force acting on a single spherical particle is taken into account. The solution to the original system is sought in the form of a traveling wave. On the basis of one-dimensional unsteady equations of fluid flow with solid particles dispersion relations are written out and formulas for phase velocities are derived. Formulas for the attenuation coefficient of the perturbation frequency are got. It has been established that at low frequencies, depending on the magnitude of $\tilde{\rho}^0_{p0} = \rho^0_{p0}/\rho^0_{\ell 0}$ the equilibrium speed can be higher or lower than the speed of sound in the carrier phase. If the dispersed phase is heavier than the carrier phase $(\tilde{\rho}^0_{p0} > 1)$, then the equilibrium velocity exceeds the speed of sound. This is due to the fact that at low frequencies, when velocity equilibrium is realized, the compressibility of the mixture occurs only owing to the carrier phase, and the mixture becomes heavier (inertial) because of the content of the dispersed phase at $(\tilde{\rho}^0_{p0} > 1)$. When $(\tilde{\rho}^0_{p0} < 1)$, the mixture in contrast is lighter than the carrier phase, and the equilibrium velocity becomes higher than the speed of sound. At high frequencies the sound velocity does not depend on $\tilde{\rho}^0_{p0}$ and is equal to the sound velocity for the carrier phase.

Keywords: acoustic wave, suspension, dispersion analysis, phase velocity, damping factor, damping increment

References

[1] Shus L.A. [Suspension] *Suspenzii* M.: Soviet Encyclopedia, 1976. — (Great Soviet Encyclopedia: [in 30 vol.] / Ch. Ed. AM Prokhorov; 1969–1978, vol. 25) (in Russian)

[2] Ganiev S.R. [Research and development of energy-saving technologies for the preparation and homogenization of drilling and cement slurries based on the effects of wave mechanics] Issledovanie i razrabotka energosberegayushhix texnologij i gomogenizatsiya byrovyx i tamponaghnyx rastvorov, osnovannix na effektax volnovoj mexaniki. Ph.D. Dis. Moscow, 2010. P. 196 (in Russian)

[3] Ganiev S.R., Kuznetsov Yu.S. The effect of wave treatment on the technological characteristics of a cement slurry during the process of formations isolation in oil and gas wells // Construction of oil and gas wells on land and at sea. 2019. 2. P. 29–34 (in Russian).
DOI: 10.30713/0130-3872-2019-2-29-34

[4] Ruskina A.A., Popova N.V., Ruskin D.V. Starch modification by using ultrasonic exposure as a tool for changing its technological characteristics // Bulletin of South Ural State University, Series «Food and Biotechnology». 2018. V. 6, No 1. Pp. 69–76 (in Russian).
DOI: 10.14529/food180108

[5] Belov S.V., Danyleiko Y.K., Ezhov V.V., Elkanova E.E., Salyuk V.A. Laser Shock-Wave Destruction of the Mucous Membrane and Skin Tissues as a Method of Treatment of Pathological Processes in Gynecology // Biomedical Engineering. 2017. V. 50, No. 6. Pp. 380–384.
DOI: 10.1007/s10527-017-9660-4

[6] Makeeva I.M., Semenov A.M., Byakova S.F., Novozhilova N.E., Dezhurko-Corol' V.A. [Evaluation of the effectiveness of solutions for the surface sterilization of bovine teeth infected with a suspension escherichia coli] *IV International scientific conference SCIENCE, TECHNOLOGY AND LIFE: proceedings of articles* [IV Mezhdunarodnaya nauchnaya konferenciya SCIENCE, TECHNOLOGY AND LIFE: sbornik trudov]. Kirov: International Center for Research Projects. 2018. P. 464–469 (in Russian).

[7] Zhuravleva I., Kotova E., Seregina E. Assessment of the acuye, chronic toxicity and application safety of the iron oxide nanoparticles suspension fe3o4 by the different route of introduction to experimental animals // XX Regional competition of research works «Scientific Olympus» in the direction «Natural sciences»: Proceedings of articles. Moscow: LLK «Editus». 2018. Pp. 126–130 (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=35342112

[8] Yermagambet B.T., Nurgaliyev N.U., Kasenova Zh.M., Zikirina A.M., Abylgazina L.D. [Efficiency of using cavitation dispersion of coal suspension to obtain humic fertilizers] *Nauka, Texnika i obrazovanie* [Science, equipment and education]. 2016. No. 10(28). Pp. 37–39 (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=27196414

[9] Osipova E.A., Lebedev S.V., Kanygina O.N., Korotkova A.M. Assessment of changes in the content of toxic elements (Pb, As, Hg, Cd) in aboveground parts of wheat Triticum vulgare Vill under the influence of insertion into the soil an aqueous suspension of humic acids with different forms of iron // RUDN Journal of Ecology and Life Safety. 2018. V. 26, No 2. Pp. 195–206 (in Russian).
DOI: 10.22363/2313-2310-2018-26-2-195-206

[10] Samoilov V.M., Nikolaeva A.V., Danilov E.A., Erpuleva G.A., Trofimova N.N., Abramchuk S.S., Ponkratov K.V. Preparation of aqueous graphene suspensions by ultrasonication in the presence of a fluorine-containing surfactant // Inorganic Materials. 2015. V. 51, No 2. Pp. 98–105 (in Russian).
DOI: 10.7868/S0002337X15010169

[11] Gordeev V.V., Kazutin M.V., Kozyrev N.V. Determination of preferable ultrasound treatment parameters in making AL/CUO nanothermite // South-Siberian Scientific Bulletin. 2017. No 4(20). Pp. 121–125 (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=32244971

[12] Kolesnichenko N.V., Yashina O.V., Ezhova N.N., Bondarenko G.N., Khadzhiev S.N. Nanodispersed Suspensions of Zeolite Catalysts for Converting Dimethyl Ether into Olefins // Russian Journal of Physical Chemistry. 2018. V. 92, No 1. Pp. 118–123 (in Russian).
DOI: 10.7868/S0044453718010120

[13] Kolesnichenko N.V., Yezhov N.N., Yashina O.V. [The formation of nanoparticles of zeolite type MFI and suspensions based on it] *Nefteximiya* [Petroleum Chemistry]. 2016. V. 56, No 6. Pp. 37–39 (in Russian).
DOI: 10.7868/S0028242116060113

[14] Mikheev G.M., Angelov I.P., Mantareva V.N., Mogileva T.N., Mikheev K.G. Thresholds of optical limiting in solutions of nanoscale compounds of zinc phthalocyanine with galactopyranosyl radicals // Technical Physics Letters. 2013. V. 39, No 7. P. 664–668 (in Russian).
http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/12844

[15] Antoshkina E.G., Smolko V.A. Influence of ultrasonic treatment on the viscosity of aqueous-clay suspensions for sand-clay mixtures // Bulletin of South Ural State University, Series «Metallurgy». 2015. V. 15, No 1. Pp. 11–16 (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=23286920

[16] Malaya E.V. [Effect of ultrasonic treatment of aqueous suspensions of magnetically hard ferrites] *Innovative processes in science and education: proceedings of articles* [Innovacionnie processy v nauke i obrazovanii: sbornik statej]. Penza: «Science and Enlightenment». 2017. Pp. 157–167 (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=29049225

[17] Bunin I.Zh., Ryazantseva M.V., Samusev A.L., Khabarova I.A. Composite physicochemical and energy action on geomaterials and aqueous slurries: theory and practice // Gornyi Zhurnal. 2017. No 11. Pp. 77–83 (in Russian).
DOI: 10.17580/gzh.2017.11.14

[18] Kurneev Ya.A., Sharendo N.A., Rubanik V.V., Rubanik V.V., Shilin A.D., Belous N.H., Rodtsevich S.P., Shilina M.V. [Investigation of the effect of acoustic effects on schungite suspensions] *50th International Scientific and Technical Conference of Teachers and Students on the Year of Science: reports* [50ya Mezhdunarodnaya nauchno-texnicheskaya konferenciya prepodavatekej i studentov, posvyashhennoj godu nauki: materialy dokladov]. Vitebsk: Vitebsk State Technological University. 2017. Pp. 343–345 (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=30073379