



ISSN: 2658–5782

Номер 1

Январь–Март 2019

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](http://mfs.uimech.org)





## Изгибные колебания трубопровода на упругих опорах с движущейся жидкостью<sup>1</sup>

Хакимов А.Г., Юлмухаметов А.А.

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе исследованы собственные изгибные колебания трубопровода. Принимается, что части трубопровода по обе стороны от провисающего участка имеют упругие опоры. Предполагается, что вдоль нейтральной линии действует постоянная продольная сила. По трубе протекает несжимаемая жидкость с постоянной средней скоростью. Учитывается влияние внутреннего давления в трубе на эти колебания. Решена прямая задача определения собственных частот изгибных колебаний трубопровода по модели Кирхгоффа с помощью формул Феррари. Определяется спектр частот в зависимости от давления жидкости, упругости опор, скорости течения жидкости по трубе. Рассмотрены частные и предельные случаи, например, когда жесткости опор очень большие, и наоборот, когда очень маленькие. Построены графики зависимости первой и второй собственных частот от скорости транспортируемой жидкости при различных значениях параметра плотности жидкости. Показано, что с ростом скоростного параметра происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубопровода, причем тем быстрее, чем выше параметр плотности жидкости. Определено, что с увеличением массы жидкости на единицу длины трубопровода происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубы. Получено, что с увеличением массового расхода по трубе собственные частоты изгибных колебаний также уменьшаются. Подтверждено, что частоты изгибных колебаний трубопровода одинаковы для случаев закрепления трубы «заделка – заделка» и «свободный конец – свободный конец». Результаты исследования будут способствовать развитию методов акустической диагностики и неразрушающего контроля и могут найти техническое применение для контроля и диагностики состояния трубопроводных систем.

**Ключевые слова:** трубопровод, упругие опоры, изгибные колебания, собственные частоты, внутреннее давление, скорость жидкости

### 1. Введение

Исследованию трубопроводов по собственным частотам их колебаний посвящено большое количество трудов. К более современным можно отнести работы [1–5].

В [1] исследуются поперечные колебания протяженного прямолинейного участка трубопровода с равномерно движущейся жидкостью. Здесь для первых трех мод построены зависимости собственных значений от величины скорости течения

жидкости (от нуля до скорости выпучивания), изучены их свойства в зависимости от инерционного параметра. Показано, что уменьшение инерционного параметра при фиксированном значении скоростного параметра приводит к увеличению собственных частот поперечных колебаний трубопровода. В данной работе, как и в исследовании [2], собственные частоты определяются с помощью формул Феррари.

В [3] рассматриваются колебания трубопровода с жидкостью. Скорость течения жидкости не учитывается. Концы трубопровода закреплены одним из четырёх видов закреплений: заделка, свободное опирание, плавающая заделка, свободный конец. Комбинации этих закреплений на левом и правом концах образуют 16 видов закреплений. Решает-

<sup>1</sup>Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0088) и грантом РФФИ (№ 18-01-00150-а).

ся задача определения закреплений трубопровода по известным собственным частотам колебаний. Показано, что для определения неупругого закрепления трубопровода с точностью до перестановок закреплений на его концах достаточно одной собственной частоты и информации о том, является ли нулевое значение собственным. Под «нулевой собственной частотой» понимается нулевое собственное значение соответствующей задачи на собственные значения. Нулевой собственной частоте соответствует не собственное колебание, а так называемое собственное движение, например, падение трубопровода в случае закрепления «свободный конец — свободный конец».

В работе [4] также исследуются колебания трубопровода с жидкостью без учета ее скорости течения. Показано, что по пяти собственным частотам изгибных колебаний трубопровода можно однозначно определить вид и параметры закрепления. Для идентификации параметров закрепления трубы с протекающей в ней жидкостью необходимо знать 14 собственных частот. Это показано в работе [5].

## 2. Постановка и решение задачи

Ранее было исследовано поведение трубопровода, имеющего провисающий участок над препятствием (овраг или реки с грунтовыми берегами). Предполагалось, что трубопровод по обе стороны от провисающей части лежит в грунте. Свойства грунта считались одинаковыми. В работе [6] рассматривался статический изгиб трубопровода с учетом влияния давления транспортируемой жидкости и жесткости грунта основания трубы. Были исследованы предельные случаи, когда давление или жесткость грунта неограниченно возрастают. Получены явные аналитические выражения для определения параметров упругости грунта и давления в трубе. Также были исследованы изгибные колебания трубопровода с учетом влияния жесткости грунта, давления транспортируемой жидкости и присоединенной массы грунта [7]. Обратная задача определения параметров упругости грунта, присоединенной массы грунта, давления жидкости по известным собственным частотам изгибных колебаний трубопровода изучена в работе [8]. Во всех этих исследованиях скорость транспортируемой жидкости считалась равной нулю. Влияние скорости жидкости на изгиб учитывался в работе [9]. В последней работе исследовался статический изгиб трубопровода, закрепленного на краях конструкциями «труба-емкость».

В настоящей работе исследуются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода с дви-

жущейся жидкостью под давлением, находящимся под действием растягивающей силы и имеющим упругие опоры. Требуется определить собственные частоты изгибных колебаний трубопровода по известным скоростному параметру, параметру плотности жидкости в трубопроводе, коэффициентам упругости опор.

Уравнение изгибных колебаний трубопровода по модели Кирхгоффа имеет вид [10–13]:

$$EJ \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + (\rho_i F_i V^2 + P_i F_i - N) \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} + 2\rho_i F_i V \frac{\partial^2 w_*}{\partial x \partial t} + (\rho F + \rho_i F_i) \frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq L).$$

Здесь  $E$  — модуль упругости;  $\rho$  — плотность материала трубы;  $J$  — осевой момент инерции;  $F$  — площадь поперечного сечения трубопровода;  $\rho_i$ ,  $P_i$ ,  $V$  — плотность, давление и скорость течения жидкости внутри трубопровода;  $F_i$  — площадь сечения в свету трубопровода;  $N$  — усилие растяжения в трубопроводе;  $w_*$  — прогиб трубопровода;  $x$  — координата, направленная по оси трубопровода;  $t$  — время;  $L$  — длина трубопровода между опорами. Отсчитывая координату  $x$  от точки крепления, запишем граничные условия:

$$Q = -c_1 w_*, M = c_2 \frac{\partial w_*}{\partial x} \quad (x = 0),$$

$$Q = c_3 w_*, M = c_4 \frac{\partial w_*}{\partial x} \quad (x = L), \quad (2)$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — коэффициенты жесткости закрепления трубопровода;  $M, Q$  — изгибающий момент и перерезывающая сила, которые определяются по формулам:

$$M = EJ \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2}, \quad Q = EJ \frac{\partial^3 w_*}{\partial x^3}.$$

Перейдя к безразмерным величинам:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad w = \frac{w_*}{L}, \quad \tau = \frac{V_0 t}{L}, \quad V_0 = L^{-1} \sqrt{\frac{EJ}{(\rho F + \rho_i F_i)}},$$

$$R = \frac{(N - P_i F_i) L^2}{EJ}, \quad \alpha = \frac{V}{V_0}, \quad \beta = \frac{\rho_i F_i}{\rho F + \rho_i F_i},$$

$$q = 2\alpha\beta\Omega, \quad \Omega = \frac{\omega L}{V_0}, \quad r = -\Omega^2, \quad F_i = \pi R_i^2,$$

$$F = \pi \left[ (R_i + h)^2 - R_i^2 \right], \quad J = \frac{\pi}{4} \left[ (R_i + h)^4 - R_i^4 \right],$$

$$\eta_1 = \frac{c_1 L^3}{EJ}, \quad \eta_2 = \frac{c_2 L}{EJ}, \quad \eta_3 = \frac{c_3 L^3}{EJ}, \quad \eta_4 = \frac{c_4 L}{EJ},$$

сделаем подстановку  $w = W(\xi) \exp(i\Omega\tau)$ , и тогда

уравнение (1), определяющее форму изгибных колебаний трубопровода, примет вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + p \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + iq \frac{\partial W}{\partial \xi} + rW = 0 \quad (3)$$

$$(0 \leq \xi \leq 1),$$

где  $\omega$  — круговая частота;  $L$  — длина трубопровода между опорами;  $\alpha$  — скоростной параметр;  $\beta$  — параметр плотности жидкости в трубопроводе;  $\eta_1 - \eta_4$  — коэффициенты упругости опор.

Граничные условия (2) записываются как:

$$\frac{\partial W^3}{\partial \xi^3} = -\eta_1 W, \quad \frac{\partial W^2}{\partial \xi^2} = \eta_2 \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (\xi = 0),$$

$$\frac{\partial W^3}{\partial \xi^3} = \eta_3 W, \quad \frac{\partial W^2}{\partial \xi^2} = \eta_4 \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (\xi = 1).$$

Общее решение уравнения (3) будем определять в виде  $W(\xi) = \exp k\xi$ . Тогда получим характеристическое уравнение для нахождения неизвестных значений комплексных волновых параметров  $k_j = k_j(\alpha, \beta, R, \Omega)$ ,  $j = 1 - 4$ :

$$k^4 + pk^2 + iqk + r = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1). \quad (5)$$

Последнее уравнение решается с помощью формул Феррари. Согласно данному методу записывается резольвента основного уравнения (5):

$$z^3 - \frac{p}{2}z^2 - rz + \frac{rp}{2} + \frac{q^2}{8}.$$

Если какое-либо решение  $z_1$  кубического уравнения найдено, то решения уравнения (5) определяются как решения двух квадратных уравнений:

$$k^2 - \sqrt{2z_1 - p}k + \frac{q}{2\sqrt{2z_1 - p}} + z_1 = 0,$$

$$k^2 + \sqrt{2z_1 - p}k - \frac{q}{2\sqrt{2z_1 - p}} + z_1 = 0.$$

Таким образом:

$$k_{1,2} = \frac{\sqrt{2z_1 - p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2z_1 - p - \frac{2q}{\sqrt{2z_1 - p}}},$$

$$k_{3,4} = -\frac{\sqrt{2z_1 - p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2z_1 - p + \frac{2q}{\sqrt{2z_1 - p}}}.$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$W(\xi) = \sum_{j=1}^4 C_j \exp k_j \xi, \quad (6)$$

где  $k_j = k_j(\alpha, \beta, R, \Omega)$  — волновые числа. Удовлетворяя (6) граничным условиям (4), получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных постоянных  $C_j$  ( $j = 1 - 4$ ). Для того, чтобы постоянные  $C_j$  не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение

$$D = \begin{vmatrix} k_1^3 + \eta_1 & k_2^3 + \eta_1 & k_3^3 + \eta_1 & k_4^3 + \eta_1 \\ k_1^2 - \eta_2 k_1 & k_2^2 - \eta_2 k_2 & k_3^2 - \eta_2 k_3 & k_4^2 - \eta_2 k_4 \\ (k_1^3 - \eta_3) \exp k_1 & (k_2^3 - \eta_3) \exp k_2 & (k_3^3 - \eta_3) \exp k_3 & (k_4^3 - \eta_3) \exp k_4 \\ (k_1^2 - \eta_4 k_1) \exp k_1 & (k_2^2 - \eta_4 k_2) \exp k_2 & (k_3^2 - \eta_4 k_3) \exp k_3 & (k_4^2 - \eta_4 k_4) \exp k_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели трубопровода с движущейся жидкостью под давлением фигурируют параметры  $R$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta_1 - \eta_4$ , которые зависят от усилия растяжения в трубопроводе  $N$ , давления внутри трубопровода  $P_i$ , площади сечения в свету трубопровода  $F_i$ , скорости течения жидкости внутри трубопровода  $V$ , коэффициентов упругости опор  $\eta_1 - \eta_4$ . Подробнее остановимся на влиянии этих факторов на собственные частоты изгибных колебаний. Зависимости первой и второй собственных частот изгибных колебаний стержня от скоростного параметра  $\alpha$  для различных значений параметра  $R$  и анализ полученных

результатов приводятся в [13].

При  $\eta_1 - \eta_4 \rightarrow \infty$  собственные функции  $W(\xi)$  действительны и совпадают с собственными функциями стержня с жестко заземленными концами. Тогда, частотное уравнение (7) принимает вид [2]:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ \exp k_1 & \exp k_2 & \exp k_3 & \exp k_4 \\ k_1 \exp k_1 & k_2 \exp k_2 & k_3 \exp k_3 & k_4 \exp k_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Такой случай рассмотрен в работе [7] для  $\alpha = 0$ ,  $R = 0$ . Была показана зависимость безразмерной круговой частоты от безразмерного давления в трубопроводе. Получено, что частоты изгибных коле-

Таблица 1. Собственные частоты при  $\beta = 0.5$ ,  $R = 0$ ,  $\eta_1 - \eta_4 \rightarrow \infty$  для различных параметров  $\alpha$

$\alpha$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
0	22.373	61.673	120.903	199.859
0.4	22.345	61.646	120.875	199.831
0.7	22.287	61.589	120.817	199.772
1	22.197	61.502	120.727	199.681

баний уменьшаются с увеличением внутреннего давления в трубопроводе.

Другой частный случай наблюдается при  $\eta_1 - \eta_4 \rightarrow 0$ , что соответствует колебаниям трубопровода с закреплениями типа «свободный конец — свободный конец». Частотное уравнение (7) в этом случае принимает вид:

$$D = \begin{vmatrix} k_1^3 & k_2^3 & k_3^3 & k_4^3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 \\ k_1^3 \exp k_1 & k_2^3 \exp k_2 & k_3^3 \exp k_3 & k_4^3 \exp k_4 \\ k_1^2 \exp k_1 & k_2^2 \exp k_2 & k_3^2 \exp k_3 & k_4^2 \exp k_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Путем элементарных преобразований строк это уравнение приводится к виду (8). Следовательно, собственные частоты для трубопровода с закреплениями типа «заделка — заделка» и «свободный конец — свободный конец» будут совпадать. Этот факт подтверждается в исследованиях [3].

Если  $R = 0$ ,  $\eta_1 - \eta_4 \rightarrow \infty$  и  $\beta = 1$ , то характеристическое уравнение (5) допускает факторизацию и его корни  $k_j$  находятся в явном виде как функции частоты  $\Omega$  [13]:

$$k_{1,2} = -i\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\Omega - \frac{\alpha^2}{4}},$$

$$k_{3,4} = i\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\Omega + \frac{\alpha^2}{4}}.$$

Для вещественных собственных частот  $\Omega_n(\alpha)$  получается довольно простое вековое уравнение, которое решается одним из численных методов. Если не учитывать скорость течения жидкости, то по-

лучаем известное в литературе частотное уравнение [14, 15]

$$\cosh \sqrt{\Omega} \cos \sqrt{\Omega} = 1.$$

В других случаях корни характеристического уравнения находятся с помощью формул Феррари. Последние, по мнению авторов [2], почти не применялись в задачах математической физики и механики.

Расчеты собственных частот проведены с использованием специально разработанной программы. В табл. 1 приведены вычисления для абсолютно жестких опор при  $\beta = 0.5$ ,  $R = 0$ ,  $\eta_1 - \eta_4 \rightarrow \infty$ . Видно, что с ростом параметра  $\alpha$  происходит уменьшение собственных частот колебаний трубопровода.

Результаты расчета собственных частот колебаний трубопровода с упругими опорами для  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $R = 0$ ,  $\eta_2 = \eta_4 = 0$  представлены в табл. 2. По первому столбцу (столбец  $\Omega_1$ ) видно, что с ростом  $\eta_1 = \eta_3$  происходит увеличение собственных частот колебаний трубопровода как твердого тела на упругих опорах с нулевым волновым числом или длиной волны равной бесконечности. Столбец  $\Omega_2$  табл. 2 соответствует колебаниям трубопровода в грунте. Здесь собственные частоты также падают с увеличением жесткости опор. Колебание провисающей части трубы описывают частоты  $\Omega_j$  ( $j = 3... \infty$ ). Первая строка табл. 2 показывает, что собственные частоты при  $\eta_j = 0$ ,  $j = 1 - 4$  практически совпадают с частотами случая, когда  $\eta_1 - \eta_4 \rightarrow \infty$ . Это еще раз подтверждает полученные в работе [3] результаты.

Безразмерный массовый расход  $m$  по трубопроводу определяется по формуле [16]

$$m = \alpha\beta = \frac{\rho_i F_i V L}{\sqrt{EJ(\rho F + \rho_i F_i)}}.$$

На рис. 1 приведены графики зависимостей первых двух частот изгибных колебаний провисающей части трубопровода от скорости течения жидкости для значений параметров  $R = 0$ ,  $\eta_j = 0.5$ ,  $j = 1 - 4$  при различных значениях параметра

Таблица 2. Собственные частоты при  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $R = 0$ ,  $\eta_2 = \eta_4 = 0$

$\eta_1 = \eta_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
0	-	-	22.372	61.671	120.902	199.858
0.1	0.436	-	22.389	61.678	120.905	199.86
0.5	0.992	1.723	22.460	61.703	120.918	199.868
1	1.400	2.441	22.55	61.736	120.935	199.878
1.5	1.710	2.992	22.639	61.768	120.951	199.888

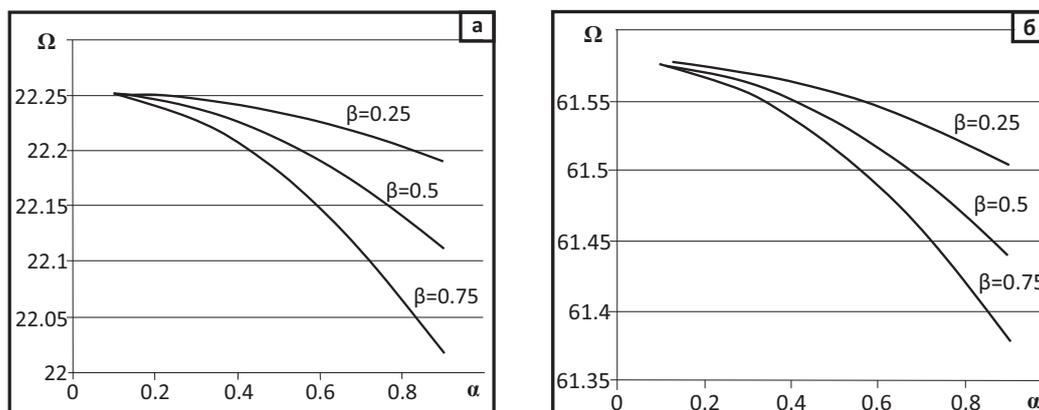


Рис. 1. Зависимости первой (а) и второй (б) собственных частот изгибных колебаний трубопровода от скорости течения жидкости  $\alpha$  при различных значениях параметра плотности жидкости  $\beta$

$\beta$  ( $\beta = 0.25; 0.5; 0.75$ ). Как видно из рисунка, первая и вторая собственные частоты монотонно падают с увеличением скорости транспортируемой жидкости, причем тем быстрее, чем выше параметр плотности жидкости  $\beta$ . Следовательно, можно сделать вывод, что с увеличением массового расхода по трубе собственные частоты изгибных колебаний уменьшаются.

### 3. Заключение

Показано, что с ростом скоростного параметра происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубопровода, причем тем быстрее, чем выше параметр плотности жидкости. Определено, что с увеличением массы жидкости на единицу длины трубопровода происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубы. Получено, что с увеличением массового расхода по трубе собственные частоты изгибных колебаний также уменьшаются.

Результаты исследования помогут развитию методов акустической диагностики и неразрушающего контроля и могут найти техническое применение для контроля и диагностики состояния трубопроводных систем.

### Список литературы

- [1] Акуленко Л.Д., Иванов М.И., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Основные свойства собственных колебаний протяженного участка трубопровода // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2013. №. 4. С. 119–134. <https://elibrary.ru/item.asp?id=20194647>
- [2] Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В. Спектр поперечных колебаний участка движущегося стержня при воздействии продольной нагрузки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. №. 2. С. 139–144. <https://elibrary.ru/item.asp?id=23286558>
- [3] Ахтямов А.М., Шагиев В.Р. Идентификация неупругих видов закреплений трубопроводов // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21, №. 1. С. 21–26. <https://elibrary.ru/item.asp?id=27672798>
- [4] Шагиев В.Р., Ахтямов А.М. Идентификация закрепления трубопровода с использованием минимального количества собственных частот // Математические структуры и моделирование. 2018. №. 1(45). С. 95–107. [DOI: 10.25513/2222-8772.2018.1.95-107](https://doi.org/10.25513/2222-8772.2018.1.95-107)
- [5] Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. О единственности решения и корректности задачи определения параметров закрепления трубы с текущей в ней жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, №. 2(336). С. 32–45. [DOI: 10.15372/PMTF20160204](https://doi.org/10.15372/PMTF20160204)
- [6] Ильгамов М.А., Юлмухаметов А.А. Прямая и обратная задачи изгиба трубопровода // Вестник ПНИПУ. Механика. 2017. №. 3. С. 100–112. [DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.06](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.3.06)
- [7] Хакимов А.Г., Юлмухаметов А.А. Спектр частот изгибных колебаний трубопровода // Известия УНЦ РАН. Механика. 2017. №. 3. С. 10–14. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29924723>
- [8] Хакимов А.Г., Юлмухаметов А.А. Обратная задача изгибных колебаний трубопровода // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2018. №. 1. С. 86–96. [DOI: 10.17122/ntj-oil-2018-1-86-96](https://doi.org/10.17122/ntj-oil-2018-1-86-96)
- [9] Юлмухаметов А.А. Параметрический анализ статического изгиба трубопровода // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, №. 1. С. 24–29. [DOI: 10.21662/uim2016.1.005](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.005)
- [10] Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. 2. М.: Высшая школа. 1987. 304 с.
- [11] Mote C.D. A study of band saw vibrations // J. Franklin Inst. 1965. V. 279, No. 6. Pp. 430–444. [DOI: 10.1016/0016-0032\(65\)90273-5](https://doi.org/10.1016/0016-0032(65)90273-5)
- [12] Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. М.: Nauka, Fizmatlit. 1998. P. 208.
- [13] Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Собственные колебания участка трубопровода // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. №. 1. С. 172–187. <https://elibrary.ru/item.asp?id=15624284>
- [14] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. 526 с.
- [15] Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справ. в 3-х томах. Т. 3. М.: Машиностроение. 1968. 576 с.
- [16] Хакимов А.Г. Определение массового расхода жидкости в трубопроводе под давлением по собственным частотам изгибных колебаний // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2016. №. 2. С. 49–57. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26538789>



## Flexural vibrations of the pipeline on elastic supports with moving fluid

Khakimov A.G., Yulmukhametov A.A.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia

In the work investigated the flexural vibrations of the pipeline. Parts of the pipeline on both sides of the sagging section have elastic supports. It is assumed that a constant longitudinal force acts along the neutral line. An incompressible fluid flows through the pipe at a constant average speed. The influence of internal pressure in the pipe on these oscillations is taken into account. The direct problem of determining the eigenfrequencies of flexural vibrations of the pipeline by the Kirchhoff model using Ferrari formulas is solved. The frequency spectrum is determined depending on the fluid pressure, the elasticity of the supports, the velocity of the fluid through the pipe. Particular and limiting cases are considered, for example, when the stiffness of the supports is very large and when they are very small. Graphs of the dependence of the first and second eigenfrequencies on the velocity of the transported liquid at different values of the liquid density parameter are constructed. It is shown that with the growth of the velocity parameter there is a decrease in the natural frequencies of flexural vibrations of the pipeline, and the faster the higher the density parameter of the liquid. It is determined that with an increase in the mass of the liquid per unit length of the pipeline there is a decrease in the natural frequencies of bending vibrations of the pipe. It is found that with the increase in the mass flow through the pipe, the natural frequencies of bending oscillations also decrease. It is confirmed that the frequencies of flexural vibrations of the pipeline are the same for the cases of pipe fastening «rigid fixing – rigid fixing» and «free end – free end». The results of the study will contribute to the development of methods of acoustic diagnostics and non-destructive testing and can find technical application for monitoring and diagnostics of pipeline systems.

**Keywords:** pipeline, elastic supports, bending vibrations, natural frequencies, internal pressure, fluid velocity

### References

- [1] Akulenko L.D., Ivanov M.I., Nesterov S.V., Korovina L.I. Basic properties of natural vibrations of an extended segment of a pipeline. *Mechanics of Solids*. 2013. V. 48, No. 4. Pp. 458–472. DOI: 10.3103/S0025654413040146
- [2] Akulenko L.D., Nesterov S.V., Georgievskii D.V. Transverse vibration spectrum of a part of a moving rod under a longitudinal load. *Mechanics of Solids*. 2015. V. 50, No. 2. Pp. 227–231. DOI: 10.3103/S0025654415020120
- [3] Akhtyamov A.M., Shagiev V.R. [Identification of nonelastic fastening types of pipelines]. *Vestnik Bashkirskogo universiteta* [Bulletin of Bashkir University]. 2016. V. 21, No. 1. Pp. 21–26 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=27672798>
- [4] Shagiev V.R., Akhtyamov A.M. [Identification of pipe fastening using the minimum number of natural frequencies]. *Matematicheskie struktury i modelirovanie* [Mathematical Structures and Modeling]. 2018. No. 1(45). Pp. 95–107 (in Russian). DOI: 10.25513/2222-8772.2018.1.95-107
- [5] Akhtyamov A.M., Safina G.F. Uniqueness of solution and well-posedness of the problem of determining the fastening parameters of a pipe containing flowing fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. V. 57, №. 2. Pp. 219–230. DOI: 10.1134/S0021894416020048
- [6] Ilgamov M.A., Yulmukhametov A.A. [Direct and inverse problems of pipeline bending]. *Vestnik PNIPU. Mexanika* [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2017. No. 3. Pp. 100–112 (in Russian). DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.06
- [7] Khakimov A.G., Yulmukhametov A.A. [The range of frequencies for flexural vibrations of a pipeline]. *Izvestiya UNCz RAN. Mexanika* [Proceedings of the RAS Ufa Scientific centre. Mechanics]. 2017. No. 3. Pp. 10–14 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=29924723>
- [8] Khakimov A.G., Yulmukhametov A.A. [The inverse problem of bending vibrations of a pipeline]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefi i nefteproduktov* [Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products]. 2018. No. 1. Pp. 86–96 (in Russian). DOI: 10.17122/ntj-oil-2018-1-86-96

- [9] Yulmukhametov A.A. [Parametric analysis of static bending of the pipeline]. *Trudy Instituta mexaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo centra RAN* [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics]. 2016. V. 11, No. 1. Pp. 24–29 (in Russian).  
[DOI: 10.21662/uim2016.1.005](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.005)
- [10] Svetliczkij V.A. [Rod mechanics] *Mexanika sterzhnej*. V. 2. M.: Vysshaya shkola, 1987. P. 304 (in Russian).
- [11] Mote C.D. A study of band saw vibrations. *J. Franklin Inst.* June, 1965. V. 279, No. 6. Pp. 430–444.  
[DOI: 10.1016/0016-0032\(65\)90273-5](https://doi.org/10.1016/0016-0032(65)90273-5)
- [12] Ilgamov M.A. *Static Problems of Hydroelasticity*. M.: Nauka, Fizmatlit, 1998. P. 208.
- [13] Akulenko L.D., Korovina L.I., Nesterov S.V. Natural vibrations of a pipeline segment. *Mechanics of Solids*. 2011. V. 46, No. 1. Pp. 139–150.  
[DOI: 10.3103/S0025654411010201](https://doi.org/10.3103/S0025654411010201)
- [14] Tixonov A.N., Samarskij A.A. [Equations of mathematical physics] *Urvneniya matematicheskoy fiziki*. M.: Nauka, 1966. P. 526 (in Russian).
- [15] Birger I.A., Panovko Ya.G. [Strength. Sustainability. Oscillations: Ref. In 3 volumes] *Prochnost'. Ustojchivost'. Kolebaniya: Sprav. v 3-x tomakh*. V. 3. M.: Mashinostroenie, 1968. P. 576 (in Russian).
- [16] Khakimov A.G. [Determination of the mass flow rate of liquids in a pipeline under pressure by the natural frequencies of flexural vibrations]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefti i nefteproduktov* [Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products]. 2016. No. 2. Pp. 49–57 (in Russian).  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=26538789>