



ISSN: 2658–5782

Номер 4

Октябрь–Декабрь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Двумерная динамическая модель взаимодействия жидкости и пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом в плоском канале¹

Насибуллаев И.Ш.^{*}, Даринцев О.В.^{*,**}

^{*}Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

^{**}Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В работе предлагается двумерная компьютерная модель течения жидкости в плоском канале под действием приложенного перепада давления с погруженным в него плоским керамическим пьезоэлектрическим приводом, изгибающимся в поперечном направлении пропорционально приложенному электрическому напряжению. Предложена математическая модель связанной системы жидкость–пьезопривод в вариационной форме для численного моделирования методом конечных элементов. Поскольку задание граничных условий Дирихле на перемещение в данной задаче затруднительно, была построена эквивалентная схема деформаций пьезопривода с использованием граничных условий Неймана. Рассчитаны деформации и эквивалентные напряжения фон Мизеса на пьезоприводе. Проведен анализ влияния геометрии канала и образуемого пьезоприводом гидродинамического сопротивления на динамику течения жидкости. Предложен алгоритм адаптивного динамического перестроения расчетной сетки канала при деформациях, превышающих размер конечных элементов. При симметричном управляющем сигнале, подаваемом на пьезопривод, асимметрия геометрии приводит к нарушению симметрии расхода жидкости в пределах периода как по величине расхода жидкости, так и по времени. В отсутствие перепада давления при низких частотах колебаний пьезоэлемента (порядка обратного времени релаксации скорости) средний по периоду расход жидкости отличен от нуля и растет с увеличением частоты. При наличии перепада давления между входным и выходным отверстиями канала средний расход жидкости пропорционален перепаду давления; на низких частотах – обратно пропорционален частоте; с ростом частоты – выходит на насыщение. На основе результатов численного моделирования предложены различные варианты новых микрофлюидных технических устройств, генерирующих течение жидкости с помощью пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом: микронасос, создающий течение в замкнутом контуре; регулятор расхода жидкости и дозатор объема жидкости.

Ключевые слова: пьезоэлектрический привод с поперечным изгибом, линейная упругость, гидродинамика, гидросопротивление, плоский канал, *FSI*, метод конечных элементов

1. Введение

В последние три десятилетия активно проводятся исследования в области микрофлюидики [1]. Интерес к данной области связан с особенностями течения жидкости в микро- и наномасштабах,

позволяющими разрабатывать новые устройства, которые обладают новыми свойствами или даже не имеют аналогов в традиционных макросистемах. С развитием микроэлектромеханических систем (МЭМС), широким внедрением микророботов и микротехнологических комплексов появилась возможность синтеза МЭМС с микрофлюидными устройствами [2].

Авторами настоящей работы разрабатывается капиллярный микрозахват [3] для работы с плоскими микрообъектами, мембранами и другими ком-

¹Работа выполнена за счет средств государственного задания № 0246-2018-007.

понентами с достаточной площадью плоской стороны, удержание которых пальцевыми захватами затруднен. Создание макета данного микрозахвата, построенного на базе элемента Пельтье, предполагает использование жидкостного охлаждения для отвода тепла от горячей поверхности элемента Пельтье. Отвод тепловой мощности от элемента Пельтье требует от разработчиков конструирования миниатюрных насосов, а обеспечение режимов работы микрозахвата — разработки соответствующей математической модели, учитывающей специфику микрофлюидики.

Существующие микронасосы [4] имеют множество вариантов реализации и широкий диапазон применений, но недостатки большинства конструкций (значительные пульсации потока и наличие механических узлов) затрудняют их использование для системы охлаждения микрозахвата.

Теоретические модели, разработанные для существующих микронасосов, основаны на эмпирических данных, что не позволяет провести полную геометрическую оптимизацию конструкции и определить оптимальные режимы работы. С другой стороны, генерация течения жидкости в упругом микроканале относится к области мультифизики, а, именно, взаимодействие жидкости и структуры (*fluid-structure interaction, FSI*) [5]. Все это требует при разработке новых технических устройств построения новых математических моделей, связывающих гидродинамику, теорию упругости, процесс теплопереноса, параметрическую оптимизацию и теорию управления устройством, для определения и оптимизации режимов их работы.

Компьютерное моделирование течения жидкости в микроканалах, индуцированного внешним воздействием (например, перепадом давления, поступательным движением границы или деформацией канала), в последнее время активно развивается. Например, авторами настоящей работы были разработаны компьютерные модели, которые могут быть использованы в качестве элемента вычислительного стенда для одного элемента технического устройства (поршень и гидродинамическое сопротивление). Модель поршня для осциллирующего перепада давления, учитывающая пять параметров (амплитуда и частота перепада давления, трение поршня, жесткость пружины, отношение силы трения покоя и трения скольжения), была построена в работе [6] методами факторного вычислительного эксперимента второго порядка.

С развитием математических и компьютерных моделей появились пакеты численного моделирования, использующие метод конечных элементов (МКЭ, *FEM*), позволяющий проводить модели-

рование устройств с практически произвольной геометрией [7].

В работе [8] была построена модель стационарного течения жидкости через цилиндрическое гидросопротивление с учетом перепада давления и радиуса проходного отверстия гидросопротивления, но без учета зависимости модели материала жидкости от температуры. В работе [9] представлено расширение данной модели для описания работы элемента во всей рабочей области температур. В работе [10] изучалось течение жидкости через систему трех элементов. Во всех этих исследованиях геометрия канала была фиксированной.

В следующей работе [11] изучалось течение жидкости в плоском канале с гидросопротивлением для двух случаев динамического изменения геометрии канала: поперечное сжатие проходного отверстия гидросопротивления (течение вызывается приложенным к слою перепадом давления) и продольное движение гидросопротивления вдоль канала (течение вызывается этим движением). Получено, что динамическое изменение геометрии канала позволяет регулировать расход жидкости.

В работе [12] было проведено трехмерное моделирование течения жидкости через трубку, деформируемую пьезоэлементом по гармоническому закону. Деформации задавались граничными условиями Дирихле (заданное перемещение на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента) и Неймана (внешнее давление на поверхности контакта). Было получено, что подбором давления пьезоэлемента на внешнюю часть трубки можно получить такую же деформацию внутренней части трубки, как и при задании перемещения поверхности контакта внутрь на определенную величину (зависимость является линейной), что означает взаимозаменяемость рассматриваемых граничных условий. Было изучено два режима течения жидкости в деформированной трубке: вход трубки закрыт, течение индуцируется деформацией трубки; оба конца открыты, течение индуцируется как деформацией трубки, так и приложенным к слою перепадом давления. Первый режим позволяет провести тестирование компьютерной модели, а второй — предложить механизм дозирования жидкости, управляемый двумя параметрами: частотой сжатия пьезоэлемента и величиной перепада давления.

В работе [13] представлена методика построения элемента вычислительного стенда в виде аналитической формулы на основе трехмерного моделирования течения жидкости через эластичный микроканал, деформируемый пьезоэлементом по гармоническому закону, а также предложены варианты использования полученных результатов в

Таблица 1. Многослойные *PZT* пьезопроводы (размеры: h_l – длина, h_w – ширина, h_h – толщина; амплитуда колебаний – Δh ; блокирующая сила – F_b ; резонансная частота – f_r)

Производитель	h_l , мм	h_w , мм	h_h , мм	ΔH_m , мм	F_b , Н	f_r , Гц
steminc [15]	25	7,1	0,5	0,05	0,005	1000
thorlabs [16]	16	8	0,8	0,135	1,4	930
	28	7,8	0,8	0,45	1,5	370
mmech [17]	21	7,8	0,7-1,8	0,085-0,195	1,2-5,5	730-1800
	32	7,8	0,7-1,8	0,21-0,475	0,75-4,3	275-705
	50	7,8	0,7-1,8	0,635-1,27	0,4-2,9	100-265
bimitech [18]	30	8-20	0,65	0,39-0,48	0,15-0,48	219
piezoproducts [19]	6,5-38	6,5-38	1-7,2	0,07-2,8	0,11-2,3	<1000

практических приложениях. Построена трехмерная компьютерная модель управления режимом течения жидкости, индуцированным приложенным вдоль канала перепадом давления, с помощью величины перепада давления и частоты сжатия трубки пьезоэлементом. Данная модель представляет собой первую часть жидкостной системы охлаждения микрозахвата.

Главным недостатком кольцевых пьезоэлектрических приводов является малая амплитуда деформаций (порядка 2–3 мкм) и, следовательно, ограниченное воздействие на жидкость. Многослойные пьезоэлектрические приводы (один слой гибкой подложки и один или несколько пьезоэлектрических слоев) с поперечным отклонением позволяют значительно увеличить амплитуду колебаний [14] до величин порядка $\pm(50 \div 500)$ мкм. В настоящее время существует большое количество моделей с различными характеристиками. В табл. 1 представлены характеристики нескольких многослойных пьезопроводов *PZT* (пьезоэлектрическая керамика, изготовленная из цирконат-титанат свинца). Пьезопроводы имеют следующие конструктивные особенности:

- резонансная (максимальная) частота f_r колебаний увеличивается при уменьшении размеров пьезопровода, особенно при уменьшении толщины h_h ;
- блокирующая сила F_b растет с увеличением размеров;
- максимальная амплитуда колебаний ΔH_m увеличивается с уменьшением толщины h_h ;
- максимальная амплитуда колебаний ΔH_m пропорциональна разности потенциалов, приложенных к слоям пьезопровода U .

Последнее свойство имеет большое значение для приложений. В работе [20] проведено исследование трехслойного привода, способного откло-

няться в двух поперечных направлениях. Показано, что зависимость амплитуды отклонения от приложенного напряжения линейна при частотах колебаний привода до 800 Гц, а максимальная амплитуда отклонения увеличивается с уменьшением толщины гибкой части пьезопровода.

В настоящей работе строится двумерная математическая и компьютерная модель *FSI*, учитывающая влияние колебаний пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом на динамику жидкости в плоском канале, а также исследуется возможность построения на базе пьезоэлектрического привода микронасоса для системы охлаждения микрозахвата.

2. Постановка задачи и основные уравнения

На рис. 1 показана схема рассматриваемой геометрии с обозначением границ (верхний рисунок), где в плоский канал размерами $L_c \times H_c$ вставлен под углом α пьезопровод. Пьезопровод (нижний рисунок) представляет собой плоскую подложку с прикрепленными к ней сверху и снизу пьезоэлементами. Размер гибкой части пьезопровода $L_p \times H_p$. Гибкая часть пьезопровода Γ_6 может изгибаться в обе стороны в поперечном направлении на величину ΔH_p , пропорциональную электрическому напряжению U . Фиксированная часть пьезопровода Γ_5 жестко закреплена.

Линейные упругие деформации твердого изотропного тела в отсутствии внешних сил описываются условием равновесия тензора напряжений [21]

$$\bar{\bar{\sigma}} = 0, \quad (1)$$

зависящего от тензора деформаций $\bar{\bar{\epsilon}}$ и вектора перемещений $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$:

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} + \lambda(\nabla\mathbf{s})\bar{\bar{I}}, \quad (2)$$

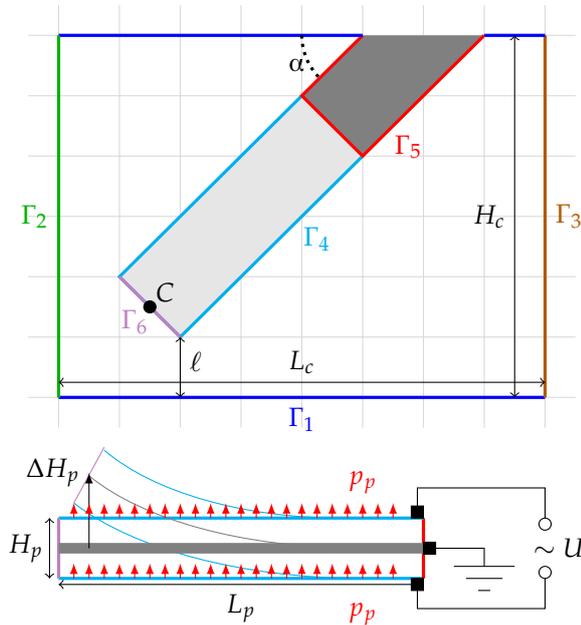


Рис. 1. Геометрия модели. Канал: стенка Γ_1 , входное Γ_2 и выходное Γ_3 отверстия. Пьезопривод: зафиксированная Γ_5 и гибкая Γ_4 части

где $\bar{\bar{I}}$ — единичный тензор; ∇ — оператор набла; коэффициенты Ламе

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

зависят от модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν .

Подставляя (2) в уравнение (1) и исключая тензор деформаций $\bar{\bar{\epsilon}}$, согласно определению

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{s} + (\nabla \mathbf{s})^T),$$

получим уравнение равновесия, содержащее только вектор перемещений (уравнение Ламе):

$$\nabla [\mu (\nabla \mathbf{s} + (\nabla \mathbf{s})^T) + \lambda (\nabla \mathbf{s}) \bar{\bar{I}}] = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) является стационарным, т.е. применяется только для времени процесса деформации выше характерного времени упругой релаксации

$$\tau_e \sim \Delta H_m \sqrt{\frac{\rho_e}{E}},$$

где ρ_e — плотность пьезоэлемента; E — модуль Юнга материала пьезоэлемента. Для типичных параметров $\rho_e = 2300 \text{ кг/м}^3$, $E = 30 \text{ ГПа}$ и амплитуды колебаний $\Delta H_m = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ получим

$\tau_e = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, т.е. уравнение (3) применимо для частоты колебаний $f \ll 7 \text{ МГц}$, что укладывается в характеристики пьезопроводов (см. f_r в табл. 1). Относительное удлинение $\Delta H_m / L_p \approx 1,7\%$ укладывается в пределы применимости линейных уравнений упругости (3%). Отметим, что в рассматриваемой модели точность расчетов мало зависит от величины относительного удлинения, а преимущественно от того, насколько выполняется условие линейности $\Delta H_p(U)$.

Течение несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнением неразрывности [22]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

где ρ — плотность жидкости; $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ — вектор скорости жидкости; t — время; p — давление, μ — динамическая вязкость жидкости; Δ — оператор Лапласа.

Уравнения (3)–(5) записывались в вариационной форме и решались численно МКЭ в пакете численного моделирования *FreeFem++* [23]. Дискретизация по времени проводилась по неявной схеме Эйлера.

Деформации \mathbf{s} определялись решением уравнения (3) численно в вариационной формулировке:

$$\int_{\Omega} \frac{\mu}{2} (\nabla \mathbf{s} + \nabla \mathbf{s}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \lambda (\nabla \mathbf{s}) (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{s} \Omega = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ — пробные функции; интегрирование производится по всему объему Ω трубки.

Уравнения гидродинамики (4)–(5) в вариационной форме записывались в виде:

$$F(\mathbf{u}, p) = 0, \quad (7)$$

$$F(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} \left[\rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} \mathbf{w} + \rho (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \mathbf{w} - p^{n+1} \nabla \mathbf{w} + \mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{u}^{n+1} q + \varepsilon_p p^{n+1} q \right] d\Omega,$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$ — шаг по времени; индексы n и $n + 1$ означают предыдущий и текущий шаг по времени; \mathbf{w} и q — пробные функции для переменных \mathbf{u} и p , соответственно; $\varepsilon_p \sim 10^{-10}$ — безразмерный коэффициент, определяющий малую искусственную сжимаемость (повышающую устойчивость численной схемы, но практически не влияющую на определяемое поле скоростей).

Уравнения (7) являются нелинейными и решались итерационным методом Ньютона:

$$F(\mathbf{u}, p) + dF(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}, \delta p) = 0,$$

где дифференциал $dF(\mathbf{u}, p)$ имеет вид:

$$dF(\mathbf{u}, p, \delta\mathbf{u}, \delta p) = \int \left[\frac{1}{\tau} \rho \delta\mathbf{u}\mathbf{w} \, d\Omega + \right. \\ \left. + \rho((\delta\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1}\nabla)\delta\mathbf{u}\right]\mathbf{w} - \delta p\nabla\mathbf{q} + \\ + \mu\nabla\delta\mathbf{u}\nabla\mathbf{w} + \nabla\delta\mathbf{u}\mathbf{q} + \varepsilon_p\delta p\mathbf{q} \, d\Omega.$$

На k -й итерации решение обновляется

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k-1} + \delta\mathbf{u}, \quad p^k = p^{k-1} + \delta p,$$

пока невязка $\|F\|$ не станет меньше заданной погрешности ε_F и невязка решений $\max(\|\delta\mathbf{u}\|, \|\delta p\|) \leq \varepsilon_\delta$. Для повышения устойчивости схемы Ньютона начальное приближение решения на $k = 0$ итерации находилось решением уравнения

$$F(\mathbf{u}, p) = 0$$

с линеаризацией нелинейного конвективного слагаемого по схеме Пикарда

$$(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1} \rightarrow (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1}.$$

При приложении к пьезоэлементам напряжения пьезопривод изгибается в поперечном направлении на величину, пропорциональную приложенному напряжению $\Delta H_p \sim U$. Изменение напряжения на пьезоприводах линейно

$$U = U_m F_p(i, i_m),$$

где U_m — амплитуда напряжения; i — номер шага по времени; i_m — количество временных шагов за период, а безразмерная ограниченная в интервале $[-1, 1]$ кусочно-линейная функция F_p имеет вид:

$$F_p(i, i_m) = 1 - 2 \left| \frac{(i + \lfloor i_m/4 \rfloor) \bmod i_m}{\lfloor i_m/2 \rfloor} - 1 \right|, \quad (8)$$

где $\lfloor a/b \rfloor$ означает неполное частное, $a \bmod b$ — остаток при делении целых чисел a/b .

Особенностью пьезопривода с поперечным изгибом является линейная связь между поперечным перемещением ΔH_p и приложенным напряжением U :

$$\Delta H_p = kU, \quad k = \frac{\Delta H_m}{U_m},$$

где k — коэффициент пропорциональности; ΔH_m — амплитуда поперечного перемещения.

Величина ΔH_p напрямую связана с компонентой вектора деформации s_y на границе Γ_6 . Однако, напрямую нельзя задать это условие в качестве граничного условия Дирихле (например, в виде $s_y = \Delta H_p$ на границе Γ_6), поскольку в процессе изгиба меняется форма пьезоэлемента и вторая компонента s_x не определена. Поскольку величина изгиба пропорциональна напряжению U , в расчетах использовались граничные условия Неймана (задавалось давление $p_p \sim U$ на верхней и нижней границах Γ_4), которые позволяют определить форму пьезопривода в процессе деформации и рассчитать соответствующее значение ΔH_p :

$$\Gamma_4 : \sigma_{yy} = p_p \sin \alpha, \quad \sigma_{xy} = p_p \cos \alpha, \quad (9)$$

где p_p определяется из условия, что максимальное значение $p_m = \max(p_p)$ соответствует максимальному отклонению ΔH_m .

Пьезопривод закреплен на границе

$$\Gamma_5 : s_x = 0, \quad s_y = 0.$$

Граничные условия на скорость жидкости (условие залипания):

$$\begin{cases} \Gamma_1, \Gamma_5 : u_x = 0, u_y = 0, \\ \Gamma_4, \Gamma_6 : u_x = \delta s_x / \tau, u_y = \delta s_y / \tau, \\ \Gamma_2, \Gamma_3 : u_y = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где δs_x и δs_y соответствуют изменению деформаций s_x и s_y соответственно за временной промежуток τ . Для создания пуазейлевского течения вдоль слоя приложен перепад давления Δp :

$$p(\Gamma_2) = \Delta p / 2, \quad p(\Gamma_3) = -\Delta p / 2.$$

3. Результаты

В расчетах использовались следующие параметры геометрии: канал имеет длину $L_c = 60$ мм и высоту $H_c = 5$ мм; пьезопривод имеет длину $L_p = 30$ мм и высоту $H_p = 1$ мм с амплитудой максимального поперечного отклонения $\Delta H_m = 0,5$ мм (отклонения происходят в обе стороны в диапазоне $-\Delta H_m \dots \Delta H_m$). Физические параметры выбраны при температуре $T_0 = 20^\circ \text{C}$: в качестве рабочей жидкости использовалась вода с объемной плотностью $\rho = 998 \text{ кг/м}^3$ и динамической вязкостью $\mu = 1,002 \text{ МПа}\cdot\text{с}$; материалом пьезопривода была выбрана керамика с модулем Юнга $E = 30 \text{ ГПа}$ и коэффициентом Пуассона $\lambda = 0,29$. Угол между пьезоприводом и каналом составлял $\alpha = 6^\circ$.

Решением линейной задачи упругости (6) с условием нагружения пьезопривода (9) было получено, что максимальное поперечное отклонение

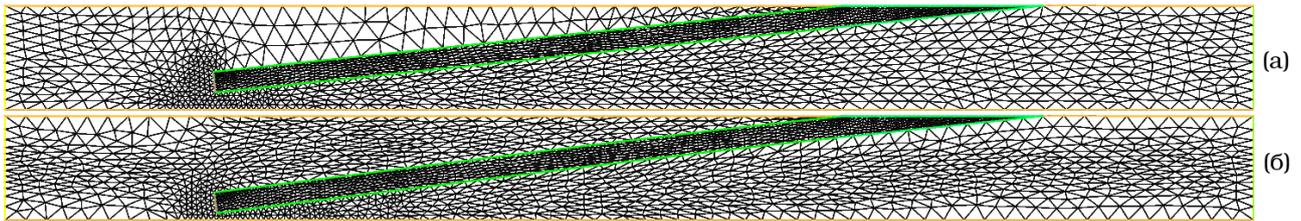


Рис. 2. Расчетная сетка для установившегося течения без колебаний пьезопривода (а) с 1872 КЭ и динамического течения с колебаниями пьезопривода частотой $f = 0,2$ Гц (б) с 2128 КЭ; $t = 3T/4$, $\Delta p = 1$ Па

пьезопривода достигает заданного значения ΔH_m для амплитуды давления $p_m = 9,6$ кПа.

Моделирование происходит на двух двумерных согласованных между собой расчетных сетках. Сначала решались уравнения упругости на сетке, определяющей пьезопривод. По полученному полю деформации на каждом шаге по времени перестраивалась расчетная сетка для канала. Затем на расчетной сетке канала решались уравнения гидродинамики. Для предотвращения появления ошибки, связанной с перемещением узлов одного конечного элемента (КЭ) внутрь другого КЭ (появление отрицательных объемов $V_e \leq 0$), при перестроении расчетной сетки для канала был разработан алгоритм «безопасной» перестройки сетки (в случае возникновения отрицательных объемов меняется коэффициент трансформации, в противном случае происходит трансформация; проверка повторяется до полной трансформации расчетной сетки). Схема алгоритма представлена далее в Приложении. На рис. 2 показана расчетная сетка моделирования Пуазейлевского течения без колебаний пьезоэлемента и с колебаниями частотой $f = 0,2$ Гц.

На рис. 3(а) показана зависимость управляющего сигнала F_p (синие круги), заданного выраже-

нием (8), и отклонение пьезопривода ΔH_p (красные диски) от времени t . Значение ΔH_p рассчитывалось по компонентам s_x и s_y вектора деформаций \mathbf{s} взятых в точке С (центральная точка на границе Γ_6 , обозначена на рис. 1) из геометрических соотношений:

$$\Delta H_p = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}.$$

Видно, что зависимость является линейной и использование граничных условий Неймана в виде (9) полностью соответствует условию

$$\Delta H_p = \Delta H_m F_p$$

для величины давления

$$p_p = p_m F_p.$$

Разделив первое условие на второе, можно напрямую связать ΔH_p и p_p :

$$\Delta H_p = \Delta H_m \frac{p_p}{p_m}.$$

На рис. 3(б) показана траектория движения центральной граничной точки пьезопривода С. Из-за того, что угол α является острым, перемещение

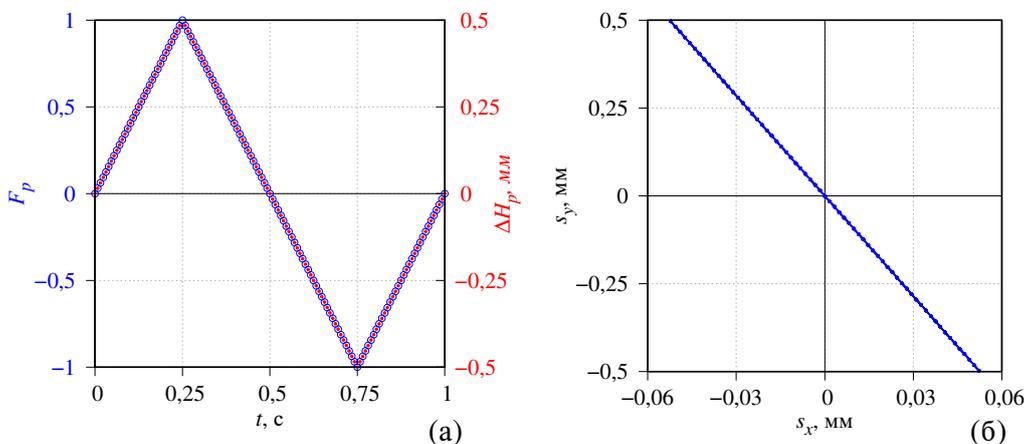


Рис. 3. Зависимость управляющего сигнала F_p (синие круги) и отклонение пьезопривода ΔH_p (красные диски) от времени t (а) и траектория движения центральной точки С (б); $f = 1$ Гц

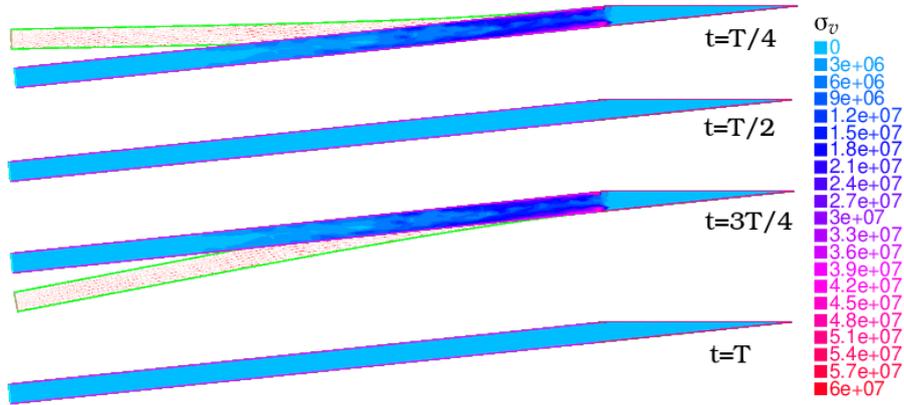


Рис. 4. Напряжения фон Мизеса (11) при деформации пьезопривода в различные моменты периода T . Величина деформаций s увеличена в 4 раза

идет в основном по оси Oy , а сама траектория является практически линейной (представляет собой небольшую дугу с большим радиусом кривизны).

На рис. 4 показаны деформации и возникающие в пьезопроводе эквивалентные напряжения фон Мизеса, вычисленные по формулам [21]:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2}, \quad (11)$$

где

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x};$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

Напряжения распределены вдоль пьезопривода нелинейно с концентрацией напряжений вблизи точки закрепления. Для наглядности величина деформаций увеличена в 4 раза.

Рассмотрим влияние колебаний пьезопривода на динамику течения жидкости. Скорость течения жидкости определяется двумя механизмами: приложенный вдоль слоя перепад давления Δp индуцирует пуазейлевское течение; смещение поверхности пьезопривода во время колебаний вызывает смещение жидкости. При высоте канала 5 мм зазор между пьезоэлементом и нижней стенкой канала составляет $\ell \sim 0,5-1,5$ мм, т.е. пьезопровод создает динамическое гидросопротивление. Изменение скорости течения жидкости $u_x(y)$ (и ее амплитуды u_m) через зазор и расход жидкости Q можно оценить по формуле пуазейлевского течения в плоском канале [24]:

$$u_x(y) = \frac{u_m}{2} y(y - \ell), \quad u_m = \frac{\Delta p \ell^2}{8\mu L}, \quad Q = \frac{2u_m \ell \ell^*}{3\mu}, \quad (12)$$

где $\ell^* = 5$ мм — фиктивная ширина канала вдоль оси Oz (вводится для удобства и сохранения размерности), т.е. скорость течения жидкости меняется до

$$\frac{u_x(\ell_0 + \Delta H_m)}{u_x(\ell_0 - \Delta H_m)} \approx \left(\frac{1,5}{0,5} \right)^2 = 9$$

раз в зависимости от фазы деформации пьезопривода, где ℓ_0 — ширина зазора между стенкой канала и недеформированным пьезоприводом. Также амплитуда скорости на входном и выходном отверстиях будет в $H_c/\ell \approx 3,3-10$ раз ниже, поскольку расход в любом вертикальном сечении канала остается неизменным:

$$Q = \frac{2u_m(0)H_c}{3\mu} \ell^* = \frac{2u_m(x_\ell)\ell}{3\mu} \ell^*, \quad (13)$$

где $u_m(x_\ell)$ — амплитуда скорости в зазоре.

Скорость жидкости вблизи пьезопривода определяется скоростью деформаций поверхности пьезопривода $\mathbf{u}(\Gamma_4, \Gamma_6) \sim \mathbf{s}/\tau$ по граничным условиям (10), где $\tau = 1/(f \cdot N_T)$ зависит от частоты f и количества временных шагов за период $N_T = 128$, т.е. составляет $u \sim 0,125 \cdot f$ [м/с] (квадратными скобками здесь и далее обозначена полная размерность формулы, включающая размерность числовых коэффициентов). Расход жидкости в результате смещения поверхности пьезопривода определяется как объем смещенной жидкости, деленный на время, за которое это смещение произошло:

$$Q = 0,5 \cdot \Delta H_c \cdot L_p \cdot \ell^* \cdot \tau \approx 5 \cdot f \text{ [мм}^3/\text{с]}.$$

Используя формулу (13), получим дополнительную прибавку к скорости в зазоре за счет деформации пьезопривода $\delta u \approx 14 \cdot f$ [мм/с], т.е. скорость жидкости в зазоре может быть значительно выше скорости на поверхности пьезопривода.

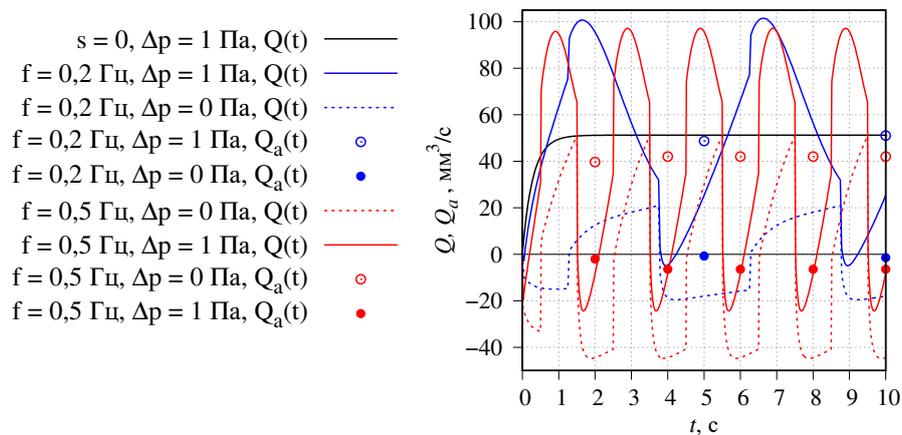


Рис. 5. Расход жидкости Q (линии) и средний расход жидкости Q_a (символы) в зависимости от времени при различных режимах работы пьезопривода: пьезопривод неподвижен (черная линия); колебания пьезопривода с частотой $f = 0,2$ Гц (синие линии и символы) и $f = 0,5$ Гц (красные линии и символы). Перепад давления $\Delta p = 0$ Па (сплошные линии) и $\Delta p = 1$ Па (пунктирные линии)

Для повышения точности расчетов использовалась адаптивная (обновляемая на каждом временном шаге) неравномерная (плотность КЭ зависела от градиентов компонент скорости $[\nabla u_x, \nabla u_y]$) расчетная сетка.

Расход жидкости Q на выходном отверстии Γ_4 определялся численным интегрированием

$$Q(t) = \ell^* \int_{\Gamma_4} u_x(t) d\Gamma.$$

Средний расход жидкости Q_a определялся как изменение объема жидкости V , протекающей через выходное отверстие за период колебаний $T = 1/f$:

$$Q_a = [V^i(T) - V^{i-1}(T)] \cdot f,$$

где индексы i и $i - 1$ соответствуют текущему и предыдущему периоду.

На рис. 5 показаны расход жидкости Q и средний расход жидкости Q_a от времени при различных вариантах работы пьезопривода. В отсутствии деформаций и при постоянном перепаде давления устанавливается стационарный режим течения жидкости (расход жидкости выходит на постоянную величину) за характерное время релаксации скорости τ_u :

$$\tau_u = \frac{\rho \ell^2}{\eta}. \tag{14}$$

Видно, что течение (рис. 5, сплошная черная линия) выходит на стационарный режим за время порядка $\tau_u \approx 1$ с.

При колебании пьезопривода в отсутствие перепада давления Δp течение создается вытал-

киванием жидкости за счет перемещения поверхности. В интервалах времени $t = [0, T/4]$ и $t = [3T/4, T]$ пьезопривод деформируется вверх, жидкость выталкивается в отрицательном направлении (по оси Ox) и зазор ℓ увеличивается. За время $t = [3T/4, 3T/4 + \tau]$ расход жидкости выходит на квазистационарный режим. Помимо выталкиваемой жидкости добавляется течение через зазор в отрицательном направлении (в результате падения давления в области зазора). При смещении пьезоэлемента вниз ($t = [T/2, 3T/4]$) зазор уменьшается. Вследствие инерции жидкости требуется время (порядка τ_u) для создания течения жидкости через зазор в положительном направлении, но зазор за это время уменьшается, что приводит, согласно (12), к меньшему дополнительному потоку жидкости. За период T в положительном направлении протекает меньше жидкости, чем в отрицательном, и средний расход жидкости Q_a отличен от нуля. С ростом частоты колебаний период T уменьшается и вклад интервала времени, когда течение меняет свое направление, увеличивается, что приводит к росту $|Q_a|$. С увеличением частоты в пределах $f < 1/\tau_u$ амплитуда Q (а также $|Q_a|$) возрастает пропорционально f .

Если к каналу приложить дополнительный перепад давления, то, согласно (12), расход жидкости будет пропорционален ℓ^3 : с уменьшением ℓ поток создается преимущественно движением границы пьезопривода, а при увеличении ℓ основной вклад идет от пуазейлевского течения. Пик расхода жидкости в интервале $t = [T/2, T/2 + \tau_u]$ соответствует широкому зазору и выталкиванию жидкости в положительном направлении. С ростом частоты (в пределах $f < 1/\tau_u$) минимальное значение Q

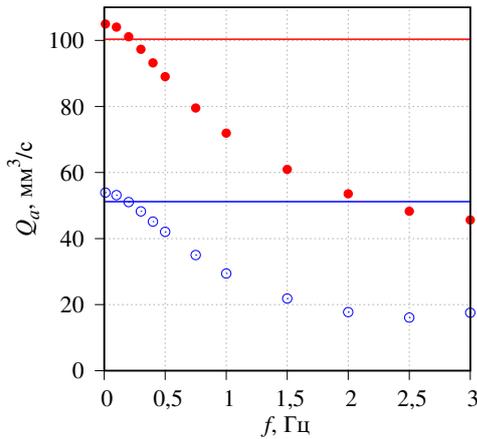


Рис. 6. Зависимость среднего расхода жидкости Q_a от частоты f при перепаде давления $\Delta p = 1$ Па (синяя линия с символами) и $\Delta p = 2$ Па (красная линия с символами). Линии – установившееся пуазейлевское течение без деформаций пьезопривода; символы – течение с колебаниями пьезопривода

уменьшается пропорционально f (выталкивание жидкости пьезоприводом), а максимальное значение Q незначительно снижается (вклад от пуазейлевского течения не меняется, а влияние инерции жидкости увеличивается).

При частотах $f \geq 1/\tau_u$ период колебаний $T \ll \tau_u$ и движение поверхности пьезоэлемента оказывает значительное влияние на пуазейлевское течение во время всего периода. Зависимость среднего расхода жидкости Q_a от частоты переходит с линейной на константу $Q_a \rightarrow Q_s$ (рис. 6). С ростом перепада давления Δp время выхода на стационарное значение Q_s увеличивается, поскольку с ростом скорости перемещения поверхности пьезопривода $u_p \sim f$ создается дополнительный перепад давления $\delta p \sim f^2$ вблизи поверхности пьезопривода.

Деформации пьезопривода оказывают значительное влияние на динамику жидкости. Но жидкость также оказывает влияние на деформацию пьезопривода. Максимальное напряжение U_m соответствует максимальной деформации ΔH_m в воздушной среде, но при погружении пьезоэлемента в жидкость среда оказывает сопротивление деформациям. Величина сопротивления определяется перепадом давления жидкости относительно противоположных сторон поверхности пьезопривода (на рис. 1 обозначены через Γ_4). Расчеты показали, что реальная амплитуда колебаний пьезопривода равняется

$$\Delta H_m^* = \Delta H_m - \delta H_m,$$

где

$$\delta H_m = 5 \cdot 10^{-6} \cdot f^2 \text{ [мм]}.$$

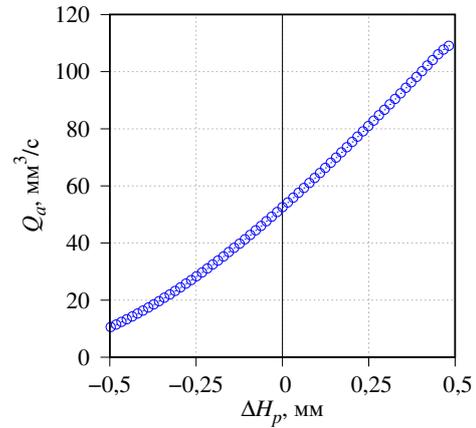


Рис. 7. Расход жидкости Q в зависимости от величины перемещения пьезопривода ΔH_p при перепаде давления $\Delta p = 1$ Па

Например, при частоте $f = 100$ Гц величина $\delta H_m = 0,05$ мм, т.е. составляет 10% от максимального значения ΔH_m . Отметим, что предложенная модель при высоких частотах требует больших вычислительных ресурсов. Оценка величины δH_m проводилась в диапазоне $f = 0,01 \div 20$ Гц.

Рассмотрим практические приложения полученных результатов.

При малых частотах колебаний создается отличное от нуля течение жидкости, что позволяет (в отсутствии перепада давления Δp) разработать миниатюрный насос со средним расходом жидкости порядка 10 мкл/с. Данный насос можно применять в замкнутом контуре. В открытой системе необходимо преодолеть силы поверхностного натяжения. В воде поверхностное натяжение создает на границе давление

$$P \sim 2\zeta/H_c \approx 28 \text{ Па}$$

с коэффициентом поверхностного натяжения $\zeta = 0,073$ Н/м [24]. Предложенная модель позволяет достичь такого перепада давления на частотах порядка $f = 6$ Гц, однако, для определения возможности создания течения в открытой системе требуются дополнительные, более детальные исследования, учитывающие поверхностное натяжение и гравитацию.

Изменением напряжения U на пьезоприводе можно менять величину перемещения пьезопривода при этом меняя высоту зазора ℓ и величину создаваемого гидросопротивления. На рис. 7 показана зависимость Q_a от величины перемещения ΔH_p . Видно, что средний расход жидкости мож-

но регулировать в широком диапазоне (минимальная и максимальная величины Q_a изменяются в 11 раз), что можно использовать в качестве миниатюрного регулятора жидкости со временем перехода на новое стационарное значение расхода жидкости τ_{ii} (14).

Геометрия модели позволяет настроить расположение пьезопривода таким образом, чтобы при некоторой деформации зазор был нулевым, что можно использовать в качестве дозатора жидкости. Пределом применимости модели дозатора является величина перепада давления Δp : сила, создаваемая этим давлением, не должна превышать блокирующую силу пьезопривода F_b .

4. Заключение

Разработана двумерная компьютерная модель течения жидкости в плоском канале под действием перепада давления с динамически изменяемым гидродинамическим сопротивлением, представляющим собой погруженный в жидкость пьезоэлектрический привод с поперечным изгибом.

Показано, что использование граничных условий Неймана позволяет получить линейную зависимость величины деформации от приложенного к поверхности давления. Определены величины деформации и напряжений на пьезоприводе в процессе колебаний. Для повышения точности расчетов строилась адаптивная динамическая расчетная сетка канала с плотностью КЭ, определяемой градиентом поля скоростей. Разработан алгоритм «безопасной» перестройки расчетной сетки, предотвращающий появление отрицательных объемов. При частотах колебаний $f < 1$ Гц пьезопривод создает ненулевой средний за период расход жидкости.

При наличии Пуазейлевского течения в канале с ростом частоты колебаний пьезоэлемента средний расход жидкости уменьшается линейно при $f < 1$ Гц и выходит на постоянное значение при $f > 3$ Гц. Проведена оценка сопротивления жидкости деформации пьезопривода. Предложены практические приложения модели: пьезоэлектрический микронасос для замкнутого контура; регулятор расхода жидкости и дозатор жидкости.

Приложение. «Безопасная» перестройка расчетной сетки

В динамическом режиме модели деформации пьезопривода приводят к изменению геометрии канала и в следствии этого на каждом временном шаге необходимо перестраивать расчетную сетку канала. В области зазора между пьезоприводом и стенкой канала, где скорость жидкости максимальна (а, значит при исполь-

зовании адаптивной сетки размеры КЭ будут минимальными), величина перемещения КЭ на границе пьезопривода также максимальна. В результате этого может возникнуть ситуация, когда КЭ после перемещения сжимает соседний элемент на величину, превышающую его размер, что приводит к появлению элементов с отрицательным объемом и аварийному прерыванию программы. Идея предлагаемого алгоритма следующая: вместо полного перемещения узлов КЭ производятся частичные перемещения с шагом, предотвращающим появление отрицательных объемов. После каждого частичного перемещения производилась адаптация расчетной сетки. Частичные перемещения продолжались до тех пор, пока в сумме не дадут полное перемещение:

```

1:  $t \leftarrow 1.0$ 
2:  $c \leftarrow 1.0$ 
3: while  $t > 0$  do
4:   if  $\text{checkmovemesh}(V_e > 0.0)$  then
5:      $\text{movemesh}(x \leftarrow x + c \cdot s_x; y \leftarrow y + c \cdot s_y)$ 
6:      $\text{em adaptmesh}()$ 
7:      $t \leftarrow t - c$ 
8:   else
9:      $c \leftarrow c/2.0$ 
10:  end if
11: end while

```

Для реализации алгоритма использовались следующие средства *FreeFem++*: проверка возможности появления отрицательных объемов *checkmovemesh* (строка 4), трансформация сетки *movemesh* (строка 5) и адаптация сетки *adaptmesh* (строка 6). Отметим, что данный алгоритм работает при дроблении диапазона трансформации не более, чем 31 раза (зависит от разрядности целого типа данных) без потери точности, поскольку при делении на 2 происходит сдвиг разрядности на одну позицию. При используемых параметрах расчета (размеры КЭ лежат в интервале 0,1–0,25 мм, максимальное смещение на пьезоприводе составляло $\Delta H_p/64 \approx 0,016$ мм) производилось не более 2-х частичных перемещений.

Список литературы

- [1] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics. *Micro and Nano Engineering*. 2019. V. 2. Pp. 76–91. DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003
- [2] Dietzel A. A Brief Introduction to Microfluidics. *Microsystems for Pharmatechnology. Manipulation of Fluids, Particles, Droplets, and Cells*. Springer, Cham. 2016. Pp. 1–21. DOI: 10.1007/978-3-319-26920-7
- [3] Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Капиллярный микрозахват с обратной связью. Патент на изобретение № 2261795. Опубликовано: 10.10.2005. Бюл. № 28. https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html

- [4] Laser D.J., Santiago J.G.: A review of micropumps. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. V. 14, No. 6. Pp. R35–R64.
DOI: [10.1088/0960-1317/14/6/R01](https://doi.org/10.1088/0960-1317/14/6/R01)
- [5] Bungartz H.-J., Schäfer M.: *Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization*. LNCSE. 2006. V. 5. DOI: [10.1007/3-540-34596-5](https://doi.org/10.1007/3-540-34596-5)
- [6] Насибуллаев И.Ш. Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // *Вычислительные технологии*. 2016. Т. 21, № 2. Pp. 26–41.
<http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1724>
- [7] Мазо А.Б. *Вычислительная гидродинамика. Часть 2. Сеточные схемы метода конечных элементов*. Учебное пособие. Казань: Казанский университет, 2018. 125 с
https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F866005032/UchPosVG_2.pdf (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [8] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В. Динамика течения жидкости в технических системах с жиклерами // *Известия Уфимского научного центра РАН*. 2015. № 4. С. 20–25.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25732231>
- [9] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–9.
DOI: [10.21662/uim2016.1.001](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.001)
- [10] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через систему связанных элементов технического устройства типа труба–гидросопротивление–труба // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 2. С. 141–149.
DOI: [10.21662/uim2016.2.021](https://doi.org/10.21662/uim2016.2.021)
- [11] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66.
DOI: [10.21662/uim2017.1.009](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.009)
- [12] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлемент канал // *Многофазные системы*. 2018. Т. 13, № 3. С. 1–10.
DOI: [10.21662/mfs2018.3.001](https://doi.org/10.21662/mfs2018.3.001)
- [13] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Моделирование течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом эластичный микроканал системы охлаждения микрозахвата // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2019. Т. 20, № 12. С. 740–750.
DOI: [10.17587/mau.20.740-750](https://doi.org/10.17587/mau.20.740-750)
- [14] Ballas R.G. *Piezoelectric Multilayer Beam Bending Actuators: Static and Dynamic Behavior and Aspects of Sensor Integration*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2007. 358 p.
DOI: [10.1007/978-3-540-32642-7](https://doi.org/10.1007/978-3-540-32642-7)
- [15] STEMiNC STEINER & MARTINS, INC.
<http://steminc.com> (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [16] Thorlabs Inc.
<http://thorlabs.com> (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [17] Micromechatronics, Inc.
<http://mmech.com> (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [18] Bimitech, Inc.
<http://bimitech.com> (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [19] Johnson Matthey Piezo Products GmbH.
<http://piezoproducts.com> (дата обращения: 10.05.2020 г.).
- [20] Rougeot P., Mohand-Ousaid A., Gendreau D., Hammouche M., Rakotondrabe M. Design, modeling and simulation of a three-layer piezoelectric cantilevered actuator with collocated sensor. *Proc. SPIE 9859, Sensors for Next-Generation Robotics III*, 98590F. 2016.
DOI: [10.1117/12.2229515](https://doi.org/10.1117/12.2229515)
- [21] Ландау Л., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости*. М.: Наука, 2003. 259 с.
- [22] Ландау Л., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика*. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [23] Hecht, F. New development in FreeFem++. *Journal of Numerical Mathematics*. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.
DOI: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013)
- [24] Bruus H. *Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition*. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. 237 p.
http://homes.nano.aau.dk/Lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20Lectures.pdf (дата обращения: 10.05.2020 г.)



Two-dimensional dynamic model of the interaction of a fluid and a piezoelectric bending actuator in a plane channel

Nasibullayev I.Sh.^{*}, Darintsev O.V.^{*,**}

^{*}Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

^{**}Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

The paper proposes a two-dimensional computer model of the fluid flow in a plane channel under the action of an applied pressure drop with a flat ceramic piezoelectric actuator immersed in it, bending in the transverse direction in proportion to the applied electric voltage. A mathematical model of the coupled liquid-piezodrive system in variational form for numerical simulation by the finite element method is proposed. Since the assignment of the Dirichlet boundary conditions for displacement in this problem, is difficult, an equivalent piezo actuator deformation scheme using the Neumann boundary conditions is constructed. The deformations and equivalent stresses of von Mises on a piezo actuator are calculated. The influence of the geometry of the channel and the hydrodynamic resistance formed by the piezo actuator on the dynamics of the fluid flow is analyzed. An algorithm is proposed for adaptive dynamic remeshing of the channel computational mesh under deformations exceeding the size of finite elements. With a symmetric control signal supplied to the piezoelectric actuator, the asymmetry of the geometry leads to a violation of the symmetry of the fluid flow within the period, both in terms of fluid flow rate and in time. In the absence of a pressure drop at low frequencies of the oscillations of the piezoelectric element (of the order of the inverse relaxation time of the velocity), the period-average liquid flow rate is nonzero and increases with increasing frequency. In the presence of an external pressure drop along the layer, the average liquid flow rate is proportional to the pressure drop; at low frequencies, it is inversely proportional to the frequency; with increasing frequency, it reaches saturation. Based on the results of numerical modeling, various variants of new microfluidic technical devices generating a fluid flow using a piezoelectric bending actuator are proposed: a micropump creating a closed-circuit flow; fluid flow regulator and fluid volume dispenser.

Keywords: piezoelectric bending actuator, linear elasticity, hydrodynamics, hydrodynamic resistance, plane channel, FSI, finite element method

References

- [1] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics. *Micro and Nano Engineering*. 2019. V. 2. Pp. 76–91.
DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003
- [2] Dietzel A. A Brief Introduction to Microfluidics. *Microsystems for Pharmatechnology. Manipulation of Fluids, Particles, Droplets, and Cells*. Springer, Cham. 2016. Pp. 1–21.
DOI: 10.1007/978-3-319-26920-7
- [3] Darintsev O.V., Migranov A.B. [Capillary micro-grip with feedback] Capilarnyi mikrozhvat s obratnoi svyazju. Patent RF No. 2261795 RU, [Published] Opublikovano 10.10.2005. Byul. N. 28 (in Russian).
https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html
- [4] Laser D.J., Santiago J.G.: A review of micropumps. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. V. 14, No. 6. Pp. R35–R64.
DOI: 10.1088/0960-1317/14/6/R01
- [5] Bungartz H.-J., Schäfer M.: Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization. LNCSE. 2006. V. 5.
DOI: 10.1007/3-540-34596-5
- [6] Nasibullayev I.Sh. [The development of a computer model for the main element of the fuel metering unit] Razrabotka komputernoy modeli osnovnogo elementa agregata dozirovaniya topliva. [Computational Technologies] Vychislitel'nye tehnologii. 2016. V. 21, No. 2. Pp. 26–41 (In Russian).
<http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1724>
- [7] Mazo A.B. [Computational hydrodynamics. Part 2. Grid schemes of the finite element method. Textbook] Vychislitel'naya gidrodinamika. Chast' 2. Setochnye shemy metoda konechnykh elementov. Kazan: Kazan University, 2018. 125 p. (In Russian).
https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F866005032/UchPosVG_2.pdf (Accessed: 10.05.2020 r).

- [8] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Denisova E.V. [Dynamics of fluid flow in technical systems with jets] Dinamika techeniya zhidkosti v tehnikeskikh sistemah s jiklerami. *Bulletin of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences* [Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN]. 2015. No. 4. P. 20–25 (In Russian).
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25732231>
- [9] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The effect of temperature on the dynamics of fluid flow in technical systems with jets] Vliyaniye temperatury na dinamiku techeniya zhidkosti v tehnikeskikh sistemah s jiklerami. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]ches, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 1. P. 1–9 (In Russian).
DOI: 10.21662/uim2016.1.001
- [10] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The fluid flow through a system of connected elements of a technical device such as pipe-hydraulic resistance-pipe] Techeniya zhidkosti cherez sistemu svyazannykh elementov tekhnicheskogo ustroystva tipa truba-gidrosoprotivleniye-truba. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]ches, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 2. P. 141–149 (In Russian).
DOI: 10.21662/uim2016.2.021
- [11] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Fluid flow through hydraulic resistance with dynamically changing geometry] Techeniy zhidkosti cherez gidrosoprotivleniye s dinamicheski izmenyayemoy geometriyey. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]ches, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2017. V. 12, N. 1. P. 59–66 (In Russian).
DOI: 10.21662/uim2017.1.009
- [12] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Study of fluidflow through a channel deformed by piezoelement] Izucheniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom kanal. *Multiphase Systems* [Mnogofaznyye sistemy]. 2018. V. 13, No. 3. Pp. 1–10 (In Russian).
DOI: 10.21662/mfs2018.3.001
- [13] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Simulation of fluid flow through a elastic microchannel deformed by a piezoelement in microgrip cooling systems] Modelirovaniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom elastichnyy mikrokanal sistemy okhlazhdeniye mikrozhkhvata. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2019. V. 20, No. 12. Pp. 740–750 (In Russian).
DOI: doi:10.17587/mau.20.740-750
- [14] Ballas R.G. Piezoelectric Multilayer Beam Bending Actuators: Static and Dynamic Behavior and Aspects of Sensor Integration. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2007. 358 p.
DOI: 10.1007/978-3-540-32642-7
- [15] STEMiNC STEINER & MARTINS, INC.
<http://steminc.com> (Accessed: 10.05.2020 r).
- [16] Thorlabs Inc.
<http://thorlabs.com> (Accessed: 10.05.2020 r).
- [17] Micromechatronics, Inc.
<http://mmech.com> (Accessed: 10.05.2020 r).
- [18] Bimitech, Inc.
<http://bimitech.com> (Accessed: 10.05.2020 r).
- [19] Johnson Matthey Piezo Products GmbH.
<http://piezoproducts.com> (Accessed: 10.05.2020 r).
- [20] Rougeot P., Mohand-Ousaid A., Gendreau D., Hammouche M., Rakotondrabe M. Design, modeling and simulation of a three-layer piezoelectric cantilevered actuator with collocated sensor. Proc. SPIE 9859, Sensors for Next-Generation Robotics III, 98590F. 2016.
DOI: 10.1117/12.2229515
- [21] Landau L.D., Lifshitz E.M. Theoretical physics. V. 7. Theory of Elasticity. M.: Nauka, 2003. 259 p. (In Russian).
- [22] Landau L.D., Lifshitz E.M. Theoretical physics. V. 6. Fluid Mechanics. M.: Nauka, 1988. 736 p. (In Russian).
- [23] Hecht, F. New development in FreeFem++. Journal of Numerical Mathematics. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.
DOI: 10.1515/jnum-2012-0013
- [24] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. 237 p.
http://homes.nano.aau.dk/Lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20lectures.pdf (Accessed: 10.05.2020 r)



Взаимодействие акустической волны с многослойной средой, содержащей слой пузырьковой жидкости¹

Агишева У.О., Галимзянов М.Н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Дискретно-слоистые среды интересны для изучения, поскольку каждый слой своими свойствами может существенно отличаться от соседних, что может быть использовано в технологических процессах. Присутствие небольшого по объему количества пузырьков существенно увеличивает сжимаемость среды, при этом плотность пузырьковой среды сохраняется близкой к значению плотности несущей фазы. С прикладной точки зрения интересной является возможность полного поглощения энергии падающей волны за счет подбора комбинации свойств слоев (протяженности, объемного содержания дисперсной фазы и т.д.). В настоящей работе на основе уравнений механики дисперсных сред рассматривается отражение и прохождение акустических волн, проходящих под прямым углом через трехслойную среду в трубопроводе, содержащую слой пузырьковой жидкости. Из условия существования решения в виде затухающей бегущей волны выписаны дисперсионные соотношения для каждого из возможных слоев; на их основе аналитически выведены зависимости амплитуды падающей и прошедшей волн от скорости распространения импульса. Получены коэффициенты отражения и прохождения через границу раздела сред как в общем, так и в частных случаях для каждого слоя. Данные соотношения позволяют рассчитать возможные последствия при волновом воздействии на рассмотренные среды в случае возникновения чрезвычайных ситуаций на производстве и для их предотвращения.

Ключевые слова: акустическая волна, многослойная среда, пузырьки, дисперсионное уравнение, коэффициент отражения, коэффициент прохождения

1. Введение

В отечественной литературе можно найти достаточно большое количество работ, посвященных анализу распространения акустических волн в многофазных средах, а также в средах, имеющих дискретно-слоистую структуру. Отметим некоторые из работ, непосредственно являющиеся основой настоящей статьи. В одной из первых работ по данной тематике рассмотрен вопрос о распространении малых возмущений в жидкости с пузырьками газа в предположении m -скоростной и m -давленческой модели ($m \geq 2$) [1]. Получено дисперсионное уравнение и выявлено влияние мас-

сообмена (в случае паровых пузырьков), теплообмена, скольжения фаз, полидисперсности на скорость распространения и на затухание малых возмущений. В работе [2] исследовано распространение малых возмущений в двухфазной среде, газовой фазой которой представляет двухкомпонентную смесь паров жидкой фазы и некоего «инертного» газа, не участвующего в процессе массообмена между фазами. Рассмотрены случаи, когда газовая фаза является несущей и, наоборот, взвешенной фазой. Выявлено влияние тепломассообмена и скольжения фаз на скорость распространения и затухание малых возмущений. В [3] рассмотрена задача о распространении малых синусоидальных волн в жидкости, содержащей паровые пузырьки. Показано, что равновесное состояние двухфазной пузырьковой парожидкостной среды будет устойчивым только при определенном условии, налагаемом на объемное содержание и разме-

¹Работа поддержана средствами государственного бюджета по государственному заданию на 2019–2022 годы (№ 0246-2019-0052).

ры пузырьков. Проанализировано влияние частоты возмущений, теплообмена между фазами, поверхностного натяжения, объемного содержания и размера пузырьков на скорость распространения и коэффициент затухания.

В начале 2000-х гг. появилось несколько работ, в которых рассматривалось распространение волн в пузырьковых средах в двумерной постановке [4, 5]. В [4] рассмотрен случай распространения волнового сигнала в кусочно-неоднородной по объемному содержанию пузырьков в поперечном направлении области. Получены критерии усиления и ослабления волновых сигналов пузырьковыми экранами конечных размеров. В [5] изучена эволюция волн давления в трубе, заполненной газожидкостной средой, при ступенчатом распределении пузырьков по сечению трубы. Показано, что из-за появления поперечных течений при неравномерном распределении пузырьков происходит более интенсивное затухание импульсного давления по сравнению со случаем гомогенного распределения.

В работе [6] дан анализ основных публикаций журнала «Теплофизика высоких температур» за последние 50 лет по проблемам и особенностям изучения течений сплошной среды, содержащей дисперсную примесь в виде твердых частиц, капель или пузырей.

В работах Шагапова В.Ш. и Сарапуловой В.В. рассмотрены случаи «косого» падения акустического сигнала на границу раздела между парогазокапельной средой и воздухом [7] и пузырьковой и «чистой» жидкостями [8]. Определены критические углы падения, при которых также возможно полное отражение волны от границы раздела. Работы по распространению начального локализованного по поперечной координате волнового импульса в однородной пузырьковой смеси [9, 10] стали продолжением исследований из [4] и расширили ранее полученные результаты.

Настоящая работа является продолжением серии исследований, представленных в [11–16]. Представлены математические модели, определяющие отражение и прохождение акустической волны через многослойную среду. Используя выбранные уравнения и из условия существования решения в виде затухающей бегущей волны выписаны дисперсионные соотношения для каждого из возможных слоев. На основе полученных дисперсионных соотношений аналитически выведены зависимости амплитуды падающей и прошедшей волн от скорости распространения волнового сигнала. Получены коэффициенты отражения и прохождения через границу раздела сред как в общем, так и в частных случаях отдельно.

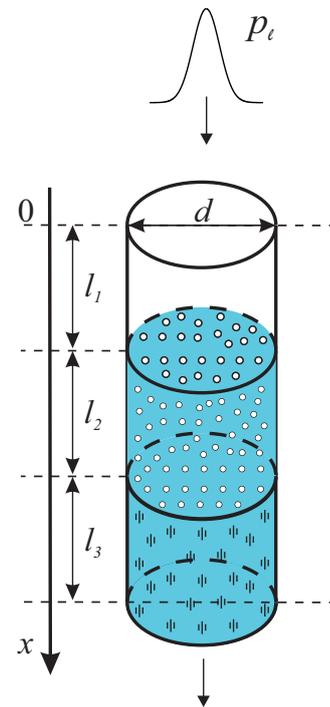


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области в общем случае

2. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть вертикальный трубопровод содержит участок с многослойной средой, например, имеется пузырьковый слой между двумя слоями жидкости или слой между воздухом и водой. Давление во всех слоях одинаковое. Рассмотрим малые возмущения, инициируемые изменением давления на одной из границ трубопровода. Будем полагать, что длины волн λ в канале значительно больше, чем диаметр канала. Кроме того, эволюция волн (затухание акустических сигналов) происходит из-за проявления вязкости и теплопроводности в тонком слое вблизи поверхности стенок трубопровода. Это условие в случае гармонических волн, в частности, означает выполнение следующего неравенства $d \gg 4\sqrt{\nu^{(j)}}/\omega$, где d — внутренний диаметр трубопровода; $\nu^{(j)}$ — коэффициент температуропроводности ($j = T$) и кинематической вязкости ($j = \mu$) газа или жидкости, находящейся в трубопроводе. Течение в канале будем полагать одномерным (параметры течения скорость и давление зависят от времени и координаты z , отсчитываемой от входа трубопровода). Для этого, в свою очередь, необходимо выполнение условия: $\lambda > d$ ($\lambda = 2\pi C/\omega$; C — скорость звука в среде) [17].

Процесс эволюции возмущений давления в многослойной системе можно разбить на отдельные этапы (рис. 1):

- распространение сигнала на участке между началом трубопровода $z = 0$ до первой границы раздела $z = l_1$;
- отражение и прохождение через границу раздела между первым слоем и вторым ($z = l_1$);
- распространение сигнала по второму участку от $z = l_1$ до второй границы раздела $z = l_1 + l_2$;
- отражение и прохождение через границу раздела между вторым и третьим слоями ($z = l_1 + l_2$);
- распространение сигнала по третьему участку от $z = l_1 + l_2$ на расстоянии $z = l_3$.

2.1. Трубопровод, заполненный газом

Будем полагать, что при распространении возмущений в трубопроводе сжатие и растяжение газа происходит в адиабатическом режиме, а температурный перепад между газом и стенками обсадной колонны и насосно-компрессорной трубы реализуется в тонком пограничном слое вблизи стенки. При этих предположениях на основе первого начала термодинамики может быть получено следующее уравнение [18]:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \frac{1}{C_g^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (\gamma - 1) \frac{4q}{d} \right), \quad (1)$$

$$q = \sqrt{\frac{v_g^{(T)}}{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p(z, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \quad C_g = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}},$$

$$\gamma = \frac{c_g}{c_g - R_g}, \quad v_g^{(T)} = \frac{\lambda_g}{\rho_{g0} c_g}.$$

Здесь p — возмущение давления; C_g — скорость звука в газе при адиабатическом режиме сжатия и растяжения; c_g , R_g , γ , λ_g — теплоемкость газа при постоянном давлении, приведенная газовая постоянная, показатель адиабаты газа, коэффициент теплопроводности, соответственно.

Уравнение неразрывности в более общем виде с учетом (1) и того, что в начальный момент времени $t_0 = -\infty$ среда покоилась ($p = 0$, $v_z = 0$), можно привести к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(p + 4 \frac{\sqrt{v_g^{(T)}} (\gamma - 1)}{d \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{p(z, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \right) + \rho_{g0} C_g^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где ρ и v_z — возмущения плотности и скорости газа, ρ_0 — невозмущенное значение (здесь и в дальнейшем индексом (0) снизу снабжены невозмущенные значения параметров течения).

2.2. Трубопровод, заполненный жидкостью

В силу малых колебаний температуры при сжатии жидкости эффектами теплопередачи между флюидом и стенкой трубопровода можно пренебречь, и вместо уравнения (1) будем использовать [18]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_{\ell 0} C_\ell^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где C_ℓ — скорость звука в жидкости.

Кроме теплопередачи на распространение сигналов в трубопроводе оказывают влияние процессы диссипации энергии, связанные с наличием внутреннего трения (вязкости), которое проявляется лишь в тонком пограничном слое вблизи стенки трубопровода. Уравнение, описывающее распространение импульсов с учетом сил вязкого трения о стенки трубопровода, имеет вид:

$$\rho_{\ell 0} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{4\sigma}{d}, \quad (4)$$

где касательное напряжение σ на поверхности стенки может быть определено из соотношения [19]:

$$\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{\pi v_\ell^{(\mu)}}} \int_{-\infty}^t \frac{(\partial v_z / \partial \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \quad v_\ell^{(\mu)} = \frac{\mu}{\rho_{\ell 0}}. \quad (5)$$

Уравнения (3), (4) с учетом (5) представляют систему интегродифференциальных уравнений для p и v_z на участках трубопровода, которые заполнены жидкостью.

2.3. Трубопровод, заполненный пузырьковой жидкостью

Поскольку пузырьковый слой имеет небольшую протяженность (максимальная длина до нескольких диаметров трубопровода), то для описания движения можно использовать одномерные уравнения, так как влияние границ на такой длине будет несущественно. Запишем систему макроскопических уравнений сохранения масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в односкоростном приближении [18]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \quad \frac{dn}{dt} + n \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (i = \ell, g), \\ \rho \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p_\ell}{\partial z} &= 0, \quad \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g w}{a} - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \\ w &= \frac{da}{dt}, \quad \alpha_\ell + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi n a^3, \\ \rho_i &= \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_\ell, \end{aligned} \quad (6)$$

где a — радиус пузырьков; p_i — давления фаз; ρ_{i0} — истинные плотности фаз; α_i — объемные содержания фаз; q — интенсивность теплообмена; n — число пузырьков в единице объема; w — радиальная скорость пузырьков; v_z — осевая составляющая скорости. Нижними индексами $i = \ell, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения в соответствии с уточнением, предложенным в [20], будем полагать, что $w = w_R + w_A$, где w_R определяется из уравнения Рейля–Ламба, а w_A — из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4v_\ell^{(u)} \frac{w_R}{a} = \frac{1}{\rho_\ell^0} (p_g - p_\ell - 2\frac{\sigma}{a}), \quad (7)$$

$$w_A = \frac{p_g - p_\ell}{\rho_\ell^0 C_\ell \alpha_g^{1/3}}.$$

Будем полагать, что жидкость является акустически сжимаемой, а газ калорически совершенным

$$p_\ell = p_0 + C_\ell^2 (\rho_\ell^0 - \rho_{\ell 0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R_g T_g.$$

Тепловой поток q задается приближенным конечным соотношением

$$q = \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3,$$

$$\text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe} < 100, \end{cases}$$

$$\text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad k_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0},$$

где $T_0 = \text{const}$ — температура жидкости, Nu и Pe — числа Нуссельта и Пекле.

Из этой математической модели в частном случае при $\alpha_{g0} = 0$ следует волновое уравнение для линейно сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой средой это обстоятельство, в свою очередь, позволяет использовать сквозные методы расчета.

3. Условия на границе слоев

Решения уравнений из п. 2 в каждом из трех слоев (см. рис. 1) должны быть согласованы условиями равенства давлений и условием, следующим из законов сохранения массы. Первое уравнение, следующее из закона сохранения масс, запишется как:

$$\begin{cases} (v_z^{(1)} - v_z^{(2)}) \Big|_{z=l_1} = 0, \\ (v_z^{(2)} - v_z^{(3)}) \Big|_{z=l_1+l_2} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем верхними индексами в скобках (1), (2) и (3) снабжены возмущения давления p и скорости v_z , соответственно, на первом, втором и третьем участках.

Второе условие, выражающее равенство возмущений давления при прохождении сигнала через поврежденный участок, имеет вид:

$$\begin{cases} (p^{(1)} - p^{(2)}) \Big|_{z=l_1} = 0, \\ (p^{(2)} - p^{(3)}) \Big|_{z=l_1+l_2} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

4. Дисперсионные уравнения

Решение вышеприведенной системы уравнений будем искать в виде затухающей бегущей волны:

$$p = A_p e^{i(Kz - \omega t)}, \quad v_z = A_{v_z} e^{i(Kz - \omega t)}, \quad (10)$$

$$a = A_a e^{i(Kz - \omega t)}, \quad w = A_w e^{i(Kz - \omega t)}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где $\omega > 0$ — круговая частота; $K = k + i\delta$ — волновой вектор. Действительная и мнимая части волнового вектора определяют скорость распространения и затухания гармонических волн, причем

$$C_p = \frac{\omega}{k}, \quad z_\delta = \delta^{-1},$$

где C_p — фазовая скорость; z_δ — характерное расстояние, на которое амплитуда волны уменьшается в e раз.

Из условия существования нетривиального решения вида (10) для системы (1) и (2) получим дисперсионное уравнение для газа:

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{1}{C_g^2} \left(1 + 2(\gamma - 1) \sqrt{\frac{4v_g^{(T)}}{-i\omega d^2}} \right) \times \left(1 + 2 \sqrt{\frac{4v_g^{(u)}}{-i\omega d^2}} \right). \quad (11)$$

Для системы (3) и (4) с учетом (5) получим дисперсионное уравнение для жидкости:

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{1}{C_\ell^2} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{4v_\ell^{(u)}}{-i\omega d^2}} \right). \quad (12)$$

Для системы (6) и (7) получим дисперсионное уравнение для пузырьковой жидкости:

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{(1 - \alpha_{g0})^2}{C_\ell^2} + 3 \frac{\rho_{\ell 0}^0 \alpha_{g0} (1 - \alpha_{g0})}{\psi}, \quad (13)$$

где

$$\psi = \frac{3\gamma p_{g0}}{Q} - \frac{\rho_{\ell 0}^0 \omega^2 a_0^2}{\xi} - 4i\rho_{\ell 0}^0 v_{\ell}^{(\mu)} \omega - \frac{2\sigma}{a_0},$$

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \xi = 1 - i\omega t_A, \quad t_A = \frac{a_0}{\sqrt[3]{\alpha_{g0} C_{\ell}}},$$

$$Q = 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{k_0} H_{\text{air}} \text{kh}(y_g) + \frac{\gamma}{1 - k_0} H_v \text{kh}(z) \right) \times$$

$$\times \left(\frac{H_{\text{air}}}{k_0} + \frac{\gamma \text{kh}(z)}{(1 - k_0)\beta \text{shv}(y_{\ell})} \right)^{-1},$$

$$\text{kh}(x) = 3(x \text{cth}x - 1)x^{-2},$$

$$\text{sh v}(x) = 3(1 + x(A_0 x \text{th}(x(A_0 - 1)) - 1)) \times$$

$$\times (A_0 x - \text{th}(x(A_0 - 1)))^{-1} x^{-2}$$

или

$$\text{sh v}(x) = 3(1 + x)x^{-2},$$

$$A_0 = \alpha_{g0}^{-1/3}, \quad y_{\ell} = \sqrt{-\frac{i\omega a_0^2}{v_{\ell}^{(T)}}}, \quad z = \sqrt{-\frac{i\omega a_0^2}{D}},$$

$$\beta = (\gamma - 1)\eta H_v \chi^2, \quad \eta = \frac{\rho_{\ell 0}^0 c_{\ell}}{\rho_{g0}^0 c_g}, \quad \chi = \frac{c_g T_0}{L},$$

$$H_v = \frac{B_v}{B_0}, \quad H_{\text{air}} = \frac{B_{\text{air}}}{B_0}, \quad H = H_v - H_{\text{air}}.$$

5. Связь амплитуд давления и скорости на границе раздела сред

В предположении, что имеет место соотношение $A_p = bA_{v_z}$, на основе уравнений из предыдущего раздела выпишем уравнения для соотношения амплитуд скорости и давления в трубе. Данные соотношения позволяют без длительных и сложных расчетов определить амплитуду давления при изменении амплитуды скорости воздействия. Рассмотрим каждый случай отдельно.

Из уравнений (1) и (2) с учетом (11) путем несложных преобразований при известном значении K/ω можно получить соотношение для зависимости амплитуд давления и скорости в газе

$$A_p = \rho_{g0} \left(\frac{1 + 2\sqrt{\frac{4v_g^{(\mu)}}{-i\omega d^2}} - C_g^2 \frac{K}{\omega}}{1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{\frac{4v_g^{(T)}}{-i\omega d^2}} - \frac{K}{\omega}} \right) A_{v_z}. \quad (14)$$

Если значение K/ω заранее неизвестно, то

уравнение (14) примет следующий вид:

$$A_p = \rho_{g0} C_g \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{\frac{4v_g^{(\mu)}}{-i\omega d^2}}}{1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{\frac{4v_g^{(T)}}{-i\omega d^2}}}} A_{v_z}.$$

Для случая слоя жидкости при известном значении K/ω соотношение амплитуд можно рассчитать из следующей формулы:

$$A_p = \rho_{\ell 0} \left(\frac{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(\mu)}}{-i\omega d^2}} - C_{\ell}^2 \frac{K}{\omega}}{1 - \frac{K}{\omega}} \right) A_{v_z}. \quad (15)$$

Если же значение K/ω неизвестно, то уравнения (15) преобразуется к виду:

$$A_p = \rho_{\ell 0} C_{\ell} \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(\mu)}}{-i\omega d^2}}} A_{v_z}.$$

Уравнение для пузырьковой жидкости при известном значении соотношения K/ω можно записать в следующем виде

$$A_{v_z} = \frac{K}{\omega \rho_{\ell 0} + \rho_{g0}} A_p. \quad (16)$$

6. Коэффициенты отражения и прохождения через границу раздела сред в трубе

На основе уравнений из предыдущего параграфа выпишем уравнения для коэффициентов отражения и прохождения через границу раздела. Учитывая принятые условия (7) и (8), запишем уравнение на границе $z = l_1$ и $z = l_1 + l_2$ для гармонических волн. Будем полагать, что на участке $0 < z < l_1$ существуют две волны (падающая и отраженная); на участке $l_1 < z < l_2$ — две волны (проходящая и отраженная от второй границы), а на участке $l_2 < z$ — только одна волна (проходящая). Амплитуды возмущений давления и скорости относящиеся к падающей, отраженной и проходящей волнам снабдим верхними индексами (o), (r) и (s). Рассмотрим каждый случай отдельно.

6.1. Общий случай

Введем коэффициенты отражения и прохождения гармонических волн как

$$R = \frac{A_p^{(r)}}{A_p^{(o)}} \quad \text{и} \quad S = \frac{A_p^{(s)}}{A_p^{(o)}}.$$

Условия на границе раздела должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{cases} p^{(o)} + p^{(r)} = p^{(s)}, \\ v_z^{(o)} + v_z^{(r)} = v_z^{(s)}. \end{cases} \quad (17)$$

Предположим, что амплитуды A_p и A_{v_z} связаны соотношением $A_p = bA_{v_z}$, а K^I и K^{II} – волновые числа сред. Тогда, с учетом (10), получим систему для амплитуд давления p :

$$\begin{cases} p^{(o)} = A_p^{(o)} e^{i(K^I z - \omega t)}, \\ p^{(r)} = A_p^{(r)} e^{i(-K^I z - \omega t)}, \\ p^{(s)} = A_p^{(s)} e^{i(K^{II} z - \omega t)} \end{cases} \quad (18)$$

и скорости v_z :

$$\begin{cases} v_z^{(o)} = A_{v_z}^{(o)} e^{i(K^I z - \omega t)} = \frac{A_p^{(o)}}{b^I} e^{i(K^I z - \omega t)}, \\ v_z^{(r)} = A_{v_z}^{(r)} e^{i(-K^I z - \omega t)} = -\frac{A_p^{(r)}}{b^I} e^{i(-K^I z - \omega t)}, \\ v_z^{(s)} = A_{v_z}^{(s)} e^{i(K^{II} z - \omega t)} = \frac{A_p^{(s)}}{b^{II}} e^{i(K^{II} z - \omega t)}. \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (17), получим

$$\begin{cases} A_p^{(o)} e^{i(K^I z - \omega t)} + A_p^{(r)} e^{i(-K^I z - \omega t)} = A_p^{(s)} e^{i(K^{II} z - \omega t)}, \\ \frac{A_p^{(o)}}{b^I} e^{i(K^I z - \omega t)} - \frac{A_p^{(r)}}{b^I} e^{i(-K^I z - \omega t)} = \frac{A_p^{(s)}}{b^{II}} e^{i(K^{II} z - \omega t)}. \end{cases} \quad (20)$$

Из первого уравнения (20) выразим слагаемое $A_p^{(r)} e^{i(-K^I z - \omega t)}$

$$A_p^{(r)} e^{i(-K^I z - \omega t)} = A_p^{(s)} e^{i(K^{II} z - \omega t)} - A_p^{(o)} e^{i(K^I z - \omega t)}$$

- из газа в пузырьковую жидкость:

$$\begin{cases} S = \frac{2\omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0}) \sqrt{1 + 2(\gamma - 1) \sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}}}}{K^{II} \rho_{g 0} C_g \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}} + \omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0}) \sqrt{1 + 2(\gamma - 1) \sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}}}}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

- из пузырьковой жидкости в газ:

$$\begin{cases} S = \frac{2K^{II} \rho_{g 0} C_g \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}}}}{\omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0}) \sqrt{1 + 2(\gamma - 1) \sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}} + K^{II} \rho_{g 0} C_g \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}}}}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

и подставим во второе уравнение той же системы

$$\begin{aligned} \frac{A_p^{(o)}}{b^I} e^{i(K^I z - \omega t)} - \frac{1}{b^I} \left(A_p^{(s)} e^{i(K^{II} z - \omega t)} - A_p^{(o)} e^{i(K^I z - \omega t)} \right) = \\ = \frac{A_p^{(s)}}{b^{II}} e^{i(K^{II} z - \omega t)}. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые

$$2 \frac{A_p^{(o)}}{b^I} e^{i(K^I z - \omega t)} - \frac{A_p^{(s)}}{b^I} e^{i(K^{II} z - \omega t)} - \frac{A_p^{(s)}}{b^{II}} e^{i(K^{II} z - \omega t)} = 0.$$

Чтобы выполнялись условия из (17), необходимо $K^I z = K^{II} z$. Отсюда получим уравнение

$$\begin{aligned} 2 \frac{A_p^{(o)}}{b^I} - A_p^{(s)} \left(\frac{1}{b^I} + \frac{1}{b^{II}} \right) = 0 \Rightarrow \\ \frac{A_p^{(s)}}{A_p^{(o)}} \left(\frac{1}{b^I} + \frac{1}{b^{II}} \right) = \frac{2}{b^I} \Rightarrow \\ \frac{A_p^{(s)}}{A_p^{(o)}} \left(\frac{b^I + b^{II}}{b^I b^{II}} \right) = \frac{2}{b^I}. \end{aligned}$$

Далее получим выражения для коэффициентов прохождения и отражения в общем виде:

$$\begin{cases} S = \frac{2b^{II}}{(b^I + b^{II})}, \\ R = S - 1 = \frac{2b^{II}}{(b^I + b^{II})} - 1 = \frac{2b^{II} - b^I - b^{II}}{(b^I + b^{II})} = \frac{b^{II} - b^I}{(b^I + b^{II})}. \end{cases} \quad (21)$$

6.2. Частные случаи

С учетом уравнения (21) получим выражения для коэффициентов прохождения и отражения в при прохождении волны:

- из жидкости в пузырьковую жидкость:

$$\begin{cases} S = \frac{2\omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0})}{K^{II}\rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}} + \omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0})}}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

- из пузырьковой жидкости в жидкость:

$$\begin{cases} S = \frac{K^{II}\rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}}}}{\omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0}) + K^{II}\rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}}}}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

- из жидкости в газ:

$$\begin{cases} S = \frac{\rho_{g 0}C_g}{\rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}} + \rho_{g 0}C_g}}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

- из газа в жидкость:

$$\begin{cases} S = \frac{\rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}}}}{\left(\rho_{g 0}C_g + \rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}}}\right)}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

Данные соотношения позволяют определить амплитуду прошедшего и отразившегося сигнала в зависимости от интенсивности падающей волны.

7. Заключение

Представлены математические модели, определяющие отражение и прохождение акустической волны через многослойную среду. С использованием выбранных уравнений и из условия существования решения в виде затухающей бегущей волны выписаны дисперсионные соотношения для каждого из возможных слоев. На основе полученных дисперсионных соотношений аналитически выведены зависимости амплитуды падающей и прошедшей волн от скорости распространения волнового сигнала. Получены коэффициенты отражения и прохождения через границу раздела сред как в

общем, так и в частных случаях. Данные соотношения позволяют рассчитать возможные последствия при волновом воздействии на рассмотренные среды при возникновении чрезвычайных ситуаций на производстве и для их предотвращения.

Список литературы

- [1] Шагапов В.Ш. Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 18. № 1. С. 90–101. <https://sibran.ru/upload/iblock/bb5/bb5cd5e607fc878488eb4f4a6725a1f0.pdf>
- [2] Азаматов А.Ш., Шагапов В.Ш. Распространение малых возмущений в парогазожидкостной среде // Акустический журнал. 1981. Т. 27, № 2. С. 161–169. http://www.akzh.ru/pdf/1981_2_161-169.pdf
- [3] Вахитова Н.К., Шагапов В.Ш. О распространении малых возмущений в парожидкостных пузырьковых средах // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 25. № 5. С. 34–43. <https://sibran.ru/upload/iblock/71a/71a1de7a615a2b166abb82f311fe4a3c.pdf>
- [4] Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Механика жидкости и газа. 2002. № 2. С. 139–147. <https://elibrary.ru/item.asp?id=39274845>
- [5] Баязитова А.Р., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Волны давления в трубе, заполненной пузырьковой смесью с неоднородным распределением по сечению // Механика жидкости и газа. 2006. № 3. С. 67–78. <https://elibrary.ru/item.asp?id=9312066>
- [6] Варакин А.Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 3. С. 421–455. <http://mi.mathnet.ru/tvt97>
- [7] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности отражения и преломления акустических волн на границе раздела между газом и дисперсной системой // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 5(333). С. 119–129. DOI: 10.15372/PMTF20150510
- [8] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности преломления и отражения звука на границе пузырьковой жидкости // Акустический журнал. 2015. Т. 61, № 1. С. 40–48. http://www.akzh.ru/pdf/2015_1_40-48.pdf
- [9] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Evolution of pressure waves acting on a bubble liquid through adjacent boundaries // Journal of Physics: Conf. Series. 1158(2019). 022008. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022008
- [10] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Low-intensity pressure waves in a stratified bubbly liquid // Journal of Physics: Conf. Series. 1400(2019). 077045. DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077045
- [11] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. и др. Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 4. С. 912–921. <https://elibrary.ru/item.asp?id=35325382>
- [12] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при прямом их падении // Теплофизика высоких температур. Т. 57, № 2. 2019. С. 284–290. DOI: 10.1134/S0040364419010228

- [13] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при «косом» их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 3. С. 464–468.
DOI: [10.1134/S0040364419020194](https://doi.org/10.1134/S0040364419020194)
- [14] Agisheva U.O., Vdovenko I.I. and Galimzyanov M.N. Acoustic waves in a superheated liquid with a gas nuclei // Journal of Physics: Conf. Series. 1158(2019). 022007.
DOI: [10.1088/1742-6596/1158/2/022007](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022007)
- [15] Agisheva U.O., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Acoustic properties of overheated liquid with gas nuclei during temperature increasing // Journal of Physics: Conf. Series. 1268(2019). 012014.
DOI: [10.1088/1742-6596/1268/1/012014](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1268/1/012014)
- [16] Агишева У.О., Вдовенко И.И., Галимзянов М.Н. Влияние диффузии на акустические свойства пузырьковой жидкости // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 3. С. 165–175.
DOI: [10.21662/mfs2019.3.023](https://doi.org/10.21662/mfs2019.3.023)
- [17] Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука. 1973. 496 с.
- [18] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987. 360 с., 464 с.
- [19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.
- [20] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волны в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1077–1081.



Interaction of an acoustic wave with a multilayer medium containing a bubble liquid layer

Agisheva U.O., Galimzyanov M.N.

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

Discrete-layered media are interesting to research since properties of each layer can significantly differ from near by ones and this can be used in technological processes. The presence of a small number of bubbles significantly increases the compressibility of the medium while the density of the bubble medium remains close to the density of the carrier liquid. From the applied point of view it is interesting that the energy of the incident wave can be completely absorbed by combining of layer properties (length, volume content of the dispersed phase, etc.). In this work, based on the equations of mechanics of dispersed media, we consider the reflection and propagation of acoustic waves passing at right angles through a three-layer medium in a pipeline containing a layer of bubble fluid. From the condition for the existence of a solution in the form of a decaying traveling wave, dispersion relations are written for each of the possible layers. Based on them, the dependences of the amplitude of the incident and transmitted waves on the propagation velocity of the pulse are analytically derived. The coefficients of reflection and transmission through the interface are obtained both in the general case and in particular cases for each layer. These ratios make it possible to calculate the possible consequences of a wave action on the considered media in the event of emergencies at work and to prevent them.

Keywords: acoustic wave, multilayer medium, bubbles, dispersion equation, reflection coefficient, transmission coefficient

References

- [1] Shagapov V.Sh. Propagation of small disturbances in a liquid with bubbles // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1977. V. 18. No. 1. Pp. 77–87.
<https://sibran.ru/upload/iblock/bb5/bb5cd5e607fc878488eb4f4a6725a1f0.pdf>
- [2] Azamatov A.Sh., Shagapov V.Sh. Propagation of small disturbances in a vapor-liquid medium // *Soviet Physics. Acoustics*. 1981. V. 27. No. 2. Pp. 89–96.
http://www.akzh.ru/pdf/1981_2_161-169.pdf
- [3] Vakhitova N.K., Shagapov V.Sh. On the propagation of small perturbations in vapor-liquid bubble media // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1984. V. 25. No. 5. Pp. 682–689.
<https://sibran.ru/upload/iblock/71a/71a1de7a615a2b166abb82f311fe4a3c.pdf>
- [4] Galimzyanov M.N., Gimaltdinov I.K. and Shagapov V.Sh. Two-dimensional pressure waves in a fluid with bubbles // *Fluid Dynamics*. 2002. V. 37, No. 2. Pp. 294–301.
DOI: 10.1023/A:1015818602291
- [5] Bayazitova A.R., Gimaltdinov I.K., Shagapov V.Sh. Pressure waves in a tube filled with a bubbly mixture with a nonuniform cross-sectional bubble distribution // *Fluid Dynamics*. 2006. No. 3. C. 381–390.
DOI: 10.1007/s10697-006-0054-7
- [6] Varaksin A.Y. Fluid dynamics and thermal physics of two-phase flows: problems and achievements // *High Temperature*. 2013. V. 51, No. 3. Pp. 377–407.
DOI: 10.1134/S0018151X13030073
- [7] Shagapov V.Sh. and Sarapulova V.V. Reflection and refraction of acoustic waves at the interface between a gas and a disperse systems // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015. V. 56, No. 5. Pp. 838–847.
DOI: 10.1134/S0021894415050107
- [8] Shagapov V.Sh. and Sarapulova V.V. Characteristic features of rarefaction and reflection of sound at the boundary of a bubble liquid // *Acoustical Physics*. 2015. V. 61, No. 1. Pp. 37–44.
DOI: 10.1134/S1063771014060153
- [9] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Evolution of pressure waves acting on a bubble liquid through adjacent boundaries // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2019. V. 1158. 022008.
DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022008
- [10] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Low-intensity pressure waves in a stratified bubbly liquid // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2019. V. 1400. 077045.
DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077045
- [11] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N., Vdovenko I.I. et al. Characteristic features of sound propagation in a warm bubble-laden water // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2018. V. 91, No. 4. Pp. 854–863.
DOI: 10.1007/s10891-018-1809-9

- [12] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Characteristics of the reection and refraction of acoustic waves at normal incidence on the interface between «pure» and bubbly liquids // High Temperature. 2019. V. 57, No. 2. Pp. 256–262. DOI: [10.1134/S0018151X1901022X](https://doi.org/10.1134/S0018151X1901022X)
- [13] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Characteristics of the reection and refraction of acoustic waves at oblique incidence on the interface between «pure» and bubbly liquids // High Temperature. 2019. V. 57, No. 3. Pp. 425–429. DOI: [10.1134/S0018151X19020184](https://doi.org/10.1134/S0018151X19020184)
- [14] Agisheva U.O., Vdovenko I.I. and Galimzyanov M.N. Acoustic waves in a superheated liquid with a gas nuclei // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. V. 1158. 022007. DOI: [10.1088/1742-6596/1158/2/022007](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022007)
- [15] Agisheva U.O., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Acoustic properties of overheated liquid with gas nuclei during temperature increasing // Journal of Physics: Conf. Series. 1268(2019). 012014. DOI: [10.1088/1742-6596/1268/1/012014](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1268/1/012014)
- [16] Agisheva U.O., Vdovenko I.I., Galimzyanov M.N. The effect of diffusion on the acoustic properties of a bubble fluid // Multiphase Systems. 2019. V. 14. No. 3. Pp. 165–175 (in Russian). DOI: [10.21662/mfs2019.3.023](https://doi.org/10.21662/mfs2019.3.023)
- [17] Isakovich M.A. General Acoustics. Moscow: Nauka. 1973. 496 p (in Russian).
- [18] Nigmatulin R.I. Dynamics of Multiphase Media. New York: Hemisphere, 1991, vols. 1 and 2. P. 360 and P. 464.
- [19] Landau L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. Moscow: Fizmatlit. Vol. 6. 2001. 736 p (in Russian).
- [20] Nigmatulin R.I., Shagapov V.Sh. and Vakhitova N.K. Effect of the compressibility of the carrier phase in wave propagation in a bubble medium // Doklady. Akad. Nauk SSSR. 1989. V. 304, No. 5. Pp. 1077–1081.



К теории разработки гидратного пласта тепловым воздействием

Шагапов В.Ш.* , Давлетшина М.Р.**

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

**Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

В работе предложена и развита математическая модель процесса разложения газогидрата при тепловом воздействии. На основе предложенной технологической схемы и соответствующей теоретической модели рассмотрена задача о воздействии теплового источника на пористый пласт конечной длины, изначально насыщенном гидратом метана. Задача описывает нагрев и одновременный отбор газа в комбинированную скважину. Согласно принятой схеме в межтрубный канал подается теплоноситель в виде горячей воды, а внутренняя скважина сообщается с пластом, куда поступает газ, образовавшийся в процессе разложения гидрата в результате термического воздействия. Исследовано влияние температуры теплового источника на эволюцию тепловых полей вокруг скважины, на характер движения границы фазового перехода, а также получен закон ее движения. Проанализированы затраты тепла на прогревание пласта и эволюция выхода газа за рассматриваемый интервал времени при различных значениях температуры нагрева, перепада давления. Выявлена динамика массового расхода газа и энергоэффективности добычи метана при различных значениях перепада температур между пластом и нагнетаемой в тепловую трубу жидкостью. Получено квазистационарное решение, которое соответствует случаю, когда в скважине поддерживается давление равное равновесному значению для исходной температуры газогидратного пласта. Проанализирована зависимость энергоэффективности предлагаемого способа добычи газа от пористости пласта. Установлено, что при двукратном увеличении гидратосодержания пласта эта величина растет примерно на десять процентов. Полученные решения позволяют определить наиболее выгодные режимы теплового воздействия. Данные решения хорошо согласуются с численными результатами, полученными по более общей теоретической модели.

Ключевые слова: фильтрация газа, газовый гидрат, фазовый переход, квазистационарное решение, теплоноситель

1. Введение

Исследования по изучению гидратов углеводородных газов является на сегодняшний день особенно важными ввиду истощения традиционных газовых месторождений. Газогидраты представляют большой интерес с точки зрения получения альтернативного источника энергии, а также захоронения углекислого газа (снижения парникового эффекта) и получения чистой пресной воды. По разным оценкам [1, 2] потенциальные запасы отложений гидратов практически неисчерпаемы.

Согласно данным всемирно известного исследования «BP Statistical Review of World Energy 2018» объем мировых традиционных извлекаемых запасов газа составляет 193,5 млн. м³. В то же время объемы газа в гидратах по оценкам «Resources to Reserves 2013» достигают до 2000 млн. м³.

Газовые гидраты представляют собой потенциально обширный источник природного газа, они встречаются в зонах вечной мерзлоты и на глубокководье, что создает сложности для их разработки. Гидраты (клатраты) представляют собой твердые кристаллические соединения низкомолекулярных газов (таких как метан, этан, пропан, бутан и др.) с водой, их образование и разложение зависит от температуры, давления, свойств пористой сре-

ды и т.д. Самым распространенным природным газом–гидратообразователем является метан, содержание которого в гидратах очень высоко: из одного кубометра (в стандартных условиях) можно получить более 160 м³ метана. По содержанию энергии газовые гидраты сопоставимы с битуминозной нефтью и нефтеносными песками [1, 3].

Во многих лабораториях, научных центрах и энергетических компаниях всего мира проводятся исследования, связанные с возможностью освоения данных ресурсов. В 2009 г. на озере Байкал на глубине 1400 метров были обнаружены массивные холмы газогидратов. В общей сложности на озере Байкал открыто 44 месторождения газовых гидратов [1]. В настоящее время выявлено более 230 газогидратных залежей. В 1969 г. На Мессояхском газовом месторождении обнаружена газогидратная залежь. Здесь запасы газа по оценкам специалистов составляют до 30 млрд. м³ [2]. Ресурсы природного газа в газогидратах в России оцениваются до 100–1000 трлн. м³ [1, 2].

Для практической реализации задач необходимо теоретическое обоснование, которое базируется на математическом моделировании и численных методах. Однако подобные исследования достаточно сложны в связи с влиянием множества различных факторов.

Классические подходы к добыче газа из гидратов описываются в работах [4–6], они основаны на термическом и депрессионном методах и использовании ингибиторов. Все три классических подхода нацелены на то, чтобы сместить термодинамические условия в пласте из зоны стабильности гидрата в зону его разложения. Повышение температуры выше равновесной вызывает выделение газа. С увеличением тепловой мощности, подводимой к гидрату, время разложения сокращается. Подобные методы были апробированы в Канаде на скважинах «Mallik» с использованием горячей воды [7]. При этом температура поддерживалась 325 К и за 5 дней извлекалось более 500 м³ газа. Через 40 дней добыча практически прекращалась. Данный метод оказался достаточно энергозатратным. Проводились исследования по закачке теплого газа в гидратосодержащий пласт. Выявлено, что степень разложения гидратов невысокая. При закачке метана с температурой 313 К зона разложения гидратов за 2 месяца не продвинулась далее 5 метров. Данный подход характеризуется невысокой эффективностью для практического применения из-за быстрой потери энергии теплоносителя. Темпы разложения гидрата определяются поступлением тепла к фронтальной поверхности разложения через слой стекающей воды.

На сегодняшний день имеется множество исследований, связанных с изучением процессов образования и разложения газовых гидратов в пористых средах. Это вызвано необходимостью развития теоретических основ указанных процессов и создания технологий разработки газогидратных залежей.

Одними из первых исследований, связанных с описанием особенностей разложения газовых гидратов в пористом пласте, являются работы Черского Н.В., Бондарева Э.А. [4] и Веригина Н.Н., Хабибуллина И.Л. [5].

В исследовании Yin Z. et al. [8] описано численное моделирование процесса разложения гидрата метана в пористой среде в реакторе при тепловом воздействии через его стенки. Общая добыча газа оценивалась согласно трем экспериментам с различными граничными температурами. Было получено хорошее согласование с численными результатами.

Работы Цыпкина Г.Г. [6, 9, 10] посвящены изучению процесса разложения газовых гидратов в пористом пласте, математическому моделированию процессов, протекающих в грунтах, геотермальных системах при их освоении и в месторождениях природного газа.

В работе Grover T. et al. [11] построена математическая модель, описывающая процесс добычи газа из газогидратного пласта. Основные геологические и физические параметры (давление, температура и размеры месторождения) приняты на основе известных данных по Мессояхскому месторождению. Гидратная залежь эксплуатировалась около 8 лет (при постоянном отборе газа), а затем была законсервирована на 3 года. В исходном состоянии температуры в гидратном пласте, газовой подложке и окружающих горных породах различались, но в течение последующих 6 лет они выравнивались. Показано, что поступающее тепло из окружающих пород тратится на разложение газогидрата. Отбор газа из залежи происходил до тех пор, пока давление в пласте не упало до значения порядка 2.5 МПа. Выявлено, что последующая разработка месторождения, сопровождаемая его консервацией, приводит к дальнейшему разложению гидрата и повышению давления в пласте.

Для разработки газогидратных залежей предложено воздействие электромагнитных волн на залежи газогидратов, что является частным случаем метода нагрева [12, 13]. Особенности воздействия высокочастотного электромагнитного излучения на газогидратный пористый пласт описаны в работе Сыртланова В.Р., Шагапова В.Ш. [14].

В работах Шагапова В.Ш. и др. [15, 16] пред-

ложены принципиальные технологические схемы и построены математические модели возможной добычи газа из гидратного массива путем закачки теплой воды. Изучено влияние различных режимов воздействия теплоносителем на интенсивность выхода газа. Моделированию фазовых превращений газогидратных включений в пористых средах посвящены работы [17, 18]. Предложена и исследована математическая модель диссоциации газовых гидратов в пористой среде, основанная на расщеплении по физическим процессам. Таким образом, задачи, связанные с разработкой газогидратных залежей и добычей газа из газогидрата, достаточно перспективны. На сегодняшний день актуальным является вопрос о повышении энергетической эффективности и минимизации экономических и энергетических издержек. Эффективность рассматривается с точки зрения теплотворной способности газа (метана) и определяется процентом извлечения метана и скоростью извлечения. Эффективность здесь характеризуется соотношением энергозатрат на извлечение и полученное количество теплоты после сгорания метана.

Целью данного исследования является построение математической модели, описывающей процесс разложения гидратного пласта конечной протяженности при тепловом воздействии. Полученные решения позволят анализировать различные режимы теплового воздействия с точки зрения энергоэффективности добычи метана и целесообразности освоения таких залежей.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим пористый пласт ($r_w \leq r \leq R$), насыщенный в исходном состоянии гидратом метана, давление и температура которого равны соответственно p_0 и T_0 , а в центре пробурена скважина радиуса r_w . Условия стабильного существования гетерогенной смеси газа и его гидрата выражаются условием фазового равновесия, которое в небольших диапазонах значений давления и температуры имеет вид [19, 20]:

$$T_s = T_{h0} + T_* \ln \left(\frac{p}{p_{s0}} \right).$$

Здесь T_s и T_{h0} — равновесные значения температур, соответствующие давлениям p и p_{s0} ; T_* — эмпирический параметр, зависящий от вида газогидратообразователя. В частности, для гидрата метана $T_{h0} = 280$ К, $T_* = 10$ К, $p_{s0} = 5,5$ МПа. Таким образом, исходные параметры системы удовлетворяют условию $T_0 < T_s(p_0)$.

Пусть через скважину закачивается горячая вода (теплоноситель) с температурой T , причем $T_e > T_s(p_0)$. С учетом того, что давление в рассматриваемой системе, согласно постановке задачи, остается постоянным и равным исходному значению p_0 , в результате теплового воздействия в пласте образуются две области: ближняя, насыщенная продуктами разложения гидрата (газом и водой) и дальняя, содержащая в своем составе гидрат. При этом возникает подвижная граница фазового перехода r_s , движущаяся вглубь пласта и на которой происходит процесс разложения газогидрата. Технологическая схема представлена на рис. 1.

Для описания процессов тепломассопереноса, сопровождающихся разложением газогидрата будем использовать однотемпературную модель. Примем пористость постоянной величиной; скелет пористой среды, гидрат и вода являются несжимаемыми и неподвижными [19, 20]:

$$m, \rho_{sk}, \rho_h, \rho_w = \text{const}; \quad v_{sk} = v_h = v_w = 0.$$

Здесь m — пористость; ρ, v — соответственно истинная плотность и скорость j -ой фазы ($j = g, sk, h, w$). Нижние индексы sk, h, w и g соответствуют параметрам скелета, гидрата, воды и газа. Гидрат считаем двухкомпонентной системой с массовой концентрацией газа G .

Система основных уравнений, представляющая собой уравнения неразрывности и притока тепла для области, содержащей метан и воду ($r_w \leq r \leq r_s$), имеет вид [8, 20, 21]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_g m \rho_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r S_g m \rho_g v_g) = 0, \quad (1)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_g c_g m S_g v_g \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Здесь r — радиальная координата; t — время; p_g, c_g, v_g, S_g — соответственно плотность, теплоемкость, скорость и насыщенность для газовой фазы. Величины удельной объемной теплоемкости ρc и коэффициента теплопроводности λ будем считать постоянными, поскольку они определяются, в основном, параметрами скелета пористой среды.

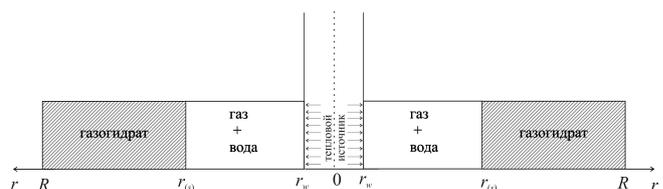


Рис. 1. Технологическая схема

В качестве уравнения состояния используется уравнение калорически совершенного газа [21]:

$$\rho_g = \frac{p}{R_g T},$$

где R_g — приведенная газовая постоянная. Поскольку перепады температур ΔT в области фильтрации газа обычно малы по сравнению с исходной температурой системы T_0 ($\Delta T \ll T_0$), для величины плотности можно записать:

$$\rho_g = \frac{p_0}{R_g(T_0 + \Delta T)} \approx \frac{p_0}{R_g T_0} \left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\right) \approx \frac{p_0}{R_g T_0} = \rho_g^0, \quad (3)$$

где ρ_g^0 — исходная плотность газа.

Температуру в области, насыщенной гидратом ($r_s \leq r \leq R$), будем считать постоянной и равной исходной температуре T_0 в течение всего процесса, то есть:

$$(r_s \leq r \leq R) : T = T_0 (t \geq 0). \quad (4)$$

Кроме того, представленные уравнения необходимо дополнить соотношениями, следующими из условий баланса масс и тепла на границе фазового перехода [20, 21]:

$$\begin{aligned} m\rho_h(1-G)(0-\dot{r}_s) &= mS_w\rho_w(0-\dot{r}_s), \\ m\rho_h G(0-\dot{r}_s) &= mS_g\rho_g^0(v_{g(s)}-\dot{r}_s), \\ \lambda \frac{\partial T(1)}{\partial r} &= -m\rho_h l_h \dot{r}_s. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь \dot{r}_s — скорость движения границы фазового перехода; l_h — удельная теплота гидратообразования; ρ_h и ρ_w — соответственно плотности гидрата и воды; S_w — насыщенность пор водой. Нижний индекс 1 относится к параметрам ближней, насыщенной метаном и водой, области. Из первого уравнения системы (5) для величин газо- и водонасыщенности можно записать [20]:

$$S_w = \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_w}, \quad S_g = 1 - \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_w}.$$

Величина скорости газа на границе фазового перехода определяется из второго уравнения системы (5) [20, 21]

$$v_{g(s)} = \left(1 - \frac{\rho_h G}{S_g \rho_g^0}\right) \dot{r}_s. \quad (6)$$

Температуру на этой границе будем считать непрерывной и равной T_0 в соответствии с (4). Начальные и граничные условия для определения поля

температур в ближней области имеют вид:

$$\begin{aligned} t = 0 : T &= T_0 (r_c \leq r \leq R_k), \\ r = r_c : T &= T_1 (t > 0). \end{aligned} \quad (7)$$

Другим граничным условием для данной области является, очевидно, условие (4). Поскольку, согласно постановке задачи, давление системы не изменяется и равно исходному значению p_0 , из уравнения неразрывности (1) с учетом (3) можно получить выражение для скорости фильтрации газа через любое сечение, определяемое координатой r :

$$v_g(r) = \frac{r_s}{r} v_{g(s)}. \quad (8)$$

Система уравнений (2)–(8) является замкнутой. Для ее решения используется метод ловли фронта в узел пространственной сетки [17], заключающийся в том, что за неизвестный и определяемый в ходе решения задачи временной отрезок фронт фазового перехода перемещается по координатной сетке ровно на один шаг.

3. Квазистационарное решение

Рассмотрим случай, когда в скважине поддерживается давление, равное равновесному значению для исходной температуры пласта ($p_e = p_s(T_0)$). Тогда, пренебрегая в уравнении (2) первым слагаемым в левой части (т.е. полагая $\partial T / \partial t = 0$), можем получить:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= \left(\frac{v_s r_s}{\chi} - 1\right) \frac{\partial T}{\partial r} \quad (r_c < r < r_s), \\ v &= v_s \frac{r_s}{r}, \quad \chi = \frac{\lambda}{\rho_g c_g m S_g}. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом граничных условий

$$\begin{aligned} T = T_w, \quad r = r_w, \quad T = T_0, \quad r = r_s, \\ -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_s} &= m\rho_h l_h \dot{r}_s \end{aligned} \quad (10)$$

решение уравнения (9) имеет вид:

$$\begin{aligned} T - T_w &= \frac{C_1}{\alpha + 1} \left(\frac{r}{r_s}\right)^\alpha r + C_2, \\ \alpha &= \frac{v_s r_s}{\chi} - 1. \end{aligned} \quad (11)$$

где C_1, C_2 — константы. С учетом первого граничного условия из (10) получим дифференциальное уравнение для определения закона перемещения

фронта разложения гидрата:

$$\left(\frac{r_s}{r_w}\right)^{\alpha+1} = \frac{A+1}{A},$$

$$A = \frac{\chi \rho_g m l_h}{\lambda (T_w - T_0) \left(1 - \frac{\rho_h G}{S_g \rho_g^0}\right)}. \quad (12)$$

Это уравнение можно представить в виде:

$$r_s \dot{r}_s = \frac{(\alpha+1)\chi}{1 - \frac{\rho_h G}{S_g \rho_g^0}}. \quad (13)$$

Методом разделения переменных, принимая начальные условия как $r_s = r_w$ при $t = 0$, решение (13) запишется в неявном виде:

$$r_s^2 \ln(r_s/r_w) - (r_s^2 - r_w^2)/2 = 2\beta t,$$

$$\beta = \alpha \frac{\ln((A-1)/A)}{m c (\rho_h G - S_g \rho_g^0)}.$$

Отсюда для начальной стадии, когда $(r_s - r_w \ll r_w)$, имеем следующее приближенное решение

$$r_s - r_w = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\beta t}. \quad (14)$$

Уравнение (12) при определении численным интегрированием закона движения границы фазовых переходов при начальном условии $r_s = r_w (t = 0)$ имеет особенность – согласно уравнению (13) $\dot{r}_s = \infty$ при $t = 0$. Для того, чтобы выйти из этой особенности, зададим для исходного положения фронта фазового перехода бесконечно малое приращение. Таким образом найдем приближенное решение (14). Решение может быть получено методом Рунге–Кутты 4 порядка. Для потока тепла от скважины, отнесенного на единицу ее длины [21], можем записать выражение:

$$q^{(T)} = -2\pi r_w \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_w}. \quad (15)$$

Для дебита массы газа на единицу длины скважины, определяемого согласно [20, 21], получим:

$$q^{(m)} = -2\pi r_w \rho_g S_g m v_w,$$

с учетом (4) имеем

$$q^{(m)} = 2\pi \rho_g S_g m \chi r_s \dot{r}_s. \quad (16)$$

Используя (11) и (16) для дебита скважины, окончательно будем иметь:

$$q^{(m)} = 2\pi \rho_g S_g m v^T \ln(A) \ln^{-1}(r_s/r_w).$$

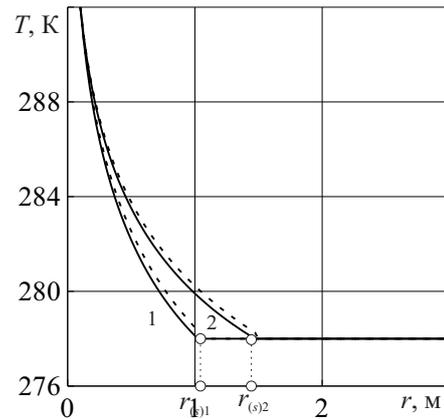


Рис. 2. Распределение температуры в пласте в моменты времени: 1 – $t = 20$ сут., 2 – $t = 50$ сут. Численное (сплошная линия) и квазистационарное (штриховая линия) решения

Можно ввести параметр $k = q^{(m)}/q^{(T)}$, определяющий массовый дебит газа, отнесенный на единицу затраченного тепла, что определяет энергоэффективность добычи гидрата. Используя (11) и (15) для k можно получить следующее выражение:

$$k = \frac{\rho_g S_g \chi}{\rho_h l_h} = \frac{G}{l_h} \left(1 - \frac{\rho_g S_g}{\rho_h G}\right) \approx \frac{G}{l_h}.$$

4. Результаты численных расчетов

Для параметров, характеризующих состояние системы газ–вода–гидрат приняты следующие значения: $m = 0,2$, $G = 0,12$, $\rho_h = 900 \text{ кг/м}^3$, $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$, $R_g = 520 \text{ Дж/(К}\cdot\text{кг)}$, $\lambda = 2 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, $c_g = 2600 \text{ Дж/(К}\cdot\text{кг)}$, $p_e = 2,5 \text{ МПа}$, $p_0 = 6 \text{ МПа}$, $T_0 = 278 \text{ К}$, $T_w = 292 \text{ К}$, $l_h = 5 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ [20]. Радиус скважины $r_w = 0,1 \text{ м}$.

На рис. 2 представлено распределение температуры пласта в различные моменты времени. Из рисунка видно, что убывание температуры пласта в области, насыщенной метаном и водой, имеет немонотонный характер. При этом с течением времени тепло, полученное от скважины, в большей части идет на прогрев прифронтной области. Как видим из рис. 2 и 3, графики численного и квазистационарного решений хорошо согласуются для малых времен.

На рис. 3(а) иллюстрируется закон движения координаты фронта фазового перехода. Видно, что с течением времени скорость перемещения фронта разложения снижается. Это связано с тем, что разложение гидрата происходит за счет кондуктивного потока тепла через область между внешней стенкой скважины и фронтом разложения от сква-

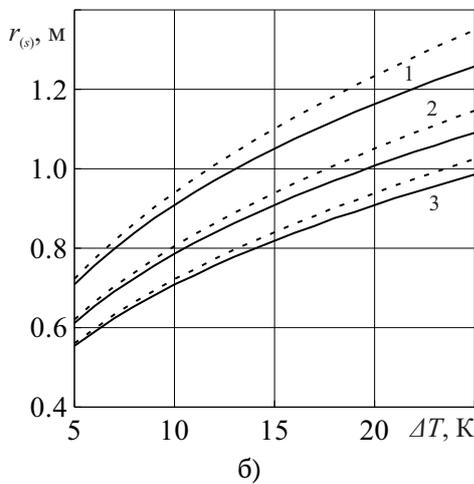
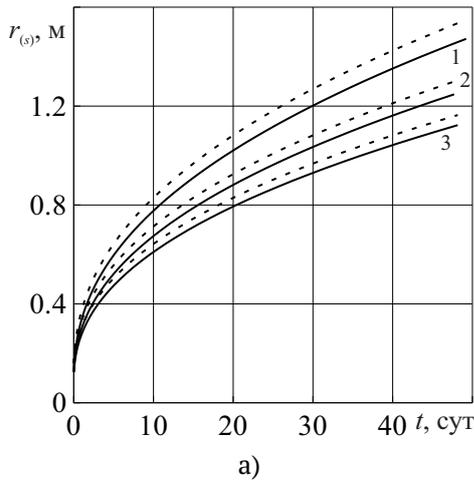


Рис. 3. Зависимость координаты границы фазового перехода от времени (а) и перепада температуры (б) для момента времени $t = 20$ сут. при значениях пористости: 1 – $m = 0,1$, 2 – $m = 0,15$, 3 – $m = 0,2$. Численное (сплошная линия) и квазистационарное (штриховая линия) решения

жины при постоянном изменении температуры $\Delta T = T_w - T_0$. Поскольку со временем эта область расширяется, происходит увеличение ее теплового сопротивления, что, в свою очередь, приводит к снижению теплового сопротивления. При этом, как следует из рис. 3(б), с ростом перепада температуры (ΔT) координата фронтальной границы для одного и того же промежутка времени увеличивается. Здесь отметим, что пунктирные кривые, полученные по квазистационарному решению, расположены выше, чем стационарные кривые. Это связано с тем, что квазистационарное решение не учитывает затраты тепла на нагрев пласта в ближней зоне. Следует отметить также, что с увеличением пористости пласта происходит снижение пере-

мещения зоны разложения. Это объясняется тем, что с ростом содержания продуктов разложения газогидрата в пласте происходит увеличение расхода энергии для их нагрева.

Массовый приток газа, отнесенный на единицу длины скважины, определим из соотношения:

$$m_g = 2\pi r m S_g v_g \rho_g = \\ = 2\pi \rho_g r_s m \left(1 - \frac{\rho_h (1 - G)}{\rho_w} \right) \left(1 - \frac{\rho_g G}{S_g \rho_g^0} \right) \dot{r}_s.$$

На основе выражения (5) количество теплоты, выделяющееся при сгорании данного количества метана, равно:

$$q^{(m)} = m_g l = 2\pi \rho_g r_s m \times \\ \times \left(1 - \frac{\rho_h (1 - G)}{\rho_w} \right) \left(1 - \frac{\rho_g G}{S_g \rho_g^0} \right) \dot{r}_s l,$$

где $l = 50$ МДж/кг – теплотворная способность метана.

На рис. 4 представлены динамика массового расхода газа и его зависимость от перепада температур при различной пористости пласта. Как видно из рис. 4(а) с течением времени массовый расход газа уменьшается. Это связано с тем, что дебит газа лимитируется интенсивностью диссоциации гидрата, которая снижается с течением времени, и, соответственно, с ростом затрат тепла на прогрев все больших областей пласта. Аналогичным образом объясняется и тот факт, что с увеличением перепада температур массовый расход увеличивается (рис. 4(б)). При этом с течением времени увеличение пористости пласта практически не сказывается на величине массового расхода газа, поскольку скорость движения газа убывает с расстоянием от центра скважины.

Количество тепла, затраченного на разложение метана, найдем исходя из соотношения:

$$q^{(T)} = 2\pi r_w \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w}.$$

Тогда энергоэффективность добычи гидрата определится соотношением:

$$k = q^{(m)} / q^{(T)}.$$

На рис. 5 представлена зависимость энергоэффективности добычи метана в зависимости от времени и перепада температур. Из рис. 5(а) видно, что с течением времени энергоэффективность пласта увеличивается. Это объясняется тем, что с течением времени на прогрев прискважинной области требуется все меньшее количество тепла, т.к.

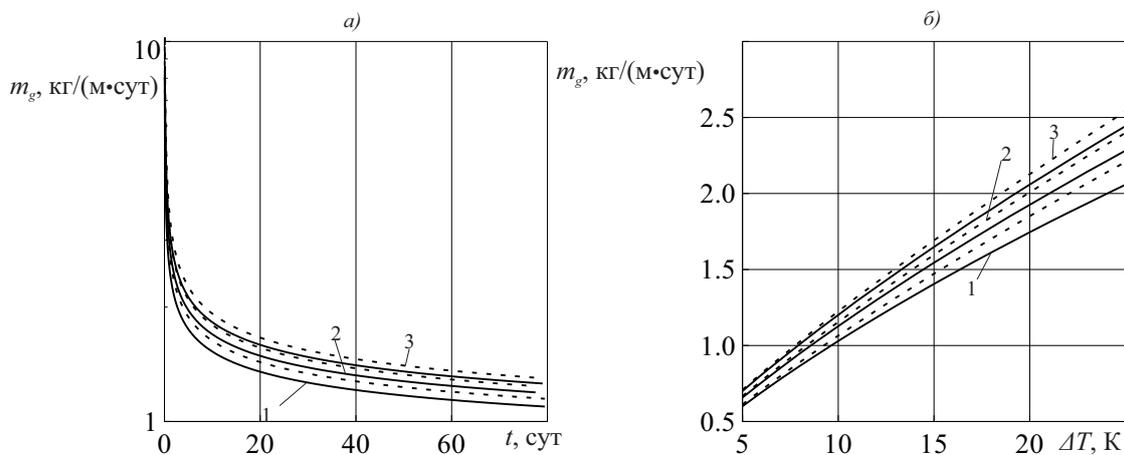


Рис. 4. Зависимость массового расхода от времени (а) и перепада температур (б) для момента времени $t = 20$ сут. для значений пористости: 1 – $m = 0,1$, 2 – $m = 0,15$, 3 – $m = 0,2$

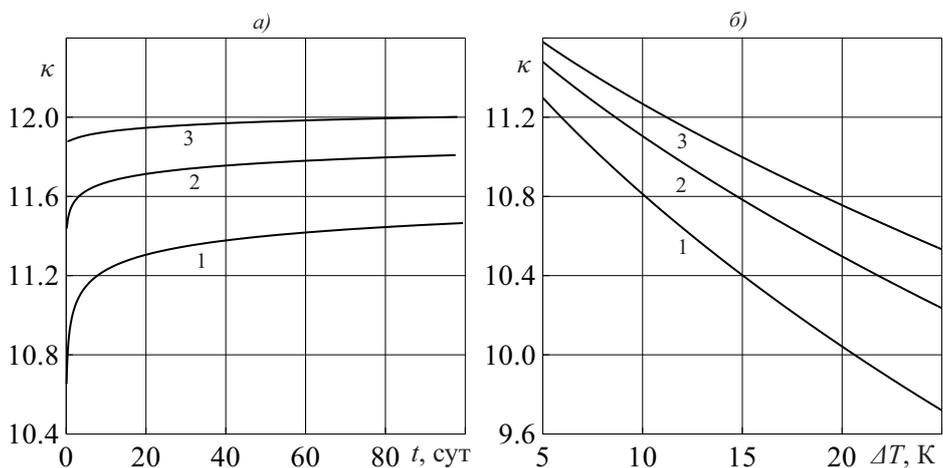


Рис. 5. Зависимость массового расхода от времени (а) и перепада температур (б) для момента времени $t = 20$ сут. для значений пористости: 1 – $m = 0,1$; 2 – $m = 0,15$; 3 – $m = 0,2$

основная его часть идет на прогрев прифронтной области. При этом увеличение пористости пласта также способствует увеличению его энергоэффективности, поскольку в этом случае увеличивается содержание газа в пласте. Как следует из рис. 5(б), рост перепада температур приводит к снижению энергоэффективности, т.к. большая часть тепла расходуется на прогрев гидратного пласта.

5. Заключение

Решена задача о возможности разложения газогидратного пласта при тепловом воздействии. Для радиальной задачи с фронтальной границей фазовых переходов построены решения, описывающие поля температур, а также динамику движения границы разложения гидрата и массового расхода газа. Изучено влияние перепада температур

между пластом и нагнетаемой водой на эволюцию фронта разложения гидрата и на величину энергоэффективности разложения гидрата метана при различной пористости пласта. Предложенная схема расчетов и полученные на ее основе результаты позволяют анализировать эффективность разработки гидратного пласта за счет прогрева рабочей зоны месторождения. Предложенная теоретическая модель позволяет произвести количественную оценку отбора метана при изменении температуры нагрева и перепада давления, а также определить наиболее выгодные режимы с точки зрения энергоэффективности.

Авторы благодарят А.С. Чиглинцеву и М.В. Столповского за оказание помощи в проведении численных расчетов.

Список литературы

- [1] Макогон Ю.Ф. Газогидраты. История изучения и перспективы освоения // Геология и полезные ископаемые Мирового океана. 2010. № 2. С. 5–21.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=15122639>
- [2] Макогон Ю.Ф., Омельченко Р.Ю. Мессояха — газогидратная залежь, роль и значение // Геология и полезные ископаемые Мирового океана. 2012. № 3. С. 5–19.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=17960118>
- [3] Nair V.C., Gupta P., Sangwai J.S. Gas Hydrates as a Potential Energy Resource for Energy Sustainability // Sustainable Energy Technology and Policies. 2018. V. 1. Pp. 265–287.
DOI: 10.1007/978-981-10-7188-1_12
- [4] Черский Н.В., Бондарев Э.А. О тепловом методе разработки газогидратных месторождений // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 3. С. 550–552.
<http://mi.mathnet.ru/rus/dan/v203/i3/p550>
- [5] Веригин Н.Н., Хабибуллин И.Л., Халиков Г.А. Линейная задача о разложении гидратов газа в пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 1. С. 174–177.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=28143009>
- [6] Цыпкин Г.Г. Влияние разложения газового гидрата на добычу газа из пласта, содержащего гидрат и газ в свободном состоянии // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 1. С. 132–142.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=9144053>
- [7] Nakai S. Development of Natural Gas Hydrate (NGH) Supply Chain // Proceedings, 25th World Gas Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, 4–8 June, 2012. Pp. 3040–3050.
- [8] Yin Z., Moridis G., Chong Z., Tan H., Linga P. Numerical analysis of experiments on thermally-induced dissociation of methane hydrates in porous media // Ind. Eng. Chem. Res. 2018. 57(17). Pp. 5776–5791.
DOI: 10.1021/acs.iecr.7b03256
- [9] Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: Физматлит, 2009. 232 с.
- [10] Цыпкин Г.Г. Аналитическое решение нелинейной задачи разложения газового гидрата в пласте // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 5. С. 133–142.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=9585514>
- [11] Grover T., Moridis G., Holditch S. Analysis of reservoir performance of Messoyakha gas hydrate field // Proceedings of the eighteenth international offshore and polar engineering. Vancouver, Canada, 2008. Pp. 49–56.
- [12] Низаева И.Г., Макогон Ю.Ф. Воздействие электромагнитных полей на нетрадиционные виды углеводородного сырья // Геология и полезные ископаемые Мирового океана. 2013. № 3. С. 42–54.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=20516491>
- [13] Хабибуллин И.Л., Насыров Н.М. Математическое моделирование диссоциации газовых гидратов в переменном электромагнитном поле // Фильтрация многофазных систем. ИТПМ СО АН СССР. 1991. С. 91–95.
- [14] Сыртланов В.Р., Шагапов В.Ш. Фронтальная задача о разложении газовых гидратов в пористой среде при высокочастотном электромагнитном излучении // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71, № 2. С. 263–267.
<http://www.itmo.by/jepeter/711998r/710263.html>
- [15] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Сыртланов В.Р. О возможности вымывания газа из газогидратного массива посредством циркуляции теплой воды // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 4. С. 100–111.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=12846453>
- [16] Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Рагимли О.Р. и др. Использование расщепления по физическим процессам для моделирования диссоциации газовых гидратов // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 7. С. 133–144.
<http://mi.mathnet.ru/rus/mm/v29/i7/p133>
- [17] Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О. и др. Задачи совместной фильтрации в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями // Математическое моделирование. 2018. Т. 30, № 6. С. 95–116.
<http://mi.mathnet.ru/rus/mm/v30/i6/p95>
- [18] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С. О нагнетании гидратообразующего газа в снежный массив, насыщенный тем же газом, при переходе через точку плавления льда // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 1. С. 89–104.
https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=172742&ARTICLE_ID=172750
- [19] Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г. Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа. М.: Наука, 2016. 238 с.
- [20] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.
- [21] Чиглинцева А.С., Шагапов В.Ш. О нагнетании гидратообразующего газа в пласт снега, насыщенный тем же газом // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 219–226.
DOI: 10.21662/uim2017.2.033



On the theory of hydrate formation decomposition under thermal influence

Shagapov V.Sh. *, Davletshina M.R. **

*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa

**Ufa State Petroleum Technological University, Ufa

A mathematical model of the process of decomposition of gas hydrate during heat exposure is proposed and developed. Based on the proposed technological scheme and the corresponding theoretical model, the problem of the action of a heat source on a porous layer of finite length, initially saturated with methane hydrate, is considered. The task describes the heating and simultaneous extraction of gas into a combined well. According to the adopted scheme, a coolant in the form of hot water is supplied to the annular channel, and the internal well communicates with the formation and gas is produced there, which was formed during the hydrate decomposition as a result of thermal exposure. The influence of the temperature of the heat source on the evolution of thermal fields around the well, on the nature of the motion of the phase transition boundary, is studied, and the law of its motion is obtained. The heat consumption for heating the formation and the evolution of gas output over the considered time interval at various values of the heating temperature and pressure drop are analyzed. The dynamics of the gas mass flow rate and the energy efficiency of methane production at various values of the temperature difference between the reservoir and the fluid injected into the heat pipe are revealed. A quasistationary solution is obtained that corresponds to the case when a pressure is maintained in the well equal to the equilibrium value for the initial temperature of the gas hydrate formation. The dependence of the energy efficiency of the proposed method of gas production on the porosity of the formation is analyzed. It was established that with a twofold increase in the hydrate content of the formation, this value grows by about ten percent. The obtained solutions make it possible to determine the most favorable heat exposure regimes. Moreover, this solution is in good agreement with the numerical results obtained by a more general theoretical model.

Keywords: gas filtration, gas hydrate, phase transition, quasi-stationary solution, heat-transfer

References

- [1] Makogon YU.F. Gazogidraty. Istoriya izucheniya i perspektivy osvoyeniya // Geologiya i poleznye iskopayemye Mirovogo okeana. 2010. No. 2. Pp. 5–21.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=15122639>
- [2] Makogon YU.F., Omel'chenko R.YU. Messoyakha – gazogidratnaya zalez', rol' i znachenije // Geologiya i poleznye iskopayemye Mirovogo okeana. 2012. No. 3. Pp. 5–19.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=17960118>
- [3] Nair V.C., Gupta P., Sangwai J.S. Gas Hydrates as a Potential Energy Resource for Energy Sustainability // Sustainable Energy Technology and Policies. 2018. Vol. 1. Pp. 265–287.
DOI: 10.1007/978-981-10-7188-1_12
- [4] Cherskiy N.V., Bondarev E.A. O teplovom metode razrabotki gazogidratnykh mestorozhdeniy // Dokl. AN SSSR. 1972. V. 203, No. 3. Pp. 550–552.
<http://mi.mathnet.ru/rus/dan/v203/i3/p550>
- [5] Verigin N.N., Khabibullin I.L., Khalikov G.A. Lineynaya zadacha o razlozhenii gidratov gaza v poristoy srede // Izv. AN SSSR. MZHG. 1980. No. 1. Pp. 174–177.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=28143009>
- [6] Tsyarkin G.G. Effect of decomposition of a gas hydrate on the gas recovery from a reservoir containing hydrate and gas in the free state // Fluid Dynamics. 2005. No. 1. Pp. 117–125.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=14317668>
- [7] Nakai S. Development of Natural Gas Hydrate (NGH) Supply Chain // Proceedings, 25th World Gas Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, 4-8 June, 2012. Pp. 3040–3050.
- [8] Yin Z., Moridis G., Chong Z., Tan H., Linga P. Numerical analysis of experiments on thermally-induced dissociation of methane hydrates in porous media // Ind. Eng. Chem. Res. 2018. 57(17). Pp. 5776–5791.
DOI: 10.1021/acs.iecr.7b03256
- [9] Tsyarkin G.G. Tcheniya s fazovymi perekhodami v poristyykh sredakh. M.: Fizmatlit, 2009. 232 p.

- [10] Tsyppin G.G. Analytical solution of the nonlinear problem of gas hydrate dissociation in a formation // *Fluid Dynamics*. 2007. V. 42, No. 5. Pp. 798–806.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=14155488>
- [11] Grover T., Moridis G., Holditch S. Analysis of reservoir performance of Messoyakha gas hydrate field // *Proceedings of the eighteenth international offshore and polar engineering*. Vancouver, Canada, 2008. Pp. 49–56.
- [12] Nizayeva I.G., Makogon YU.F. Vozdeystviye elektromagnitnykh poley na netraditsionnyye vidy uglevodorodnogo syr'ya // *Geologiya i poleznyye iskopayemyye Mirovogo okeana*. 2013. No. 3. Pp. 42–54.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=20516491>
- [13] Khabibullin I.L., Nasyrov N.M. Matematicheskoye modelirovaniye dissotsiatsii gazovykh gidratov v peremennom elektromagnitnom pole // *Fil'tratsiya mnogofaznykh sistem*. ITPM SO AN SSSR. Novosibirsk: 1991. Pp. 91–95.
- [14] Syrtlanov V.R., Shagapov V.SH. Frontovaya zadacha o razlozhenii gazovykh gidratov v poristoy srede pri vysokochastotnom elektromagnitnom izluchenii // *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*. 1998. V. 71, No. 2. Pp. 263–267.
<http://www.itmo.by/jepeter/711998r/710263.html>
- [15] Shagapov V.Sh., Chiglintseva A.S., Syrtlanov V.R. Possibility of gas washout from a gas-hydrate massif by circulation of warm water // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2009. T. 50, No. 4. Pp. 628–637.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13602113>
- [16] Rahimly P.I., Poveshchenko Y.A., Rahimly O.R. et al. The Use of Splitting with Respect to Physical Processes for Modeling the Dissociation of Gas Hydrates // *Math Models Comput Simul*. 2018. V. 10. Pp. 69–78.
DOI: 10.1134/S2070048218010118
- [17] Rahimly P.I., Poveshchenko YU.A., Podryga V.O. et al. Zadachi sovместnoy fil'tratsii v taloy zone i p'yezoprovodnoy srede s gazogidratnymi vkl'yucheniymi // *Matematicheskoye modelirovaniye*. 2018. V. 30, No. 6. Pp. 95–116.
<http://mi.mathnet.ru/rus/mm/v30/i6/p95>
- [18] Shagapov V.SH., Chiglintseva A.S. On injection of hydrate-forming gas into a gas-saturated snowy agglomerate while transition through the ice melting point // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2018. V. 25, No. 1. Pp. 85–99.
DOI: 10.1134/S0869864318010080
- [19] Shagapov V.SH., Musakayev N.G. Dinamika obrazovaniya i razlozheniya gidratov v sistemakh dobychi, transportirovki i khraneniya gaza. M.: Nauka, 2016. 238 p.
- [20] Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred. M.: Nauka, 1987. P. 1. 464 p.; P. 2. 360 p.
- [21] Chiglintseva A.S., Shagapov V.SH. O nagnetanii gidratoo-brazuyushchego gaza v snezhnyy massiv, nasyshchennyy tem zhe gazom // *Trudy Instituta mekhaniki im. R.R. Mavlyutova UNTS RAN*. 2017. V. 12, No. 2. Pp. 219–226.
DOI: 10.21662/uim2017.2.033



Моделирование взрыва в твердой среде в пакете COMSOL Multiphysics

Белов А.В., Копченев О.В., Скачков А.О., Ушаков Д.Е.

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород

В настоящей работе рассматривается распространение взрывных волн в массиве горной породы, вызванных кратковременной нагрузкой. Такие нагрузки типичны при строительстве туннелей и других раскопок с использованием взрывных работ. Для моделирования методом конечных элементов использовалось кроссплатформенное программное обеспечение COMSOL Multiphysics 5.4. Взрыв воспроизводится в стальном баке, марка стали – EN 1.7220 4CrMo4. Среда в баке имеет свойства гранитной породы (модуль Юнга $E = 50$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 2/7$, плотность $\rho = 2700$ кг/м³). Сфера также является телом, имеющим свойства гранита, задается для уточнения геометрии взрыва и области, где указано построение сетки. Бак имеет следующие размеры: длина – 10.39 м, диаметр – 2.9 м, толщина стенки бака – 0.01 м. Для моделирования взрыва использовался интерфейс «Solid Mechanics», находящийся в ветке «Structural Mechanics», основанный на решении уравнений движения совместно с моделью для твердого материала. Вычисляются результаты, такие как смещение, напряжение и деформация. Сила на единицу объема (F_v) задается давлением в сфере по нормали. Также для данной марки стали был рассчитан предел прочности: по достижению определенного давления в баке (7.26 МПа) симуляция останавливается, а система уведомляет на каком моменте времени произошло разрушение. Используется зависимость от времени исследование («Time Dependent Study»). В качестве единицы времени используются секунды. Задача рассчитывается от 0 секунд (начальный момент времени) до 0.003 секунд (конечный момент времени) с шагом построения 0.00005.

Ключевые слова: взрыв, разрушение

1. Введение

Бурение и взрывные работы — это контролируемое использование взрывчатых веществ и применение других методов, таких как пиротехнические взрывные работы под давлением газа, для разрушения горных пород [1–3]. Чаще всего этот метод применяется в горнодобывающей промышленности, при разработке карьеров и строительстве плотин, туннелей или дорог. Результат взрыва камня часто называют срезом камня [4, 5].

В настоящее время в буровзрывных работах используется много разных видов взрывчатых

веществ с различным составом и эксплуатационными свойствами. Взрывчатые вещества с более высокой скоростью используются для относительно твердых пород, чтобы разрушать породу, в то время, как взрывчатые вещества с низкой скоростью применяются для мягких пород для создания большего давления газа и большего эффекта подъема [6, 7].

До появления машин для бурения, взрывные работы были единственным экономичным способом строительства длинных туннелей через твердые породы, где копание невозможно. Даже сегодня этот метод все еще используется при строительстве туннелей, например, при сооружении туннеля Лёчберг в Швейцарии.

Решение о строительстве туннеля с использованием машины для бурения или метода бурения и взрыва принимается на основе ряда факторов.

Длина туннеля является ключевой проблемой, которую необходимо решить, потому что использование больших машин для бурения горного туннеля имеет высокие капитальные затраты. Это означает, что строительство более коротких туннелей с применением этих машин, как правило, менее экономично и, следовательно, они обычно строятся с помощью буровзрывных работ [1]. Поэтому актуальным остается вопрос о количестве взрывчатки, необходимом для безопасной работы [8].

2. Математическая модель

Моделирование процесса взрыва производится методом конечных элементов в кроссплатформенном программном обеспечении COMSOL Multiphysics 5.4. Для моделирования взрыва используется интерфейс «Solid Mechanics», находящийся в ветке «Structural Mechanics». Интерфейс «Solid Mechanics» основан на решении уравнений движения совместно с моделью для твердого материала. Вычисляются результаты, такие как смещение, напряжение и деформация [9].

Для моделирования общих объемных нагрузок решается уравнение движения [10]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})^T + F_v, \quad (1)$$

где ρ — плотность материала в исходном недеформированном состоянии (density), кг/м³; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ — ускорение; ∇ — тензорный оператор дивергенции, который вычисляется относительно координат на каркасе материала (частные производные по координатам); F_v — сила на единицу объема, заданная пользователем, Н/м³; $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})^T$ — первый тензор напряжения Пиолы–Кирхгофа [10]. Силы в пространственных направлениях связаны с площадью в исходной (материальной) системе отсчета. Это несимметричный двухточечный тензор, вычисляется из второго тензора напряжения Пиолы–Кирхгофа. Первый тензор напряжения Пиолы–Кирхгофа связывает силы в данной конфигурации с областями в базовой и его иногда называют номинальным напряжением (напряжение в точке, рассчитанное для чистого поперечного сечения). Степень T в первом тензоре напряжений Пиолы–Кирхгофа означает транспонирование.

2.1. Первый тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа

В выражении $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})^T$ уравнения (1) градиент деформации F считается следующим образом:

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = \mathbf{I} + \frac{\partial u}{\partial X}.$$

где \mathbf{I} — тензор тождества (часто записывается как 1); x — пространственная координата, $x = X + u(X, t)$; u — поле смещения; X — исходное местоположение материальной частицы.

Второй тензор напряжения Пиолы–Кирхгофа \mathbf{S} вычисляется по формуле:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{C}}.$$

Здесь \mathbf{C} — тензор упругости 4-го порядка (тензор деформации Коши–Грина) [10], используется при описании составных свойств гиперэластичных материалов; W_s — плотность энергии упругой деформации, считается следующим образом:

$$W_s = \frac{1}{2} \varepsilon_{el} \cdot (\mathbf{C} \cdot \varepsilon_{el} + 2\sigma_0) = \frac{1}{2} \varepsilon_{el} \cdot (\sigma + \sigma_0),$$

где ε_{el} (упругая деформация) — это разница между полной деформацией ε и всеми неупругими деформациями (ε_{inel}).

Для линейного упругого материала закон Гука связывает тензор напряжения с тензором упругой деформации:

$$\sigma = \sigma_{ex} + \mathbf{C} \cdot \varepsilon_{el} = \sigma_{ex} + \mathbf{C} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{inel}).$$

Также может использоваться дополнительное напряжение (σ_{ex}) с вкладом от начальных (σ_0) и вязкоупругих напряжений.

3. Построение симуляции

3.1. Геометрия задачи

Взрыв моделируется в стальном баке длиной 10.39 м с толщиной стенок 0.01 м и радиусом 1.45 м. Материал бака — сталь марки EN 1.7220 4CrMo4. Геометрия задачи показана на рис. 1 [10].

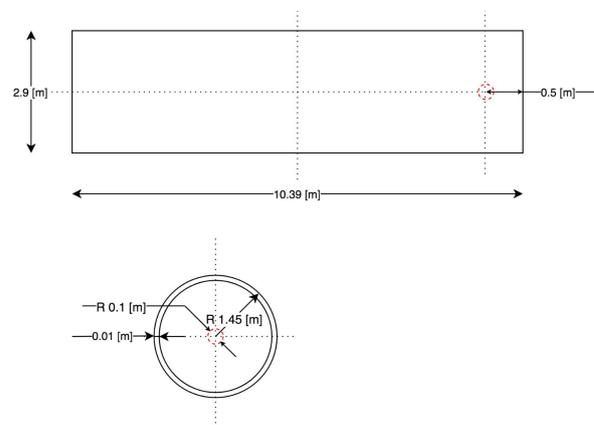


Рис. 1. Геометрия задачи

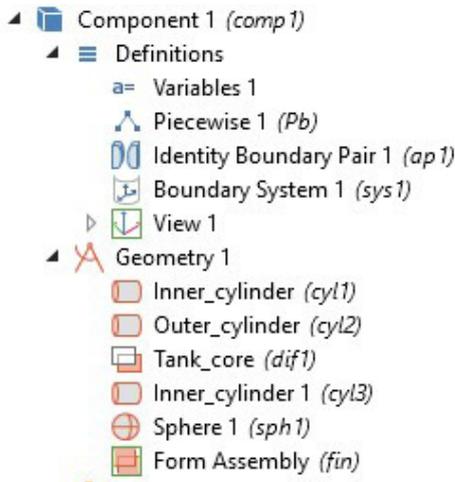


Рис. 2. Компонент в COMSOL

Созданы два цилиндра: внешний («Outer cylinder») и внутренний («Inner cylinder»). Радиус внутреннего цилиндра $R = 1.45$ м, высота $H = 10.39$ м. Радиус цилиндра $R = 2.9$ м. (Это радиус чего? Почему обозначен той же буквой R ?)

Для построения внешнего цилиндра прибавим к радиусу внутреннего цилиндра значение толщины бака $Th = 0.01$ м, к высоте $2 \cdot Th$ и сместим на $-Th$ по оси x . Так как инструмент «Difference» создает из двух цилиндров один, для получения внешнего цилиндра вычтем из него внутренний, используя «Difference», и построим еще один внутренний цилиндр, описанный выше. Добавим сферу радиусом $rad = 0.1$ м. (Я переформулировала этот абзац. Сверься с исходником, может я что-то неправильно поняла)

Чтобы объединить геометрию, необходимо воспользоваться инструментом «From Assembly». Также добавим «Identity Boundary Pair» в «Definitions», чтобы указать границы, которые совпадают, но принадлежат разным частям конструкции. Состав компонента COMSOL показан на рис. 2.

Система характеризуется параметрами, представленными на рис. 3.

3.2. Интерфейс «Solid Mechanics»

Для полей смещения и структурной скорости добавим начальные значения («Initial Values»), в которых будет содержаться вся геометрия: оба цилиндра и сфера.

Далее дополним источником взрыва («Explosion source»), который является Линейным эластичным материалом («Linear Elastic Material»). Этим пунктом будет сфера. Его свойства в данной задаче имеют свойства гранитной породы (модуль

Name	Expression	Value	Description
H	10.39 [m]	10.39 m	Height of tank
R	1.45 [m]	1.45 m	Radius of tank
Th	0.01 [m]	0.01 m	Tank thickness
Q	10 [g]	0.01 kg	Amount of explosive
x1	0.5 [m]	0.5 m	Sphere position (X axis)
y1	0 [m]	0 m	Sphere position (Y axis)
z1	0 [m]	0 m	Sphere position (Z axis)
N	$1.4 \cdot 10^{(6)}$ [N]	1.4E6 N	The strength of the explosion...
Pi	3.14	3.14	Pi number
rad	0.1		Radius of sphere
S	$4 \cdot \text{Pi} \cdot \text{rad}^{(2)}$ [m ²]	0.1256 m ²	Square of sphere
P_norm	$(2 \cdot N) / S \cdot (Q / 1[\text{kg}])^{(2/3)}$	1.0347E6 N/m ²	Normal Pressure
u0	0.0001	1E-4	Scaling coefficient for solver
Sig_t	785 [MPa]	7.85E8 Pa	Yield strength
Sig_v	932 [MPa]	9.32E8 Pa	Tensile strength
P_destr	$(2 \cdot \text{Sig}_t) / \text{sqrt}(3) \cdot \log(2 \cdot R \dots)$	7.2624E6 Pa	Pressure of tank destruction

Рис. 3. Параметры системы

Юнга $E = 50$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 2/7$, плотность $\rho = 2700$ кг/м³).

Область внутри цилиндра («Tank inner model») тоже является Линейным эластичным материалом и имеет свойства гранита.

Внешний цилиндр («Tank core model») представляет собой сталь марки EN 1.7220 34CrMo4, имеющей следующие свойства: модуль Юнга $E = 190$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.29$, плотность $\rho = 7000$ кг/м³. Также, как и остальные области, является Линейным эластичным материалом.

Границы внешнего цилиндра («Tank core boundary») и сферы («Boundary default») являются свободными узлами («Free»). Это означает, что на границе нет ограничений и нагрузок.

«Continuity» используется для случаев, когда не указано граничное условие домена (например, условие контактного сопротивления), программное обеспечение COMSOL Multiphysics обеспечивает непрерывность переменных поля во внутренних границах. Применяется для геометрии сборки с идентичными парами («Identity Boundary Pair»), описанной выше [10].

3.3. Установка силы на единицу объема в Body Load

Для моделирования общих объемных нагрузок используется инструмент «Body Load» с параметром «Force per unit volume» («Сила на единицу объема») методом конечных элементов [9, 11]. Состав модуля «Solid Mechanics» показан на рис. 4.

Сила на единицу объема (Fv) задается давлением в сфере по нормали:

$$P_{norm} = \frac{2N}{S} \left(\frac{Q}{1[\text{kg}]} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (2)$$

где N — сила воздействия взрыва на твердую среду

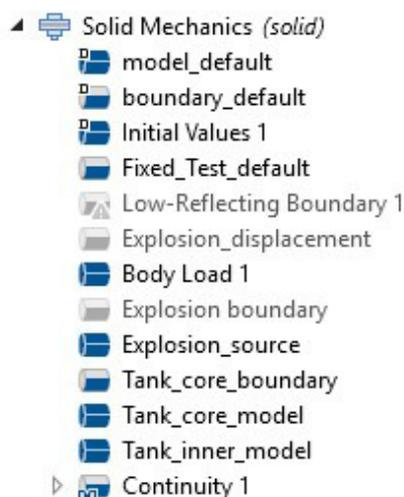


Рис. 4. Состав модуля Solid Mechanics

(выбрана эмпирически); S — площадь сферы; Q — количество взрывчатого вещества.

Для нахождения центра взрыва используются векторы положения путем умножения формулы (2) на $\left(\frac{x_-}{r}\right)$, $\left(\frac{y_-}{r}\right)$, $\left(\frac{z_-}{r}\right)$, где x_- , y_- , z_- — координаты центра сферы; r — радиус-вектор.

3.4. Сетка

Для внешнего и внутреннего цилиндров установлена треугольная сетка конечных элементов («Free Triangular»). Для источника взрыва (сфера) используется четырехгранная сетка («Free Tetrahedral»). Размер сетки всей геометрии имеет предопределенное значение «Extra Fine», что соответствует 32476 узловым элементам, объем сетки равен 69.26 м³. Выделение пристеночной области отсутствует.

3.5. Предел прочности бака

Материал бака — сталь марки EN 1.7220 34CrMo4, предел текучести $\sigma_{g_t} = 785$ МПа, предел прочности $\sigma_{g_v} = 932$ МПа. Расчет давления разрушения бака производится по следующей формуле:

$$P_{destr} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \left[\frac{2R}{2R - 2Th} \right]^{\frac{2}{3}} \left(2 - \frac{\sigma_T}{\sigma_B} \right).$$

Согласно расчету при возникновении в баке давления 7.26 МПа произойдет его разрушение и COMSOL прекратит выполнение симуляции, так как будет достигнуто Условие останова («Stop Condition»).

Прежде, чем установить Условие останова, нужно ввести определение максимального значения необходимой переменной (в данном случае —

давления). В «Component → Definition» необходимо установить «Maximum» (вычисляет максимум выражения для выбранных геометрических объектов) и указать поверхность цилиндра.

Поле выражение останова («Stop Expression») будет содержать следующее: $\text{comp1.maxop1}(\text{comp1.solid.mises}) \geq P_{destr}$. Это означает, что если максимальное давление компонента превысит значение P_{destr} , то симуляция прекратит свою работу.

3.6. Параметры решателя

Используется зависимый от времени решатель («Time Dependent Study»). В качестве единицы времени берутся секунды. Задача рассчитывается от 0 секунд (начальный момент времени) до 0.003 секунд (конечный момент времени) с шагом построения 0.00005 секунд.

4. Результаты вычислений

Во внимание принимаются значения давления на дне бака, рядом с источником взрыва, так как эта область больше всего подвержена нагрузке при возникновении взрыва.

4.1. 10 грамм взрывчатого вещества

При использовании 10 г взрывчатого вещества максимальное давление на стенки в центре бака составит $\sim 6.8 \cdot 10^6$ Па (6.8 МПа), а смещение будет равно ~ 1.2 мм (рис. 5).

Так как 10 г взрывчатого вещества не повлекут за собой разрушение, то давление будет распределяться по баку и наиболее высокую нагрузку будет испытывать центр бака (рис. 6).

4.2. 25 грамм взрывчатого вещества

Распределение давления на дне бака при 25 г взрывчатого вещества показано на рис. 7. Максимальное давление составит $\sim 1.26 \cdot 10^7$ Па (12.6 МПа), а смещение будет равно ~ 2.4 мм.

При 25 г взрывчатого вещества разрушение дна бака произойдет в момент времени $t = 0.0002742$ с. Область превышения максимально допустимого значения показана на рис. 8.

4.3. 50 грамм взрывчатого вещества

Максимальное давление при 50 г взрывчатого вещества составит $\sim 2 \cdot 10^7$ Па (20 МПа), а смещение будет равно ~ 4 мм (рис. 9).

Применение 50 г взрывчатого вещества (аналогично 25 г) обеспечат разрушение дна бака. Разрушение произойдет в момент времени $t = 0.000201$ с. Распределение давления на дне бака при 50 г взрывчатого вещества показано на рис. 10.

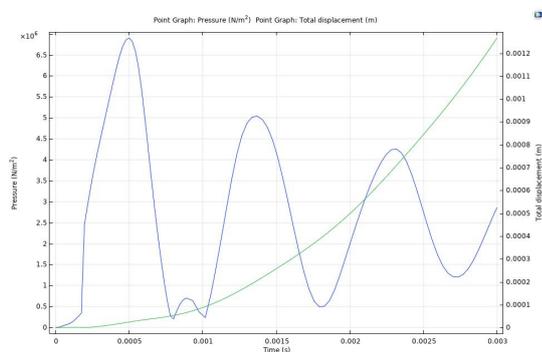


Рис. 5. Графики давления (синяя кривая) и смещения (зеленая) при 10 г взрывчатого вещества

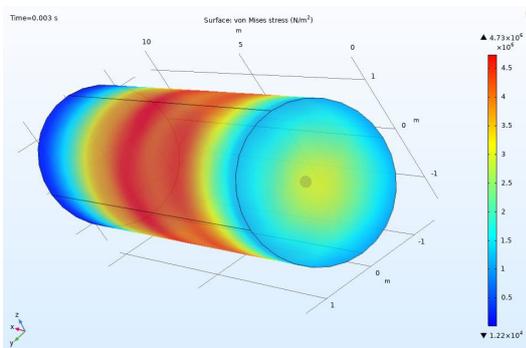


Рис. 6. Давление в точке разрушения при 10 г взрывчатого вещества ($t = 0.003$ с)

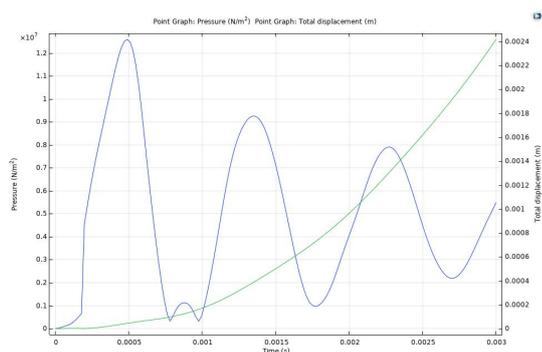


Рис. 7. Графики давления (синяя кривая) и смещения (зеленая) при 25 г взрывчатого вещества

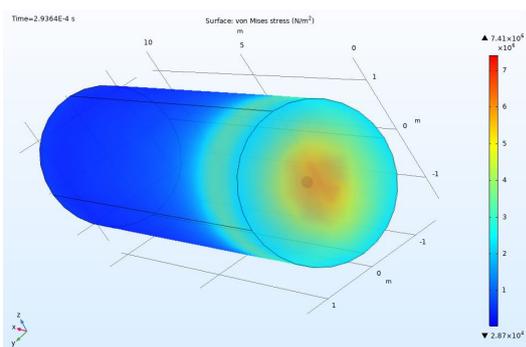


Рис. 8. Давление в точке разрушения при 25 г взрывчатого вещества ($t = 0.00293$ с)

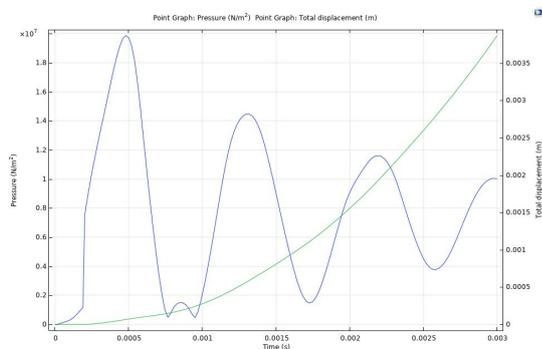


Рис. 9. Графики давления (синяя кривая) и смещения (зеленая) при 50 г взрывчатого вещества

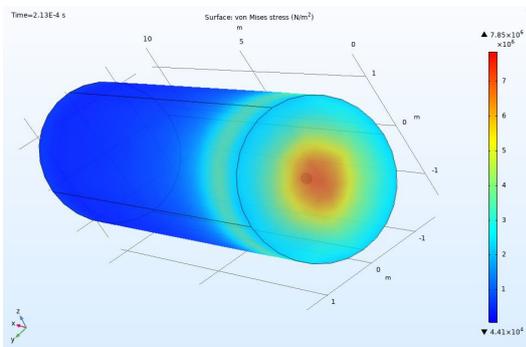


Рис. 10. Давление в точке разрушения при 50 г взрывчатого вещества ($t = 0.000213$ с)

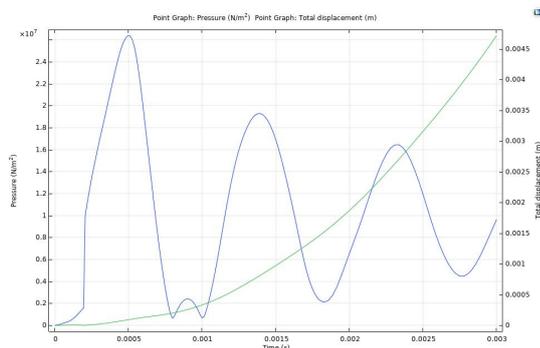


Рис. 11. Графики давления (синяя кривая) и смещения (зеленая) при 75 г взрывчатого вещества

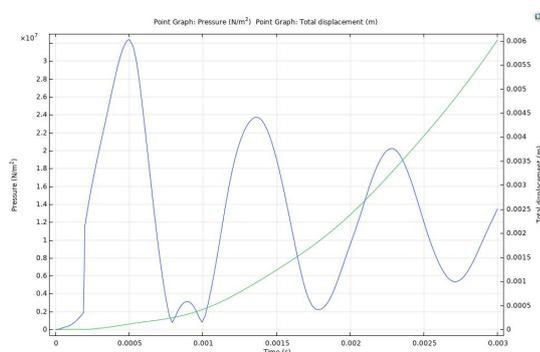


Рис. 13. Графики давления (синяя кривая) и смещения (зеленая) при 100 г взрывчатого вещества

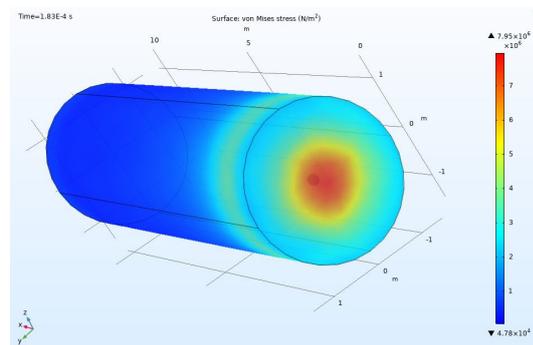


Рис. 12. Давление в точке разрушения при 75 г взрывчатого вещества ($t = 0.000183$ с)

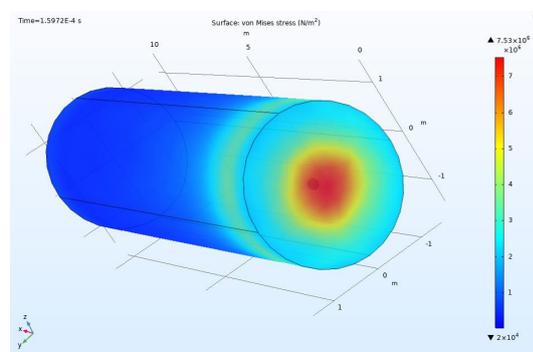


Рис. 14. Давление в точке разрушения при 100 г взрывчатого вещества ($t = 0.00015972$ с)

4.4. 75 грамм взрывчатого вещества

Распределение давления и смещение при 75 г взрывчатого вещества показаны на рис. 11 и 12.

Максимальное давление в точке разрушения достигнет $\sim 2.6 \cdot 10^7$ Па (26 МПа), а смещение будет равно ~ 4.7 мм. Моментом разрушения будет являться момент времени $t = 0.0001722$ с.

4.5. 100 грамм взрывчатого вещества

При увеличении количества взрывчатого вещества до 100 г разрушение дна бака произойдет при $t = 0.00015972$ с. При данном количестве взрывчатого вещества будет достигнуто максимальное давление в точке разрушения равно $\sim 3.2 \cdot 10^7$ Па (32 МПа), смещение составит ~ 6 мм (рис. 13).

На рис. 14 продемонстрировано распределение давления в точке разрушения при 100 г взрывчатого вещества.

Очевидно, что при увеличении количества взрывчатки возрастут смещение и давление, оказываемое на стенки бака, а также будет уменьшаться время с момента начала симуляции до превышения максимально допустимого давления, при

котором происходит разрушение рассматриваемого тела.

5. Заключение

Результатом настоящей работы стала симуляция взрыва в твердой среде (гранит) в стальном баке. Рассчитаны давление в баке и поле смещения, а также давление разрушения, при превышении которого произойдет разрушение бака и остановка симуляции в определенный момент времени. Графическое представление решения COMSOL позволило узнать область деформации бака.

Данная базовая модель взрыва в дальнейшем позволит провести более широкое исследование влияния взрывных волн на тело за счет увеличения количества параметров симуляции, например, температуры.

Список литературы

- [1] Per-Anders Persson, Roger Holmberg, Jaimin Lee. Rock Blasting and Explosives Engineering. CRC Press. 1994. P. 560. DOI: [10.1201/9780203740514](https://doi.org/10.1201/9780203740514)
- [2] Кузнецов В.М., Шацкевич А.Ф. О взаимодействии продуктов детонации со стенками взрывной полости в грунтах и горных породах // Физика горения и взрыва. 1977. № 5.

- С. 733–737.
http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=154080&ARTICLE_ID=155297
- [3] Станюкович К.П., Баум Ф.А. Физика взрыва // М: Физматлит, 2002. 831 с.
<http://padaread.com/?book=20818&pg=1>
- [4] Вайнштейн Б.И., Кузнецов В.М., Шацкевич Ф.Ф. Относительная эффективность ВВ при взрывах в грунтах // Физика горения и взрыва. 1984. № 5. С. 104–106.
http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=150981&ARTICLE_ID=151105
- [5] Родионов В.Н. О механизме возбуждения низкочастотных объемных сейсмических волн при подземном взрыве // Прикладная механика и техническая физика. 1981. № 5. С. 153–155.
http://sibran.ru/journals/issue.php?ID=151737&ARTICLE_ID=151875
- [6] Катаева Л.Ю. Постановка и проведение вычислительного эксперимента по исследованию аэро- и гидродинамических процессов в аварийных ситуациях природного и техногенного характера // М.: Российский государственный открытый технический университет путей сообщения, 2007. С. 218.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19438277>
- [7] Камалян Р.З., Камалян С.Р. О моделировании сильных возмущений в грунтовом массиве (на примере пористой среды) // European Researcher. 2011. № 5–1(7). Р. 496–498.
http://www.erjournal.ru/journals_n/1309441407.pdf
- [8] Артышев С.Г., Дунин С.З. Ударные волны в дилатирующих и недилатирующих средах // Прикладная механика и техническая физика. 1978. № 4. С. 104–108.
http://sibran.ru/journals/issue.php?ID=153551&ARTICLE_ID=153698
- [9] Ильичева М.Н., Катаева Л.Ю., Масленников Д.А., Лоцилов А.А. Использование современных численных методов для моделирования распространения импульсного воздействия на основе уравнений Эйлера // Материалы XXXI Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы пожарной безопасности». 2019. С. 180–183.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=38074297>
- [10] Structural Mechanics Module User's Guide // COMSOL Inc. 2018. P. 1160.
<https://doc.comsol.com/5.4/doc/com.comsol.help.sme/StructuralMechanicsModuleUsersGuide.pdf>
- [11] Масленников Д.А., Белоцерковская И.Е., Лоцилов С.А., Катаева Л.Ю. Особенности численного моделирования распространения суммарного теплового потока при лесных пожарах // Нижний Новгород: ООО «Стимул-СТ». 2013. С. 110.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=24904735>
- [12] Алабьев Е.Н. Прочностной расчет баллона газового с рабочим давлением до 20 МПа // Отчет. 2015.
<https://tgko.ru/download.php?price&id=130>



Solid-state explosion simulation in COMSOL Multiphysics

Belov A.V., Kopchenov O.V., Skachkov A.O., Ushakov D.E.

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev

In this work, the propagation of blast waves in a rock mass caused by a short-term load is considered. Such loads are typical in the construction of tunnels and other excavations using blasting. For modeling by the finite element method, the cross-platform software COMSOL Multiphysics 5.4 was used. The explosion is reproduced in a steel tank whose steel grade is EN 1.7220 4CrMo4. The medium in the tank has the properties of granite rock (Young's modulus $E = 50$ GPa, Poisson's ratio $\nu = 2/7$, Density $\rho = 2700$ kg/m³). The sphere is also a body having the properties of granite. Set to clarify the geometry of the explosion and the area where the mesh is indicated. The tank has dimensions: 10.39 m in length and diameter 2.9 m. The wall thickness of the tank is 0.01 m. To model the explosion, the Solid Mechanics interface was used, located in the Structural Mechanics branch, based on solving equations of motion together with a model for solid material. Results such as displacement, stress, and strain are calculated. The force per unit volume (F_v) is specified by the normal pressure in the sphere. Also, the tensile strength was calculated for this steel grade: upon reaching a certain pressure in the tank (7.26 MPa), the simulation stops, and the system notifies at what point in time the destruction occurred. A Time Dependent Study is used. Seconds are used as a unit of time. The task is calculated from 0 seconds (initial moment of time) to 0.003 seconds (final moment of time) with a construction step of 0.00005.

Keywords: explosion, destruction

References

- [1] Per-Anders Persson, Roger Holmberg, Jaimin Lee. Rock Blasting and Explosives Engineering. CRC Press. 1994. P. 560.
DOI: 10.1201/9780203740514
- [2] Kuznetsov V.M., Shatsukevich A.F. [The interaction of detonation products with the walls of the explosive cavity in soils and rocks] *O vzaimodejstvii produktov detonacii so stenkami vzryvnoj polosti v gruntax i gornyx porodax* // Fizika goreniya i vzryva. 1977. No. 5. P. 733–737 (In Russian). http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=154080&ARTICLE_ID=155297
- [3] Stanyukovich K.P., Baum F.A. [Explosion Physics] *Fizika vzryva* // M.: Fizmatlit, 2002. 831 p. (In Russian).
<http://padaread.com/?book=20818&pg=1>
- [4] Weinstein B.I., Kuznetsov V.M., Shatsukevich F.F. [The relative effectiveness of explosives in explosions in soils] *Otnositel'naya effektivnost' VV pri vzryvax v gruntax* // Fizika goreniya i vzryva. 1984. No. 5. C. 104–106 (In Russian).
http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=150981&ARTICLE_ID=151105
- [5] Rodionov V.N. [The excitation mechanism of low-frequency bulk seismic waves during an underground explosion] *O mexanizme vzbuzhdeniya nizkочastotnyx ob'yomnyx seismicheskix voln pri podzemnom vzryve* // Prikladnaya mexanika i texnicheskaya fizika. 1981. No. 5. C. 153–155 (In Russian).
http://sibran.ru/journals/issue.php?ID=151737&ARTICLE_ID=151875
- [6] Kataeva L.Yu. [Setting up and conducting a computational experiment to study aerodynamic and hydrodynamic processes in natural and man-made emergencies] *Postanovka i provedenie vychislitel'nogo eksperimenta po issledovaniyu ae'ro- i gidrodinamicheskix processov v avarignyx situacijax prirodnogo i texnogennogo xaraktera* // M.: Russian State Open Technical University of Railway Engineering, Moscow, 2007. C. 218. (In Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19438277>
- [7] Kamalyan R.Z., Kamalyan S.R. [The modeling of strong disturbances in a soil massif (on the example of a porous medium)] *O modelirovanii sil'nyx vozmushhenij v gruntovom massive (na primere poristoj sredy)* // European Researcher. 2011. No. 5–1(7). P. 496–498 (In Russian).
http://www.erjournal.ru/journals_n/1309441407.pdf
- [8] Artyshev S.G., Dunin S.Z. [Shock waves in dilating and non-dilating media] *Udarnye volny v dilatiruyushhix i nedilatiruyushhix sredax* // Prikladnaya mexanika i texnicheskaya fizika. 1978. No. 4. C. 104–108 (In Russian).
http://sibran.ru/journals/issue.php?ID=153551&ARTICLE_ID=153698
- [9] Ilicheva M.N., Kataeva L.Yu., Maslennikov D.A., Loshchilov A.A. [The use of modern numerical methods for modeling the propagation of pulsed action based on the Euler equations] *Ispol'zovanie sovremennyx chislennyx metodov dlya modelirovaniya rasprostraneniya impul'snogo vozdejstviya na osnove uravnenij E'jlera* // Materialy XXXI Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Aktual'nye problemy pozharnoj bezopasnosti». 2019. C. 180–183 (In Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=38074297>

- [10] Structural Mechanics Module User's Guide // COMSOL Inc. 2018. P. 1160.
<https://doc.comsol.com/5.4/doc/com.comsol.help.sme/StructuralMechanicsModuleUsersGuide.pdf>
- [11] Maslennikov D.A., Belotserkovskaya I.E., Loshchilov S.A., Kataeva L.Yu. [Features of numerical simulation of the distribution of the total heat flux during forest fires] *Osobennosti chislennogo modelirovaniya rasprostraneniya summarnogo teplovogo potoka pri lesnyx pozharax* // Nizhnij Novgorod: OOO «Stimul-ST» 2013. C. 110 (In Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=24904735>
- [12] Alabyev E.N. [Strength analysis of a gas cylinder with a working pressure of up to 20 MPa] *Prochnostnoj raschet ballona gazovogo s rabochim davleniem do 20 MPa* // Otchet. 2015 (In Russian).
<https://tgko.ru/download.php?price&id=130>



Определение скорости и плотности жидкости внутри трубопровода на упругих опорах¹

Юлмухаметов А.А., Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследуются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода, провисающего над препятствием и находящегося под действием растягивающей силы. По обе стороны от провисающего участка труба лежит на упругих опорах. Транспортируемая по трубопроводу жидкость находится под давлением. Прямая задача была решена ранее, в настоящей статье решается обратная задача идентификации скорости и плотности транспортируемой жидкости по известным собственным частотам изгибных колебаний. Уравнение изгибных колебаний трубопровода описывается по модели Кирхгоффа. Характеристическое уравнение решается с помощью формул Феррари. Определяется общее решение. Удовлетворяя общее решение граничным условиям, получаем систему уравнений. Эта система дает частотное уравнение, которое решается уже численно на специально разработанной программе в математическом пакете Maple. Применяется метод последовательных приближений, уже после третьей итерации точность вычислений параметров скорости и плотности транспортируемой жидкости составляет примерно 10^{-3} . Таким образом, получено, что с увеличением частоты колебаний плотность жидкости внутри трубы уменьшается. Определено, что с увеличением собственных частот изгибных колебаний трубопровода параметр скорости транспортируемой жидкости растет. Показано, что по двум низшим частотам изгибных колебаний трубопровода можно определить параметры скорости и плотности жидкости. Приведена зависимость массового расхода жидкости от первой собственной частоты колебаний трубы. Показано, что с увеличением собственных частот массовый расход уменьшается. Результаты исследования помогут развитию методов акустической диагностики и методов неразрушающего контроля и найдут техническое применение для контроля и диагностики состояния трубопроводных систем.

Ключевые слова: трубопровод, упругие опоры, изгибные колебания, собственные частоты, скорость и плотность жидкости

1. Введение

Значительное количество трудов посвящено изучению динамики и неустойчивостей трубопроводов. Несмотря на это, вопрос исследования трубопроводных систем является актуальным не только для нефтяных стран, таких, как Россия, но и для всего мира. Приведем обзор нескольких современных работ в данной области.

В [1] рассматриваются свободные и гармонические колебания трубопровода, возникающие при

транспортировке газосодержащей жидкости. Колебания происходят за счет неравномерного распределения по длине трубы скопления газа. Сам трубопровод рассматривается как балка на упругом основании, описываемая моделью Винклера, подверженная действию пульсационной нагрузки. Определяется спектр частот колебаний. Приведенное решение может быть использовано для прогноза долговечности трубы.

Работа [2] посвящена исследованию отложений парафина в трубопроводах, подвергаемых сезонной чистке. Разработана полуэмпирическая модель накопления отложений парафина, позволяющая рассчитывать распределение отложений по длине трубопровода, а также находить толщину от-

¹Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0088).

ложений на стенке перед проведением операции очистки.

В [3] исследуются частоты и формы собственных колебаний шарнирно-опертых по концам криволинейных участков стальных трубопроводов, поддерживающих стационарный поток жидкостей. Здесь определено, что с увеличением рабочего внутреннего давления растут и частоты свободных колебаний. Приведена численная оценка влияния внутреннего гидростатического давления на свободные колебания в зависимости от различных значений кривизны и толщины стенок трубопровода.

В работе [4] приводится точное решение задачи о совместных (связанных) сейсмических колебаниях подземного трубопровода и бесконечной упругой среды. На основании установленной теоремы о разделении граничных условий для волновых потенциалов на поверхности цилиндра предложен способ, существенно упрощающий решение внешней задачи для среды. Здесь также дается сравнение точного решения и решения, полученного в приближении одномерной деформации среды, предложенного ранее при формулировке связанных задач для трубопровода. Результаты сравнения показывают, что решения практически совпадают как при дозвуковом режиме (когда скорость сейсмической волны меньше стержневой скорости распространения волн в трубопроводе), так и в сверхзвуковом, при котором возможно появление резонанса.

Достаточно полный обзор с кратким анализом результатов теоретических исследований устойчивости и колебаний изотропных и композитных (ортотропная модель) цилиндрических оболочек конечной длины при взаимодействии с внутренним потоком жидкости приведен в работе [5]. Здесь сформулированы постановки различных линейных и нелинейных задач о потере устойчивости и закритическом деформировании несущих жидкость оболочек; построены общие и упрощенные расчетные модели, описывающие процессы взаимодействия оболочек с протекающей жидкостью. Предложены критерии, позволяющие устанавливать моменты наступления неустойчивости «квазистатического» (дивергентного) и динамического («флаттерного») видов. Проведен анализ влияния конструктивных особенностей жестко присоединенных к несущей оболочке масс и начальных несовершенств геометрического характера на потерю устойчивости. Рассмотрено влияние окружающей среды на значения критических скоростей движения жидкости, при которых реализуется потеря устойчивости. С использованием одночастотного асимптотического метода построены реше-

ния разрешающих уравнений несущих оболочек, соответствующие их самовозбуждаемым и вынужденным колебаниям. Изучены особенности динамической потери устойчивости и закритического деформирования оболочек при взаимодействии с пульсирующим потоком жидкости. Рассмотрены некоторые задачи о нестационарных процессах медленного прохождения системы «оболочка-протекающая жидкость» через гармонический и параметрический резонансы.

2. Постановка задачи

Исследуются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода, провисающего над препятствием и находящегося под действием растягивающей силы. По обе стороны от провисающего участка труба лежит на упругих опорах. Транспортируемая по трубопроводу жидкость находится под давлением. По известному спектру частот требуется определить скорость и плотность транспортируемой жидкости.

Прямая задача идентификации собственных частот изгибных колебаний трубопровода по известным скоростному параметру, параметру плотности жидкости, коэффициентам упругости опор была изучена в [6], в настоящей работе решается обратная задача. Ранее уже проводились подобные исследования. Определение параметров упругости грунта, присоединенной массы грунта, давления жидкости по известным собственным частотам изгибных колебаний трубопровода проведено в работе [7]. В этой работе скорость транспортируемой жидкости не учитывалась.

Уравнение изгибных колебаний трубопровода по модели Кирхгоффа имеет вид [8, 9]:

$$EJ \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + (\rho_i F_i V^2 + P_i F_i - N) \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} + 2\rho_i F_i V \frac{\partial^2 w_*}{\partial x \partial t} + (\rho F + \rho_i F_i) \frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq L).$$

Здесь E — модуль Юнга или модуль продольной упругости материала; ρ — плотность материала трубы; J — осевой момент инерции трубчатого сечения; F — площадь поперечного сечения трубопровода; ρ_i , P_i , V — плотность, давление и скорость течения транспортируемой жидкости; F_i — площадь сечения трубопровода «в свету»; N — усилие растяжения в трубопроводе; w_* — прогиб трубопровода; x — координата, направленная по оси трубопровода; t — время; L — длина трубопровода между опорами. Отсчитывая координату x от точки креп-

ления, запишем граничные условия:

$$\begin{aligned} Q &= -c_1 w_*, \quad M = c_2 \frac{\partial w_*}{\partial x} \quad (x = 0), \\ Q &= c_3 w_*, \quad M = c_4 \frac{\partial w_*}{\partial x} \quad (x = L), \end{aligned} \quad (2)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — коэффициенты жесткости закрепления трубопровода; $M = EJ (\partial^2 w_*) / (\partial^2 x)$ — изгибающий момент; $Q = EJ (\partial^3 w_*) / (\partial^3 x)$ — перерезывающая сила.

Введя безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \quad w = \frac{w_*}{L}, \quad \tau = \frac{V_0 t}{L}, \quad V_0 = L^{-1} \sqrt{\frac{EJ}{(\rho F + \rho_i F_i)}}, \\ R &= \frac{(N - P_i F_i) L^2}{EJ}, \quad \alpha = \frac{V}{V_0}, \quad \beta = \frac{\rho_i F_i}{\rho F + \rho_i F_i}, \\ q &= 2\alpha\beta\Omega, \quad \Omega = \frac{\omega L}{V_0}, \quad r = -\Omega^2, \quad F_i = \pi R_i^2, \\ F &= \pi [(R_i + h)^2 - R_i^2], \quad J = \frac{\pi}{4} [(R_i + h)^4 - R_i^4], \\ \eta_1 &= \frac{c_1 L^3}{EJ}, \quad \eta_2 = \frac{c_2 L}{EJ}, \quad \eta_3 = \frac{c_3 L^3}{EJ}, \quad \eta_4 = \frac{c_4 L}{EJ}, \end{aligned}$$

и сделав подстановку $w = W(\xi) \exp(i\Omega\tau)$, из (1) получим уравнение, определяющее форму изгибных колебаний трубопровода:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + p \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + iq \frac{\partial W}{\partial \xi} + rW = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1). \quad (3)$$

$$D = \begin{vmatrix} k_1^3 + \eta_1 & k_2^3 + \eta_1 & k_3^3 + \eta_1 & k_4^3 + \eta_1 \\ k_1^2 - \eta_2 k_1 & k_2^2 - \eta_2 k_2 & k_3^2 - \eta_2 k_3 & k_4^2 - \eta_2 k_4 \\ (k_1^3 - \eta_3) \exp k_1 & (k_2^3 - \eta_3) \exp k_2 & (k_3^3 - \eta_3) \exp k_3 & (k_4^3 - \eta_3) \exp k_4 \\ (k_1^2 - \eta_4 k_1) \exp k_1 & (k_2^2 - \eta_4 k_2) \exp k_2 & (k_3^2 - \eta_4 k_3) \exp k_3 & (k_4^2 - \eta_4 k_4) \exp k_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, в рассматриваемую модель трубопровода, транспортирующего жидкость под давлением, входят параметры $R, \alpha, \beta, \eta_1 - \eta_4$, которые зависят от усилия растяжения в трубопроводе N , давления внутри трубопровода P_i , площади сечения трубопровода «в свету» F_i , скорости течения жидкости внутри трубопровода V , коэффициентов жесткости опор $c_1 - c_4$.

3. Решение обратной задачи

Обратная задача определения плотности и скорости жидкости заземленного по краям трубопровода уже рассматривалась в работе [10]. Здесь по двум частотам изгибных колебаний определяется скоростной параметр, параметр плотности или масса жидкости на единицу длины трубопровода и

Здесь ω — круговая частота; α — скоростной параметр; β — параметр плотности жидкости в трубопроводе; $\eta_1 - \eta_4$ — коэффициенты упругости опор.

С учетом введенных обозначений граничные условия (2) записываются как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^3}{\partial \xi^3} &= -\eta_1 W, \quad \frac{\partial W^2}{\partial \xi^2} = \eta_2 \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (\xi = 0), \\ \frac{\partial W^3}{\partial \xi^3} &= \eta_3 W, \quad \frac{\partial W^2}{\partial \xi^2} = \eta_4 \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (\xi = 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Общее решение уравнения (3) будем определять в виде:

$$W(\xi) = \sum_{j=1}^4 C_j \exp k_j \xi. \quad (5)$$

Здесь комплексные волновые параметры $k_j = k_j(\alpha, \beta, R, \Omega)$, $j = 1 \dots 4$ находятся из характеристического уравнения $k^4 + pk^2 + iqk + r = 0$, которое решается с помощью формул Феррари так же, как и в работе [6].

Удовлетворяя (5) граничным условиям (4), получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных постоянных C_j ($j = 1 \dots 4$). Эта система определяет частотное уравнение

безразмерный массовый расход жидкости по трубопроводу. Задача была решена методом последовательных приближений. Аналогичным образом будем решать и поставленную задачу. Для этого запишем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} D_1 = D_1(\alpha, \beta, \Omega_1) = 0, \\ D_2 = D_2(\alpha, \beta, \Omega_2) = 0, \end{cases}$$

где $D = D(\alpha, \beta, \Omega_1)$ определяется из уравнения (6) при известных коэффициентах упругости опор $\eta_1 - \eta_4$. Решение этой системы уравнений определяется методом последовательных приближений в области однозначной зависимости скоростного параметра и параметра плотности жидкости от частоты колебаний трубопровода.

Таблица 1. Результаты расчета параметров α и β по известным частотам Ω_1 и Ω_2 при начальном приближении α_0 и β_0 для $\eta_1 = \eta_3 = 0.5, \eta_2 = \eta_4 = 0$ (количество итераций расчетной программы = 3)

Ω_1	Ω_2	α_0	β_0	α	β
22.462351	61.704894	0.2	0.2	0.091163	0.091163
22.461301	61.703873	0.2	0.5	0.099905	0.401724
22.460889	61.703558	0.2	0.6	0.099988	0.500944
22.459974	61.702968	0.2	0.8	0.100092	0.700070
22.458698	61.701431	0.25	0.6	0.149833	0.501476
22.455626	61.698451	0.3	0.6	0.199693	0.501732
22.451685	61.694618	0.35	0.6	0.249936	0.500359
22.446862	61.689938	0.4	0.6	0.299785	0.500728

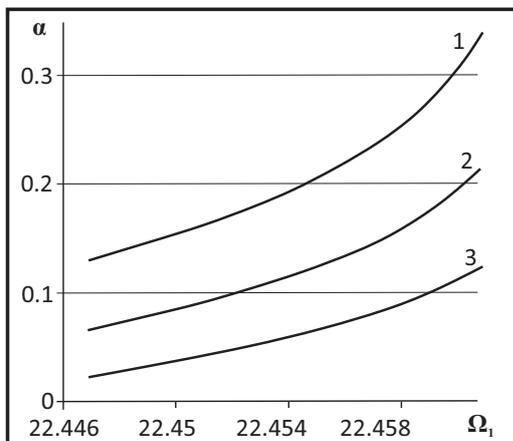


Рис. 1. Зависимость параметра скорости транспортируемой жидкости α от первой собственной частоты Ω_1 изгибных колебаний трубопровода при значениях коэффициентов упругости опор $\eta_1 = \eta_3 = 0.5, \eta_2 = \eta_4 = 0$ для разных значений Ω_2 : кривая 1 – 61.698451, 2 – 61.701431, 3 – 61.073558

Задавая начальное приближение α_0, β_0 , получим $D_1 = D_1(\alpha_0, \beta_0, \Omega_1) = u_1, D_2 = D_2(\alpha_0, \beta_0, \Omega_2) = u_2$. Поэтому можем записать

$$\begin{cases} \frac{\partial D_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial D_1}{\partial \beta} d\beta = -u_1, \\ \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial D_2}{\partial \beta} d\beta = -u_2. \end{cases}$$

Из последней системы определяются параметры $d\alpha$ и $d\beta$, далее $\alpha_0 = \alpha_0 + d\alpha, \beta_0 = \beta_0 + d\beta$. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не выполнится условие точности.

Результаты расчета параметров α и β колебаний трубопровода с упругими опорами для $R = 0, \eta_1 = \eta_3 = 0.5, \eta_2 = \eta_4 = 0$ приведены в табл. 1. Вычисления проводятся по вышеописанному методу на специально разработанной программе в среде

Таблица 2. Собственные частоты Ω_1 и Ω_2 при различных параметрах α и β , для $\eta_1 = \eta_3 = 0.5, \eta_2 = \eta_4 = 0$

α	β	Ω_1	Ω_2
0.1	0.1	22.462351	61.704894
0.1	0.4	22.461301	61.703873
0.1	0.5	22.460889	61.703558
0.1	0.7	22.459974	61.702968
0.15	0.5	22.458698	61.701431
0.2	0.5	22.455626	61.698451
0.25	0.5	22.451685	61.694618
0.3	0.5	22.446862	61.689938

программирования Maple. Для сравнения и оценки полученных результатов в табл. 2 приведен спектр частот прямой задачи, определенных при заданных параметрах α и β . Например, для значений $\alpha = 0.1$ и $\beta = 0.5$ в прямой задаче (табл. 2) получены собственные частоты $\Omega_1 = 22.460889$ и $\Omega_2 = 61.703558$. В обратной задаче для этих найденных частот с начальным приближением параметров $\alpha_0 = 0.2, \beta_0 = 0.6$ (табл. 1) после трех итераций вычислительная программа выдает результаты $\alpha = 0.099988$ и $\beta = 0.500944$. Таким образом, программа расчета собственных частот дает достаточно хорошие результаты. Погрешность вычислений параметров скорости и плотности транспортируемой жидкости составляет примерно $\Delta\alpha = |0.1 - 0.099988| \approx 10^{-5}, \Delta\beta = |0.5 - 0.500944| \approx 10^{-4}$. При анализе остальных результатов табл. 1 можно сделать вывод, что параметры α и β определяются с точностью 10^{-3} (для количества итераций равного 3). Очевидно, что с увеличением количества итераций точность решения обратной задачи возрастет.

Таким образом, результаты вычислений обратной задачи, приведенные в табл. 1, имеют хорошую сходимость. На рис. 1 представлена зависимость параметра скорости транспортируемой жидкости α

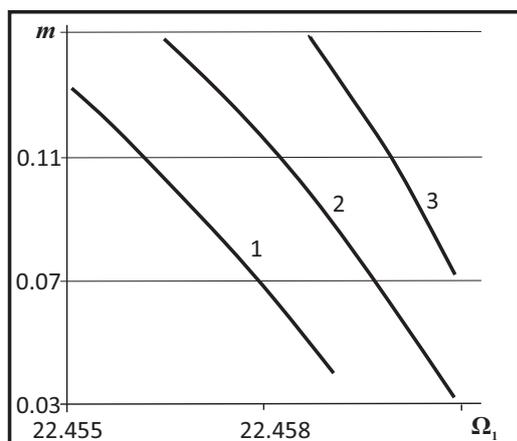


Рис. 3. Зависимость массового расхода m от частоты Ω_1 при $\eta_1 = \eta_3 = 0.5$, $\eta_2 = \eta_4 = 0$ для разных значений Ω_2 : кривая 1 – 61.698451, 2 – 61.701431, 3 – 61.073558

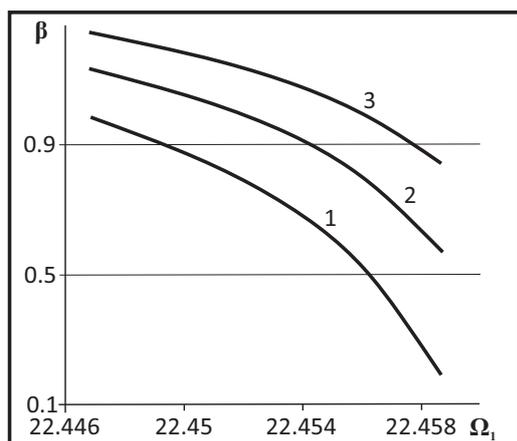


Рис. 2. Зависимость параметра плотности жидкости β от частоты Ω_1 при $\eta_1 = \eta_3 = 0.5$, $\eta_2 = \eta_4 = 0$ для разных значений Ω_2 : кривая 1 – 61.698451, 2 – 61.701431, 3 – 61.073558

от первой собственной частоты Ω_1 при различных значениях параметра Ω_2 . Показано, что с увеличением первой собственной частоты Ω_1 (при фиксированном значении второй собственной частоты Ω_2) параметр скорости жидкости α внутри трубопровода возрастает. На рис. 2 показано влияние собственных частот на плотность жидкости внутри трубопровода. Получено, что с увеличением первой частоты Ω_1 изгибных колебаний трубопровода плотность жидкости β внутри трубопровода падает, причем тем быстрее, чем меньше вторая частота Ω_2 изгибных колебаний.

Зная параметры скорости и плотности жидкости можно вычислить массовый расход по трубопроводу [10]:

$$m = \alpha\beta = \rho_i F_i VL / \sqrt{EJ (\rho F + \rho_i F_i)}.$$

На рис. 3 приведена зависимость массового расхода жидкости m от первой собственной частоты Ω_1 колебаний трубы при разных значениях частоты Ω_2 . Получено, что массовый расход m уменьшается с увеличением первой собственной частоты Ω_1 .

4. Заключение

Определено, что с увеличением частоты колебаний параметр плотности жидкости внутри трубы уменьшается. Показано, что с увеличением собственных частот изгибных колебаний трубопровода параметр скорости транспортируемой жидкости растет. Получено, что по двум низшим частотам изгибных колебаний трубопровода можно определить параметры скорости и плотности жидкости. Показано, что с увеличением первой собственной частоты массовый расход уменьшается.

Список литературы

- [1] Бондаренко В.М., Травуш В.И. Колебания трубопроводов при транспортировании газосодержащих жидкостей // Academia. Архитектура и строительство. 2017. № 1. С. 101–103. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29093256>
- [2] Ван Вэньда, Хуан Цийу, Хуан Цзунь, Пан Цуань, Фу Цзунь, Ван Фенхуи. Исследование отложений парафина в трубопроводах, подвергаемых сезонной чистке // Химия и технология топлив и масел. 2014. № 1. С. 27–33. <https://elibrary.ru/item.asp?id=22458712>
- [3] Березнев А.В. Влияние внутреннего гидростатического давления на частоты свободных колебаний криволинейного участка трубопровода // Известия ВУЗ. Нефть и газ. 2011. № 3. С. 77–80. <https://elibrary.ru/item.asp?id=16453669>
- [4] Исраилов М. Ш. Связанные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 57–66. <https://elibrary.ru/item.asp?id=25996903>
- [5] Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. Устойчивость и нелинейные колебания замкнутых оболочек цилиндрической формы при взаимодействии с протекающей жидкостью (обзор) // Прикладная механика. 2015. Т. 51, № 1. С. 19–78. http://nbuv.gov.ua/UJRN/PMekh_2015_51_1_4
- [6] Хакимов А.Г., Юлмухаматов А.А. Изгибные колебания трубопровода на упругих опорах с движущейся жидкостью // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 10–16. DOI: 10.21662/mfs2019.1.002
- [7] Хакимов А.Г., Юлмухаматов А.А. Обратная задача изгибных колебаний трубопровода // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2018. № 1. С. 86–96. DOI: 10.17122/ntj-oil-2018-1-86-96
- [8] Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. 2. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.
- [9] Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. М.: Nauka, Fizmatlit, 1998. P. 208.
- [10] Хакимов А.Г. Определение массового расхода жидкости в трубопроводе под давлением по собственным частотам изгибных колебаний // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2016. № 2. С. 49–57. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26538789>



Determination of the speed and density of the fluid inside the pipeline on elastic supports

Yulmukhametov A.A., Khakimov A.G.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia

The natural frequencies of the bending vibrations of the pipeline are investigated. The pipe sags over the obstacle and is under the action of tensile force. Outside the sagging area, the pipe rests on elastic supports. The fluid transported through the pipeline is under pressure. The direct problem was solved earlier, in this article, the inverse problem of identifying the speed and density of the transported fluid by the known natural frequencies of bending vibrations is solved. The equation of bending vibrations of a pipeline is described by the Kirchhoff model. The characteristic equation is solved using Ferrari formulas. The general decision is determined. We substitute the general solution into the boundary conditions and obtain a system of equations. This system gives a frequency equation, which is solved numerically on a developed program in the Maple package. The method of successive approximations is applied, after the third iteration, the accuracy of calculating the parameters of the velocity and density of the liquid is approximately 10^{-3} . Thus, it was found that with an increase in the oscillation frequency, the density of the liquid inside the pipe decreases. It is determined that with increasing natural frequencies of pipe bending vibrations, the fluid velocity parameter increases. It is shown that the two lower frequencies of bending vibrations of the pipeline can be used to determine the parameters of the velocity and density of the liquid. The dependence of the mass flow rate of the liquid on the first natural frequency of the pipe oscillations is given. It is shown that with increasing frequency, the mass flow rate decreases. The research results will help the development of acoustic diagnostic methods and non-destructive testing methods and will find technical application for monitoring and diagnosing the state of pipeline systems.

Keywords: pipeline, elastic supports, bending vibrations, natural frequencies, fluid velocity and density

References

- [1] Bondarenko V.M., Travush V.I. [Oscillations of Pipelines during Transportation of Gas-Containing Liquids]. *Academia. Arhitektura i stroitel'stvo* [Academia. Architecture and Construction]. 2017. No. 1. Pp. 101–103 (in Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=29093256>
- [2] Wang Wenda, Huang Qiyu, Huang Jun, Pang Quan, Fu Jun, Wang Fenghui. Study on Wax Deposition in Seasonally Pigged Pipelines. *Chemistry and Technology of Fuels and Oils*. 2014. V. 50, No. 1. Pp. 39–50.
DOI: 10.1007/s10553-014-0488-2
- [3] Bereznev A.V. [Influence of internal hydrostatic pressure on the frequency of free vibrations of a curved line part of a pipeline]. *Izvestiya vysshix uchebnykh zavedenij. Neft' i gaz* [Oil and Gas Studies]. 2011. No. 3. Pp. 77–80 (in Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=16453669>
- [4] Israilov M.Sh. Coupled Seismic Vibrations of a Pipeline in an Infinite Elastic Medium. *Mech. Solids*. 2016. V. 51, No. 1. Pp. 46–53.
DOI: 10.3103/S0025654416010052
- [5] Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review). *Int. Appl. Mech.* 2015. V. 51, No. 1. Pp. 12–63.
DOI: 10.1007/s10778-015-0672-z
- [6] Khakimov A.G., Yulmukhametov A.A. [Flexural vibrations of the pipeline on elastic supports with moving fluid]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 1. Pp. 10–16 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2019.1.002
- [7] Khakimov A.G., Yulmukhametov A.A. [The inverse problem of bending vibrations of a pipeline]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefi i nefteproduktov* [Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products]. 2018. No. 1. Pp. 86–96 (in Russian).
DOI: 10.17122/ntj-oil-2018-1-86-96
- [8] Svetliczkij V.A. [Rod mechanics] *Mexanika sterzhnej*. V. 2. M.: Vysshaya shkola, 1987. P. 304 (in Russian).
- [9] Ilgamov M.A. *Static Problems of Hydroelasticity*. M.: Nauka, Fizmatlit, 1998. P. 208.
- [10] Khakimov A.G. [Determination of the mass flow rate of liquids in a pipeline under pressure by the natural frequencies of flexural vibrations]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefi i nefteproduktov* [Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products]. 2016. No. 2. Pp. 49–57 (in Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=26538789>



Цепочка вложенных инвариантных подмоделей конических движений¹

Мукминов Т.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Уравнения механики сплошной среды инвариантны относительно группы Галилея, расширенной растяжением. Ее 11-мерная алгебра Ли имеет множество подалгебр, которые сведены в оптимальную систему неподобных подалгебр. Подалгебры из оптимальной системы образуют граф вложенных подалгебр. В графе выделяется множество цепочек подалгебр. Выбрана цепочка подалгебр, состоящих из операторов переносов по пространственной переменной и времени, вращения и равномерного растяжения по всем независимым переменным. Для подалгебр выбираются согласованные инварианты. На их основе строится цепочка инвариантных подмоделей в цилиндрической системе координат. Решения подмодели, построенной по подалгебре большей размерности, будут являться решениями подмоделей, построенных по подалгебрам меньших размерностей из рассматриваемой цепочки. Таким образом, получена цепочка вложенных инвариантных подмоделей на примере уравнений идеальной газовой динамики.

Ключевые слова: группа Галилея, алгебра Ли операторов, цепочка вложенных подалгебр, согласованные инварианты, инвариантные подмодели

1. Введение

Модели механики сплошной среды допускают группу Галилея, расширенную растяжением. Базис соответствующей 11-мерной алгебры Ли L_{11} [1] в декартовой системе координат состоит из следующих операторов:

1) переносов по пространству

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z;$$

2) галилеевых переносов

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w;$$

3) вращений

$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v,$$

$$X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$$

$$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u;$$

4) переноса по времени

$$X_{10} = \partial_t;$$

5) равномерного растяжения

$$X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,$$

где t — время, $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{u} = (u, v, w)$ — координаты частицы и скорости.

Подалгебра алгебры L_{11} — это линейное подпространство, замкнутое относительно коммутатора

$$X, Y \in L_{11} \Rightarrow [X, Y] = XY - YX \in L_{11}.$$

С точностью до внутренних автоморфизмов подалгебры различных размерностей приведены

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-29-10071) и по госзаданию №0246-2019-0052.

в [2]. Это оптимальная система серий классов подобных подалгебр. Параметры серий являются инвариантами внутренних автоморфизмов.

В таблице оптимальной системы введены следующие обозначения. Подалгебры записаны в виде $k.n$, где k — размерность подалгебры; n — порядковый номер подалгебры в данной размерности.

По оптимальной системе построен граф вложенных подалгебр в виде таблицы [1]. Рассмотрим цепочку вложенных подалгебр из оптимальной системы, взятой из таблицы графа: $1.6 \subset 2.5 \subset 3.2 \subset 4.3$, где подалгебры заданы базисами из операторов дифференцирования

$$1.6 = \{X_7 + X_{10}\},$$

$$2.5 = \{X_7, X_{10}\},$$

$$3.2 = \{X_7, X_{10}, X_{11}\},$$

$$4.3 = \{X_1, X_7, X_{10}, X_{11}\},$$

которые допускаются уравнениями газовой динамики. Выберем согласованные инварианты этой цепочки. Инварианты подалгебры меньшей размерности должны содержать инварианты подалгебры большей размерности [3].

Уравнения газовой динамики имеют 4 независимые переменные t, \vec{x} и 5 функций \vec{u}, p, ρ — всего 9 переменных. У подалгебры размерности k будет $9 - k$ точечных инвариантов. Выбирают $s, 0 \leq s < 4$, инвариантов в качестве новых независимых переменных (ранг подмодели). Если выражения для инвариантов зависят от исходных независимых переменных, то они должны входить в число новых независимых переменных. Из полученных выражений для инвариантов находят некоторое число функций. Функции, которые не определяются из выражений, являются функциями первоначально общего вида, т.е. зависят от t, \vec{x} . Число таких функций называется дефектом подмодели. В этом случае подмодель называется частично инвариантной [4]. В настоящей работе они не рассматриваются.

Таким образом, получено представление решения, которое подставляем в уравнения газовой динамики в удобной системе координат. Доказано, что после исключения функций общего вида получится система уравнений только для новых функций [4]. Если для цепочки подалгебр выбраны согласованные инварианты, то полученные с их помощью подмодели будут вложены друг в друга. Это значит, что всякое решение подмодели с меньшим числом независимых переменных будет точным решением подмодели с большим числом независимых переменных для подмоделей одного дефекта [3].

2. Построение инвариантных подмоделей

2.1. Выбор уравнения состояния

Для механики сплошной среды термодинамические параметры таковы: ρ — плотность; p — давление; T — температура; ε — удельная внутренняя энергия; S — энтропия. Они связаны тождеством

$$TdS = d\varepsilon + pdV,$$

где $V = \rho^{-1}$ — удельный объем.

Независимых параметров лишь 2 (аксиома термодинамики). Если p, ρ — независимые, то T, S, ε — функции от V, p .

Уравнения газовой динамики (законы сохранения импульса, массы и энергии)

$$\begin{aligned} \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \rho^{-1} \nabla p &= 0, \\ \rho_t + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ \varepsilon_t + \vec{u} \cdot \nabla \varepsilon + p \rho^{-1} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

замыкаются уравнением состояния.

Пусть $\varepsilon = \varepsilon(S, V)$ — уравнение состояния. Тогда из термодинамического тождества следует

$$\begin{aligned} TdS &= \varepsilon_S dS + \varepsilon_V dV + pdV, \\ T &= \varepsilon_S, \quad p = -\varepsilon_V. \end{aligned}$$

В этом случае достаточно одного уравнения состояния.

Далее используем уравнение состояния вида:

$$\begin{aligned} p &= f(\rho, S), \quad T = \varepsilon_S, \\ \varepsilon &= - \int \frac{f(\rho, S)}{\rho^2} d\rho + G(S), \end{aligned}$$

где $G(S)$ — произвольная функция, которая подлежит дополнительному измерению.

2.2. Переход к цилиндрической системе координат

Так как среди операторов цепочки подалгебр есть оператор вращения вокруг одной оси, удобно вычисление подмоделей цепочки подалгебр проводить в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} t, \quad x, \quad y &= r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta, \quad u = U, \\ v &= V \cos \theta - W \sin \theta, \quad w = V \sin \theta + W \cos \theta, \\ 0 &\leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

Обратная замена:

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{z}{y},$$

$$V = v \cos \theta + w \sin \theta = \frac{yv + zw}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

$$W = w \cos \theta - v \sin \theta = \frac{yw - zv}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Операторы цепочки подалгебр в цилиндрических координатах:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_4 = t\partial_x + \partial_U, \quad X_7 = \partial_\theta,$$

$$X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r.$$

Пусть $\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ — ортонормированный базис в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial x} = \vec{i} = \vec{e}_x,$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{k} = \vec{e}_r,$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = r(-\sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) = r\vec{e}_\theta,$$

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{e}_x + r\vec{e}_r,$$

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_\theta.$$

Перепишем оператор полного дифференцирования по t в виде:

$$D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla = \partial_t + U\partial_x + V\partial_r + \frac{1}{r}W\partial_\theta.$$

Из законов сохранения (1) и термодинамического тождества следует:

$$TDS = D\varepsilon + pD\rho^{-1} = -\frac{p\nabla \cdot \vec{u}}{\rho} + \frac{p\rho\nabla \cdot \vec{u}}{\rho^2} = 0,$$

$$DS = 0.$$

Оператор применяется к базисным векторам:

$$D\vec{e}_r = \frac{1}{r}W\vec{e}_\theta, \quad D\vec{e}_\theta = -\frac{1}{r}W\vec{e}_r.$$

Уравнения системы (1) в цилиндрических координатах принимают вид:

$$DU + \rho^{-1}p_x = 0,$$

$$DV + \rho^{-1}p_r = r^{-1}W^2,$$

$$DW + \rho^{-1}r^{-1}p_\theta = -r^{-1}VW, \quad (2)$$

$$D\rho + \rho(U_x + V_r + r^{-1}(V + W_\theta)) = 0,$$

$$DS = 0, \quad p = f(\rho, S).$$

2.3. Согласованные инварианты

Получим согласованные инварианты рассматриваемой цепочки, то есть функционально независимые инварианты подалгебры меньшей размерности должны содержать инварианты подалгебры большей размерности.

Инварианты подалгебры

$$\{X_1 = \partial_x, X_7 = \partial_\theta, X_{10} = \partial_t, X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r\}$$

вычисляются из системы уравнений $X_i I = 0$. Видно, что I не зависит от x, θ, t, r . Независимые инварианты: U, V, W, p, ρ .

Для подалгебры $\{X_7, X_{10}, X_{11}\}$ инварианты не зависят от θ, t . Инвариант для X_{11} равен $\frac{x}{r} = \Phi$. Остальные инварианты: U, V, W, p, ρ .

Для подалгебры $\{X_7, X_{10}\}$ инварианты не зависят от θ и t . Согласованные инварианты таковы: $r, \Phi, U, V, W, p, \rho$.

Для подалгебры $\{X_7 + X_{10}\}$ согласованные инварианты: $\tau = \theta - t, r, \Phi, U, V, W, p, \rho$.

Таким образом, получена цепочка согласованных инвариантов:

$$\{U, V, W, p, \rho\} \subset \{\Phi, U, V, W, p, \rho\} \subset$$

$$\subset \{r, \Phi, U, V, W, p, \rho\} \subset \{\tau, r, \Phi, U, V, W, p, \rho\}.$$

2.4. Вложенные инвариантные подмодели

Для каждой подалгебры из выбранной цепочки построим инвариантную подмодель. Были найдены инварианты подалгебры 1.6:

$$\tau = \theta - t, \quad r, \quad \Phi = \frac{x}{r}, \quad U, \quad V, \quad W, \quad p, \quad \rho.$$

Первые 3 инварианта выражены через исходные независимые переменные, поэтому их нужно взять за новые независимые переменные. Остальные инварианты назовем функциями от τ, r, Φ .

Представление инвариантного решения:

$$U = U(\tau, r, \Phi), \quad V = V(\tau, r, \Phi), \quad W = W(\tau, r, \Phi),$$

$$p = p(\tau, r, \Phi), \quad \rho = \rho(\tau, r, \Phi).$$

Сделаем замену переменных t, τ, r, Φ в операторах дифференцирования:

$$\partial_t = \partial_t + \frac{\partial \tau}{\partial t} \partial_\tau = \partial_t - \partial_\tau,$$

$$\partial_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \partial_\Phi = \frac{1}{r} \partial_\Phi,$$

$$\partial_\theta = \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \partial_\tau = \partial_\tau,$$

$$\partial_r = \frac{\partial r}{\partial r} \partial_r + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \partial_\Phi = \partial_r - \frac{x}{r^2} \partial_\Phi = \partial_r - \frac{\Phi}{r} \partial_\Phi.$$

Тогда оператор D примет вид:

$$D = \partial_t + \left(\frac{W}{r} - 1\right) \partial_\tau + V\partial_r + \frac{1}{r}(U - V\Phi)\partial_\Phi.$$

Из системы (2) следует:

$$\begin{aligned} DU + \frac{1}{r\rho}p_\Phi &= 0, \\ DV + \frac{1}{\rho}\left(p_r - \frac{\Phi}{r}p_\Phi\right) &= \frac{1}{r}W^2, \\ DW + \frac{1}{r\rho}p_\tau &= -\frac{1}{r}VW, \\ D\rho + \rho\left[V_r + \frac{1}{r}(U_\Phi - \Phi V_\Phi + V + W_\tau)\right] &= 0, \\ DS = 0, \quad p &= f(\rho, S), \end{aligned} \tag{3}$$

где можно считать

$$D = \left(\frac{W}{r} - 1\right) \partial_\tau + V\partial_r + \frac{1}{r}(U - V\Phi)\partial_\Phi.$$

Полученная система содержит только инварианты. Итак, построена инвариантная подмодель ранга 3 подалгебры 1.6.

Перейдем к подалгебре 2.5 с инвариантами $r, \Phi, U, V, W, p, \rho$. Представление инвариантного решения имеет вид:

$$\begin{aligned} U &= U(r, \Phi), \quad V = V(r, \Phi), \quad W = W(r, \Phi), \\ p &= p(r, \Phi), \quad \rho = \rho(r, \Phi). \end{aligned}$$

Исходная система (2) запишется так:

$$\begin{aligned} DU + \frac{1}{r\rho}p_\Phi &= 0, \\ DV + \frac{1}{\rho}\left(p_r - \frac{\Phi}{r}p_\Phi\right) &= \frac{1}{r}W^2, \\ DW &= -\frac{1}{r}VW, \\ D\rho + \rho\left[V_r + \frac{1}{r}(U_\Phi - \Phi V_\Phi + V)\right] &= 0, \\ DS = 0, \quad p &= f(\rho, S), \end{aligned} \tag{4}$$

где можно считать $D = V\partial_r + \frac{1}{r}(U - V\Phi)\partial_\Phi$.

Получена инвариантная подмодель ранга 2 подалгебры 2.5. Легко заметить, что подмодель могла быть построена по подмодели (3) подалгебры 1.6. Достаточно принять функции U, V, W, p и ρ независимыми от τ . Это следует из того, что были выбраны согласованные инварианты. Можно сделать вывод, что решения подмодели (4) подалгебры 2.5 будут частными решениями подмодели (3) подалгебры 1.6.

Аналогично строится инвариантная подмодель подалгебры 3.2. Среди инвариантов был найден лишь один, зависящий от исходных независимых переменных, поэтому инвариантная подмодель будет иметь ранг 1. Представление инвариантного решения

$$\begin{aligned} U &= U(\Phi), \quad V = V(\Phi), \quad W = W(\Phi), \\ p &= p(\Phi), \quad \rho = \rho(\Phi) \end{aligned}$$

подставим в (2). Получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} D_1U + \frac{1}{\rho}p_\Phi &= 0, \\ D_1V - \frac{\Phi}{\rho}p_\Phi &= W^2, \\ D_1W &= -VW, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} D_1\rho + \rho(U_\Phi - \Phi V_\Phi + V) &= 0, \\ D_1S = 0, \quad p &= f(\rho, S), \end{aligned}$$

где $D_1 = (U - \Phi V)\partial_\Phi$.

Все функции зависят только от Φ . Подмодель из обыкновенных дифференциальных уравнений при $U \neq \Phi V$ имеет интегралы:

$$\begin{aligned} A\rho(U - \Phi V) &= W^2, \\ U^2 + V^2 + W^2 + 2\int \frac{d\rho}{\rho} &= B^2, \\ S &= S_0, \end{aligned}$$

где A, B и S_0 — постоянные, и сводится к системе конических движений [2]:

$$\begin{aligned} \Phi U' + V' &= \sigma A\rho, \\ \left[(U - \Phi V)^2 - f_\rho\right] U' + \Phi f_\rho V' &= V f_\rho, \end{aligned}$$

где $\sigma = \text{sign}(U - \Phi V)$. При $U = \Phi V$ из уравнений системы (5) следует покой:

$$p = p_0, \quad U = V = W = 0, \quad \rho = \rho_0 = f(\rho, S).$$

Решения полученной подмодели будут являться частными решениями подмодели (4).

Подалгебра 4.3 не имеет инварианта, зависящего от исходных независимых переменных, поэтому представление инвариантного решения U, V, W, p, ρ — постоянные. Из (3) получим:

$$\begin{aligned} W^2 &= 0, \\ VW &= 0, \\ \rho V &= 0, \\ p &= f(\rho, S). \end{aligned} \tag{6}$$

Решения $U = U_0$, $V = W = 0$, $\rho = \rho_0 \neq 0$, $p = p_0 = f(\rho_0, S_0)$, $S = S_0$ являются инвариантными решениями ранга 0. Они являются тривиальными решениями системы (5).

3. Заключение

В настоящей работе рассмотрена цепочка вложенных подалгебр 11-мерной алгебры Ли для идеальной модели гидродинамического типа. Для подалгебр выбраны согласованные инварианты. На их основе построена цепочка инвариантных подмоделей и рассмотрены их решения. Проверено, что решения подмодели, построенной по подалгебре большей размерности, будут являться решениями подмоделей, построенных по подалгебрам меньших размерностей из рассматриваемой цепочки.

Дальнейшее исследование подалгебр больших размерностей относится к построению подмоделей для дифференциальных инвариантов (содер-

жащих производные), поскольку точечных инвариантов (не содержащих производные) недостаточно, чтобы конструктивно построить подмодель. Такие подмодели будут частично инвариантными большого дефекта и требуют изучения совместности переопределенных систем.

Список литературы

- [1] Мукминов Т.Ф., Хабиров С.В. Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 121–143.
[DOI: 10.33048/semi.2019.16.006](https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.006)
- [2] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БГУ, 2013. 224 с.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19444103>
- [3] Хабиров С.В. Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений // СМЖ. 2013. Т. 54, № 6. С. 1396–1406.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=21295273>
- [4] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск.: НГТУ, 2012. 659 с.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=21714062>



The chain of embedded invariant submodels for conic motions

Mukminov T.F.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa , Russia

The equations of continuum mechanics are invariant in relation to the Galilean group generalized by extension. Its 11-dimensional Lie algebra has many subalgebras, which form the optimal system of dissimilar subalgebras. Subalgebras from the optimal system form the graph of embedded subalgebras. There are many chains of subalgebras in the graph. We consider the chain of embedded subalgebras containing operators of space and time translation, the rotation and uniform extension of all independent variables for the models of the continuous medium mechanics. We choose concordant invariants for each subalgebra from the chain. The chain of invariant submodels is constructed in a cylindrical coordinates based on chosen invariants. It is proved that solutions of a submodel constructed on a subalgebra of higher dimension will be part of solutions of submodels constructed on subalgebra of smaller dimensions for the considered chain. Thus, the chain of embedded invariant submodels is constructed by the example of equations of ideal gas dynamics.

Keywords: Galilean group, Lie algebra, chain of embedded subalgebras, concordant invariants, invariant submodels

References

- [1] Mukminov T.F., Khabirov S.V. [Graph of embedded subalgebras of 11-dimensional symmetry algebra for continuous medium]. *Sibirskie e'lektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports]. 2019. V. 16. Pp. 121–143. (In Russian)
[DOI: 10.33048/semi.2019.16.006](https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.006)
- [2] Khabirov S.V. [Analytical methods in gas dynamics] *Analiticheskie metody v gazovoj mexanike*. Ufa: BSU, 2013. P. 224 (in Russian)
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19444103>
- [3] Khabirov S.V. A hierarchy of submodels of differential equations. *Siberian Mathematical Journal*. 2013. V. 54, No. 6. Pp. 1110–1119.
[DOI: 10.1134/S0037446613060189](https://doi.org/10.1134/S0037446613060189)
- [4] Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. Elements of symmetry analysis of differential equations of continuum mechanics. Novosibirsk: NSTU, 2012. P. 659.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=21714062>



Барохронное сдвиговое движение газа¹

Юлмухаметова Ю.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Уравнения идеальной газовой динамики допускают 11-мерную алгебру Ли операторов дифференцирования первого порядка. Все подалгебры этой алгебры перечислены. Для всех 48 типов 4-х мерных подалгебр Хабировым С.В. вычислены базисы точечных инвариантов и рассмотрены три 4-х мерные подалгебры, производящие регулярные частично инвариантные решения в декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно. В настоящей работе ставится задача нахождения решения 3-х мерных уравнений газовой динамики в декартовой системе координат с произвольным уравнением состояния, построенного на инвариантах 4-х мерной подалгебры. Базисные операторы рассматриваемой подалгебры являются комбинациями трансляций и галилеевых переносов. Инварианты этой подалгебры задают представление решения для неизвестных гидродинамических функций. Компоненты скорости являются линейными функциями по части пространственных переменных, при этом плотность и давление зависят только от времени. После подстановки представления решения изучена совместность полученной системы дифференциальных уравнений. Система совместна и имеет точное решение. Такое решение описывает изэнтропическое барохронное сдвиговое движение газа. Найдены уравнения мировых линий движения частиц газа. Установлены моменты коллапса частиц, их оказалось два. Найдены и записаны уравнения поверхностей коллапса. Для плоского случая доказано несколько утверждений о характере движении частиц газа.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, инварианты подалгебры, коллапс, точное решение, Якобиан, мировые линии

1. Введение

Для 3-х мерных уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния разыскивается точное решение, построенное на инвариантах 4-х мерной подалгебры с номером 4.47 из работы [1]. Базисные операторы подалгебры являются комбинациями трансляций и галилеевых переносов. Инварианты этой подалгебры задают представление решения для уравнений газовой динамики в декартовой системе координат. Компоненты скорости являются линейными функциями по части пространственных переменных, при этом плотность и давление зависят только от времени. После подстановки представления решения изуче-

на совместность полученной системы дифференциальных уравнений. Система совместна и имеет точное решение. Такое решение описывает изэнтропическое барохронное движение газа. Данное решение найдено в диссертационной работе [2], но не исследовано. В настоящей работе будет проведен анализ точных решений, найдены уравнения мировых линий движения частиц газа, определены моменты коллапса частиц газа.

2. Постановка задачи и нахождение точного решения

Уравнения газовой динамики в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \rho^{-1}p_x &= 0, \\
 v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \rho^{-1}p_y &= 0, \\
 w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \rho^{-1}p_z &= 0, \\
 \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) &= 0, \\
 S_t + uS_x + vS_y + wS_z &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071_мк) и по госзаданию на 2019-2022 годы №0246-2019-0052.

где t — время; $\vec{x} = (x, y, z)$ — декартовы независимые переменные; $u = u(t, \vec{x})$, $v = v(t, \vec{x})$, $w = w(t, \vec{x})$ — компоненты вектора скорости; $\rho = \rho(t, \vec{x})$ — плотность; $p = p(t, \vec{x})$ — давление; $S = S(t, \vec{x})$ — энтропия. Систему уравнений газовой динамики замыкает уравнение состояния $p = f(\rho, S)$, которое предполагается произвольным.

Рассмотрим 4-х мерную подалгебру из оптимальной системы с номером 4.47 из [1]. Подалгебру задают четыре оператора $X_1 + aX_3 = \partial_x + a\partial_z$, $X_2 = \partial_y$ (перенос по осям координат), $X_5 = t\partial_y + \partial_v$, $X_6 = t\partial_z + \partial_w$ (преобразование галилея), где a — некоторая постоянная. Инварианты подалгебры задают представление решения, которое записывается в виде:

$$\begin{aligned} u &= u(t), \quad v = v(t, x, y, z), \\ w &= \frac{z - ax}{t} + w_1, \quad p = p(t), \quad \rho = \rho(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $w_1(t)$ — произвольная функция времени. После подстановки представления решения (2) в уравнения газовой динамики (1) получим:

$$u = u_0, \quad w = \frac{z - ax + w_0}{t}, \quad S = S_0,$$

где u_0, w_0, S_0 — произвольные постоянные. При помощи преобразований галилеева переноса Γ_1 и Γ_3 из [3] постоянные u_0 и w_0 можно считать равными нулю. Перепишем известные функции, второе и четвертое уравнения из системы (1):

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad w = \frac{z - ax}{t}, \quad S = S_0, \\ v_t + vv_y + \frac{z - ax}{t}v_z &= 0, \\ \rho_t + \rho(v_y + t^{-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Последние два уравнения имеют решение:

$$\rho = \frac{\rho_0}{t(t + t_0)}, \quad v = \frac{y + \Phi\left(x, \frac{z - ax}{t}\right)}{t + t_0},$$

где t_0, ρ_0 — произвольные постоянные. Ко всем найденным функциям применим преобразование растяжения $t \rightarrow t_0t$, $\vec{x} \rightarrow t_0\vec{x}$. Данные преобразования допускаются уравнениями газовой динамики, а значит могут быть применены и к их решениям. Получим

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = \frac{y + \Phi\left(x, \frac{z - ax}{t}\right)}{t + 1}, \quad w = \frac{z - ax}{t}, \\ \rho &= \frac{\rho_0}{t(t + 1)}, \quad S = S_0, \quad p = f\left(S_0, \frac{\rho_0}{t(t + 1)}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Решение (3) уравнений газовой динамики описывает изэнтропическое барохронное движение частиц газа, для которых давление является функцией только времени. Данный вид движений газа был рассмотрен и изучен в диссертационной работе Чупахина А.П. [2]. Точные решения исследованы для подалгебры с номером 4.44 (нумерация из [4]) и только в двумерном случае с нулевой произвольной функцией. Исследования для данного решения уравнений газовой динамики не проводилось. Перейдем к описанию движения частиц газа.

3. Мировые линии движение частиц газа. Моменты коллапса

Мировые линии движения частиц газа задаются решением системы дифференциальных уравнений [5]:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y + \Phi\left(x, \frac{z - ax}{t}\right)}{t + 1}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{z - ax}{t}.$$

Решение имеет вид

$$x = x_0, \quad y = (t + 1)v_0 - \Phi(x_0, w_0), \quad z = ax_0 + tw_0,$$

где x_0, v_0, w_0 — лагранжевы координаты; v_0, w_0 — проекции скорости на оси Oy и Oz соответственно. Траектории частиц являются плоскими линиями, лежащими в некоторой плоскости $x = x_0$. Якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным равен:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\Phi_{x_0} & t + 1 & -\Phi_{w_0} \\ a & 0 & t \end{vmatrix} = t(t + 1).$$

Якобиан принимает нулевые значения при $t = 0$, $t = -1$. Это моменты коллапса частиц газа.

При $t = 0$ ранг матрицы Якоби равен 2. Значит коллапс происходит на поверхности. Уравнение поверхности имеет вид $z = ax$. В этот момент времени положение частиц газа задается равенствами

$$x = x_0, \quad y = v_0 - \Phi(x_0, w_0), \quad z = ax_0.$$

Обозначим через $\vec{q} = (0, v_0, w_0)$ направляющий вектор траекторий, через $\vec{n} = (a, 0, -1)$ — вектор нормали к поверхности коллапса. Заметим, что косинус угла между вектором нормали и направляющим вектором

$$\cos(\vec{q}, \vec{n}) = -\frac{w_0}{\sqrt{a^2 + 1}\sqrt{v_0^2 + w_0^2}}$$

не зависит от x_0 . При $w_0 = 0$ частицы движутся в плоскости коллапса.

При $t = -1$ ранг матрицы Якоби также равен 2 и коллапс происходит на поверхности $y = -\Phi(x, ax - z)$. В этот момент времени положение частиц задается равенствами

$$x = x_0, \quad y = -\Phi(x_0, w_0), \quad z = ax_0 - w_0.$$

Таким образом, моменты коллапса частиц разбивают временную ось на три участка $t < -1$, $-1 < t < 0$, $t > 0$. В каждой области существует конкретное решение, отличное от другого.

Задача. Пусть частица газа в момент времени $t = t_1$ находится в точке с координатами (x^1, y^1, z^1) . Требуется определить, где будет находиться частица в момент времени $t \neq t_1$.

Решение. В начальный момент времени $t = t_1$ частица находится в точке с координатами

$$x|_{t=t_1} = x^1, \quad y|_{t=t_1} = y^1, \quad z|_{t=t_1} = z^1,$$

где

$$\begin{aligned} x^1 &= x_0, & y^1 &= (t_1 + 1)v_0 - \Phi(x_0, w_0), \\ z^1 &= ax_0 + w_0 t_1. \end{aligned} \quad (4)$$

В другой момент времени $t \neq t_1$ частица будет находиться в точке с координатами (x, y, z) , где $x = x_0$, $y = (t + 1)v_0 - \Phi(x_0, v_0)$, $z = ax_0 + tw_0$. Из последних равенств выразим лагранжевы координаты через эйлеровые:

$$x_0 = x, \quad v_0 = \frac{y + \Phi(x_0, w_0)}{t + 1}, \quad w_0 = \frac{z - ax_0}{t}.$$

Подставим значение лагранжевых координат в (4):

$$\begin{aligned} x^1 &= x, & y^1 &= \frac{t_1 + 1}{t + 1}y + \frac{t_1 - t}{t + 1}\Phi\left(x, \frac{z - ax}{t}\right), \\ z^1 &= ax + \frac{t_1}{t}(z - ax). \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (5) задают связь начального положения частицы в момент времени t_1 и положения в момент времени t :

$$\begin{aligned} x &= x^1, & y &= \frac{t + 1}{t_1 + 1}y^1 + \Phi\left(x^1, \frac{z^1 - ax^1}{t_1}\right) \frac{t - t_1}{t_1 + 1}, \\ z &= ax^1 + t \frac{z^1 - ax^1}{t_1}. \end{aligned}$$

Последние равенства задают поверхность

$$y = \frac{t + 1}{t_1 + 1}y^1 + \frac{t - t_1}{t_1 + 1}\Phi\left(x, \frac{z - ax}{t_1}\right).$$

Заметим, что моменты времени $t = -1$ и $t = 0$ являются моментами коллапса частиц газа. Они разбивают временную ось на три интервала. В каждом интервале своя картина движения частиц вплоть до момента коллапса. После коллапса движения нет. Поэтому момент времени t_1 нельзя брать в момент коллапса ($t_1 \neq -1$ или 0).

4. Описание движения для положительных времен

Рассмотрим случай, когда $0 \leq t < \infty$. Для простоты описания рассмотрим движение в плоскости $x = 0$. В момент времени $t = 0$ все частицы находятся на оси Oy . В точке $y = y_0$ находятся частицы, лагранжевы координаты которых удовлетворяют равенству $y_0 = v_0 - \Phi(0, w_0)$. То есть равенство задает однопараметрическое семейство кривых в пространстве скоростей (v_0, w_0) . Для данного случая уравнения мировых линий имеют вид:

$$y = (t + 1)v_0 - \Phi(0, w_0), \quad z = w_0 t. \quad (6)$$

Траектории частиц на плоскости yOz задаются равенством

$$z = \operatorname{tg} \alpha_0 (y - y_0),$$

где $\operatorname{tg} \alpha_0 = w_0 v_0^{-1}$ — угол наклона траектории к оси Oy . Если постоянную α_0 фиксировать, то траектории есть параллельные прямые.

Утверждение. Частицы с различными начальными данными в момент времени $t = t_1 \neq 0$ не могут находиться в одно и то же время $t > t_1$ в одной и той же точке плоскости yOz .

Доказательство. Рассмотрим две частицы с различными начальными положениями на оси Oy : $y_{01} \neq y_{02}$, где $(y_{01}, 0)$ — положение первой частицы при $t = 0$; $(y_{02}, 0)$ — положение второй частицы при $t = 0$. Траектории этих частиц задаются равенствами:

$$z = (y - y_{01}) \operatorname{tg} \alpha_1, \quad z = (y - y_{02}) \operatorname{tg} \alpha_2,$$

где $\operatorname{tg} \alpha_1 \neq \operatorname{tg} \alpha_2$, иначе траектории параллельны и значит не пересекаются. Предположим, что траектории пересекаются. Значит выполняется равенство

$$\operatorname{tg} \alpha_1 (y - y_{01}) = \operatorname{tg} \alpha_2 (y - y_{02}).$$

Откуда

$$\begin{aligned} y &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 y_{01} - \operatorname{tg} \alpha_2 y_{02}}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}, \\ z &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 (y_{01} - y_{02})}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Координаты точек пересечения траекторий задаются формулами (7). Из уравнений мировых линий движения частиц (6) определим моменты времени t_1 и t_2 :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{z}{w_{01}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 (y_{01} - y_{02})}{v_{01} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)}, \\ t_2 &= \frac{z}{w_{02}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 (y_{01} - y_{02})}{v_{02} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)}, \end{aligned}$$

где t_1, t_2 — моменты времени, когда частицы находятся в точке пересечения траекторий. Если $t_1 = t_2$, то $\operatorname{tg} \alpha_2 v_{01}^{-1} = \operatorname{tg} \alpha_1 v_{02}^{-1}$. Откуда $w_{01} = w_{02}$. Из уравнения связи лагранжевых координат $y_0 = v_0 - \Phi(0, w_0)$ следует, что $y_{01} - y_{02} = v_{01} - v_{02}$. Тогда $t_1 = t_2 = -1$, что противоречит рассматриваемому случаю $t \geq 0$. Значит $t_1 \neq t_2$ и две различные частицы не могут находиться в одной точке в одно и то же время.

5. Заключение

В работе представлен механизм нахождения точного решения уравнений газовой динамики, построенного на инвариантах 4-х мерной подалгебры. Записаны уравнения мировых линий частиц. Найден Якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным. Установлены моменты коллапса частиц газа. Их оказалось два. Записаны уравнения поверхностей коллапса. Найдена формула

связи начального положения частицы и положения в следующий момент времени. Для плоского случая доказано, что две различные частицы не могут находиться в одной точке плоскости.

Список литературы

- [1] Хабилов С.В. Простые частично инвариантные решения // Уфимск. матем. журн. 2019. Т. 11, № 1. С. 87–98. <http://mi.mathnet.ru/ufa463>
- [2] Чупахин А.П. Барохронные движения газа : дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.02.05 / Чупахин Александр Павлович. Новосибирск, 1999. 171 с.
- [3] Хабилов С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003. 192 с.
- [4] Овсянников Л.В., Чупахин А.П. Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 990–999.
- [5] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003 (Киров: ФГУИПП Вятка). 335 с.



Barochronous shear gas motion

Yulmukhametova Yu.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

The equations of ideal gas dynamics admit an 11-dimensional Lie algebra of first-order differentiation operators. All subalgebras of this algebra are listed. Khabirov S.V. for all 48 types of 4-dimensional subalgebras, the bases of point invariants are calculated and three 4-dimensional subalgebras are considered that produce regular partially invariant solutions in Cartesian, cylindrical and spherical coordinates, respectively. In this paper, we pose the problem of finding the solution of 3-dimensional equations of gas dynamics in a Cartesian coordinate system with an arbitrary equation of state, built on invariants of a 4-dimensional subalgebra. The basic operators of the considered subalgebra are combinations of translations and Galilean transfers. The invariants of this subalgebra define a representation of the solution for unknown hydrodynamic functions. Speed components are linear functions in terms of spatial variables. Moreover, density and pressure depend only on time. After substituting the solution representation, we studied the compatibility of the resulting system of differential equations. The system is collaborative and has an exact solution. Such a solution describes the isentropic barochronous shear motion of a gas. The equations of the world lines of motion of gas particles are found. The moments of particle collapse are established. There were two of them. The equations of collapse surfaces are found and written. For the flat case, several statements about the nature of the motion of gas particles are proved.

Keywords: equations of gas dynamics, invariants of a subalgebra, collapse, exact solution, Jacobian, world lines

References

- [1] Khabirov S.V. Simple partially invariant solutions // Ufa Mathematical Journal. 2019. V. 11, No.1. Pp. 90–99.
DOI: 10.13108/2019-11-1-90
- [2] Chupakhin A.P. [Barochronous gas movements] *Baroxromnye dvizheniya gaza*: dis. ... doktora fiz.-mat. nauk: 01.02.05 / Chupakhin Aleksandr Pavlovich. Novosibirsk, 1999. 171 p. (in Russian).
- [3] Khabirov S.V. [Analytical methods in gas dynamics] *Analiticheskie metody v gazovoj dinamike*. Ufa: Gilem, 2003. 192 p. (in Russian).
- [4] Ovsyannikov L.V., Chupakhin A.P. [Regular partially invariant submodels of gas dynamics equations] *Regulyarnye chastichno invariantnye podmodeli uravnenij gazovoj dinamiki* // *Prikladnaya matematika i mexanika*. 1996. V. 60, No. 6. Pp. 990–999 (in Russian).
- [5] Ovsyannikov L.V. [Lectures on the basics of gas dynamics] *Lekcii po osnovam gazovoj dinamiki*. M.; Izhevsk: Institut komputer. issled., 2003 (Kirov: FGUIPP Vyatka). 335 p. (in Russian).



Отражение ударной волны от слоя мелкодисперсной среды малых концентраций

Баширова К.И. *, Михайленко К.И.**

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

**Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе исследуется распространение ударной волны при взаимодействии с неплотно упакованной гранулированной средой. Представленная в работе континуальная двухфазная математическая модель позволяет численно описать распространение ударной волны в канале ударной трубы, достижение ударной волной слоя гранулированной засыпки и отражение волны. Показано, что гранулированная среда частично пропускает ударную волну, но по большей части отражает ее. Указанное отражение отличается от отражения ударной волны от твердой стенки. Характер отражения ударной волны существенно зависит от плотности гранул. В частности, показано, что гранулированная среда меньшей плотности за счет повышенной подвижности отдельных частиц приводит к некоторому усилению отраженной волны. Также показано, что отраженная волна в этом случае образует два выраженных пика. При этом следует отметить, что прошедшая в слой гранулированной среды волна давления наоборот оказывается тем больше, чем тяжелее частицы гранулированной среды.

Ключевые слова: многофазные системы, гранулированная среда, ударные волны, математическое моделирование, OpenFOAM

1. Введение

Ударная труба — это широко известный инструмент, организованный как длинный цилиндр, перегороденный диафрагмой из легко разрушающегося материала. С одной стороны от диафрагмы находится газ под высоким давлением. Таким образом, в начальный момент времени существуют две однородные области с существенно различными давлениями, плотностями и, возможно, температурами.

Ударные трубы появились в конце XIX в. и с тех пор являются самостоятельной экспериментальной установкой для проведения различных испытаний. Так, возможность получения нагретого до 10000 К газа используется при проведении химических экспериментов. В астрофизических исследованиях спектры звезд сравниваются со спектрами, полученными на ударных трубах.

К настоящему времени проведено множество теоретических и экспериментальных исследований распространения ударной волны. Заметная часть из них основывается на численных и аналитических моделях прохождения волны в двухфазной среде, что связано с вопросами усиления или ослабления ударных волн. Для большинства исследователей наибольший интерес представляет прохождение ударной волны через пузырьковую систему [1]. Это определяется зачастую аномальным поведением пузырьковых кластеров. Например, изучается влияние распределения газа на ослабление воздействия волны на стенку [2]. В работе [3] численно анализируется прохождение и рассеяние волн в пузырьковом слое. В частности, в этой работе показывается существенное рассеяние вблизи собственных частот пузырьков, а также нелинейные эффекты волны даже при незначительных амплитудах.

В статье [4] рассматриваются барьеры из водной пены, поглощающие взрывные волны. В работе сравниваются результаты численного модели-

рования с испытаниями ударной трубы. Исследуется влияние пены на скорость распространения ударной волны и давление после ее прохождения, распределение жидкости по пространству, заполненному средой с пеной.

На наш взгляд недостаточное внимание исследователей уделено взаимодействию ударных волн с твердыми гранулированными средами. В настоящей работе представляется математическая модель, предназначенная для вычислительного моделирования прохождения ударной волны в слой мелкодисперсной среды и ее отражение от указанного слоя.

2. Математическая модель

Математическая модель рассматриваемой двухфазной системы может быть записана в предположении о возможности континуального описания как газа, так и дисперсной среды в рамках модели взаимопроникающих многофазных сред [5].

Модель включает в себя уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \alpha_i \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i u_{ij}}{\partial x_j} = 0;$$

импульсов

$$\frac{\partial \alpha_i \rho_i u_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i u_{ij} u_{ik}}{\partial x_j} = -\alpha_i \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial \tau_{kj}^i}{\partial x_j} + \alpha_i \rho_i g + F_i;$$

и энергии

$$\frac{\partial \alpha_i \rho_i E_i}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i u_{ij} E_i}{\partial x_j} = -\alpha_i \frac{\partial p u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \tau_{jk}^i u_k}{\partial x_j} + \alpha_i \rho_i u_j g_j.$$

Здесь использованы следующие обозначения: α_i — объемная концентрация i -ой фазы; ρ_i — полная (истинная) плотность i -ой фазы при $\alpha_i = 1$; u_{ij} — j -ая составляющая вектора скорости i -ой фазы; p — полное давление в системе; τ^i — тензор напряжений i -ой фазы; g — ускорение свободного падения; F_i — сила межфазного взаимодействия, действующая на i -ую фазу; E — удельная полная энергия i -ой фазы.

Тензоры напряжений фаз записываются аналогично работе [6], сила межфазного взаимодействия может быть записана исходя из интегрирования по объему силы Стокса для отдельной гранулы [7, 8].

Система замыкается подходящим уравнением состояния, например идеального газа.

Такой подход выглядит продуктивнее использования однофазной модели, когда гранулированная среда задается с использованием вычислительной сетки и граничных условий на стенке для описания поверхности каждой гранулы [9].



Рис. 1. Пример распределения гранулированной среды в нижней части ударной трубы

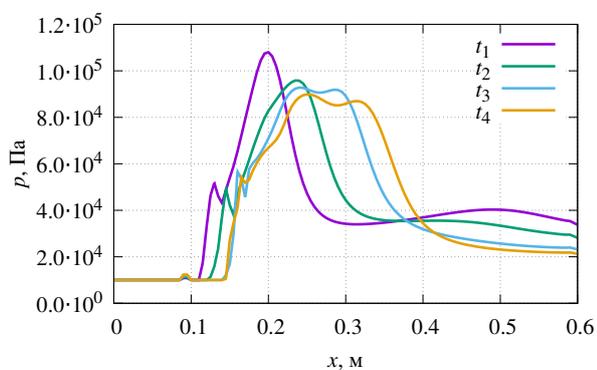
3. Численная реализация

В качестве среды для моделирования был использован пакет OpenFOAM (свободно распространяемый пакет, предназначенный для решения задач механики сплошных сред, численного моделирования в гидродинамике).

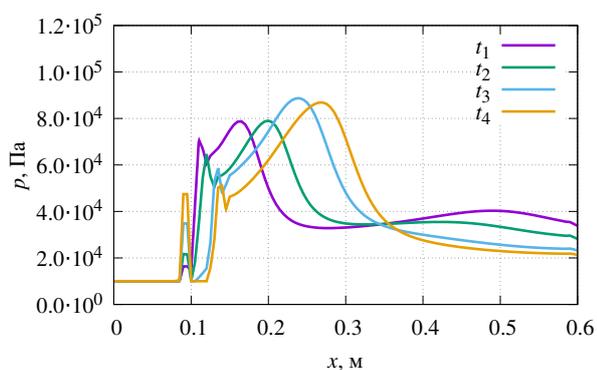
В работе рассматривается нижняя часть ударной трубы длиной 60 см и диаметром 5 см. При задании начальных условий труба разбивается на две области средствами утилиты setFields: нормально-го (10^5 Па) и низкого (10^4 Па) давлений. В нулевой момент времени область нормального давления занимает верхнюю треть от общего объема трубы. В нижних 10 см трубы размещена гранулированная среда. Объемное содержание засыпки составляет 0,2, диаметр зерна — $3 \cdot 10^{-8}$ м. При расчетах используются различные значения плотности дисперсной среды: от 1000 до 3000 кг/м³.

Схема расчетной области приведена на рис. 1.

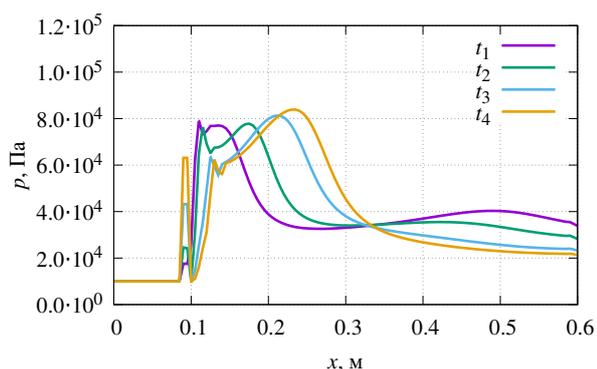
Для решения поставленной задачи использован стандартный solver twoPhaseEulerFoam пакета OpenFOAM. В качестве граничных условий заданы условие прилипания для воздуха на всех стенках трубы и условие проскальзывания для частиц на всех границах. Для давления было задано условие zeroGradient на стенках трубы.



(a)



(б)



(в)

Рис. 2. Распределение давления в некоторые одинаковые моменты времени при отражении ударной волны от слоя гранулированной среды с плотностью частиц 1000 кг/м^3 (а), 2000 кг/м^3 (б), 3000 кг/м^3 (в)

Расчеты проводились до момента времени 0.0015 с , что соответствует моменту достижения ударной волной нижнего края установки в отсутствие мелкодисперсной среды.

4. Обсуждение результатов

На рис. 2 показаны результаты расчетов представленной выше модели для трех вариантов гранулированной среды, когда полная (истинная) плотность частиц равна 1000 (рис. 2(а)), 2000 (рис. 2(б)) и 3000 кг/м^3 (рис. 2(в)).

На каждом графике приведено распределение давления в канале ударной трубы в моменты времени соответствующие $t_1 = 0.00092 \text{ с}$, $t_2 = 0.00106 \text{ с}$, $t_3 = 0.00126 \text{ с}$ и $t_4 = 0.00138 \text{ с}$.

На представленных графиках можно отметить, что характер отражения ударной волны от слоя гранулированной среды существенно зависит от плотности составляющих указанную гранулированную среду частиц. Так, для тяжелых частиц (рис. 2(в)) отражение наиболее близко к отражению от твердой стенки. Это легко объяснимо пониженной подвижностью (сильной инерцией) тяжелых частиц и тем, что при непрерывном описании дисперсной среды ее граница не отражает наличия отдельных гранул.

Для легких частиц на графике рис. 2(а) наблюдается особенность, связанная с усилением отраженной волны и разделением на две волны со скоростями больше и меньше скорости отраженной от слоя тяжелых частиц волны. Такое поведение, по-видимому, объясняется подвижностью легких частиц. Сначала гранулированный слой уплотняется, при этом образуется первая отраженная волна, имеющая скорость меньше «стандартной». Затем уже волна уплотнения гранулированной среды отражается от стенки и придает дополнительный импульс второй отраженной волне давления, которая в итоге догоняет и опережает первую волну. Подобная двухскоростная картина приводит к наблюдаемому на графике расширению волны. Также следует отметить, что подвижность частиц приводит и к увеличению амплитуды отраженных волн.

График, приведенный на рис. 2(б), следует в некоторой степени считать промежуточным случаем. Подвижность частиц еще недостаточна, чтобы образовать ярко выраженную повторную волну. Однако скорость отраженной волны оказывается повышенной, то есть дополнительный импульс волне давления в этом случае сообщается.

5. Заключение

В работе показано, что наличие слоя рыхлой гранулированной среды возле твердой поверхности приводит к отражению ударной волны, отличному от отражения от гладкой стенки. При этом характер отражения зависит от плотности вещества гранул, составляющих дисперсную среду. Также отмечено, что гранулы меньшей плотности приводят к большей амплитуде отраженной ударной волны, а также большей ее протяженности (сдвоенная волна).

Список литературы

- [1] Кедринский В.К. Ударные волны в жидкости с пузырьками газа // ФГВ. 1980. Т. 16, № 5. С. 14–25.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=29137129>
- [2] Parkin B.R., Gilmore F.R., Brode G.A. Shock waves in bubble water. Memorandum RM-2795-PR. Abridged. 1961.
- [3] Губайдуллин А.А., Кутрунов А.В., Рустюмова О.Ш., Яковлева Т.Н. Некоторые вопросы волновой динамики жидкости с пузырьками газа // В сб.: Итоги исследований. Тюмень. 1994. С. 23–31.
- [4] Britan A., Ben-Dor G., Shapiro H., Liverts M., Shreiber I. Drainage effects on shock wave propagating through aqueous foams // Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects. 2007. V. 309. Pp. 137–150.
[DOI: 10.1016/j.colsurfa.2007.01.018](https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2007.01.018)
- [5] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987. 360 с., 464 с.
- [6] Федоров А.В., Федорченко И.А., Василишин М.С., Карпов А.Г., Иванов О.С. Расчет расширения слоя дисперсного материала при его импульсном псевдооживлении // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 3. С. 105–116.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=17797436>
- [7] Михайленко К.И., Кулешов В.С. Математическое моделирование скоростной неравномерности потока газа за пористой преградой // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 6. С. 46–58.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=25408686>
- [8] Михайленко К.И., Валеева Ю.Р. Моделирование осаждения мелкодисперсной взвеси из воздуха при прохождении волн давления // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2013. Т. 14, № 1. С. 328–333.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=21014483>
- [9] Баширова К.И., Михайленко К.И. Трехмерное моделирование ударной трубы в пакете OpenFOAM // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 3. С. 621–626.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=36476517>



Shock wave reflection from a layer of a finely dispersed medium with low concentrations

Bashirova K.I.* , Mikhaylenko C.I.**

*Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

**Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

The paper investigates the propagation of a shock wave when interacting with a loosely packed granular medium. The continuous two-phase mathematical model presented in this work allows one to numerically describe the propagation of a shock wave in the channel of a shock tube, the achievement of a layer of granular filling by the shock wave, and the reflection of the wave. It was shown that the granular medium partially transmits the shock wave, but mostly corresponds to it. This reflection differs from the reflection of a shock wave from a solid wall. The nature of the reflection of the shock wave depends on the density of the granules. In particular, it has been shown that a granular medium of lower density, due to the increased mobility of individual particles, leads to some amplification of the reflected wave. It is also shown that the reflected wave in this case forms two pronounced peaks. It should be noted that the pressure passed in the layer of the granular medium, on the contrary, turns out to be the greater, the heavier the particles of the granular medium.

Keywords: multiphase systems, granular media, shock waves, mathematical modeling, OpenFOAM

References

- [1] Kedrinskii V.K. Shock waves in a liquid containing gas bubbles // *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 1980. V. 16. No 5. C. 495-504.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=35463272>
- [2] Parkin B.R., Gilmore F.R., Brode G.A. Shock waves in bubble water. Memorandum RM-2795-PR. Abridged. 1961.
- [3] Gubajdullin A.A., Kutrunov A.V., Rustyumova O.Sh., Yakovleva T.N. [Some questions of the wave dynamics of a liquid with gas bubbles] *Nekotorye voprosy volnovej dinamiki zhidkosti s puzyr'kami gaza* // *Itogi issledovaniy. Tyumen*. 1994. Pp. 23–31.
- [4] Britan A., Ben-Dor G., Shapiro H., Liverts M., Shreiber I. Drainage effects on shock wave propagating through aqueous foams // *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*. 2007. V. 309. Pp. 137–150.
DOI: 10.1016/j.colsurfa.2007.01.018
- [5] Nigmatulin R.I. *Dynamics of Multiphase Media*. Vol 1 & 2. Hemisphere Publ. Corp New York, United States. 1990. 507 p.
- [6] Fedorov, A.V., Fedorchenko, I.A., Vasilishin, M.S., Karpov, A.G., Ivanov, O.S. Calculation of expansion of a packed bed of a disperse material subjected to pulsed fluidization // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2012. Vol. 53, No. 3. P. 397-407.
DOI: 10.1134/S0021894412030121
- [7] Mikaylenko C.I., Kuleshov V.S. Numerical modelling of inhomogeneity scale of a flow rate behind the porous barrier // *Computational Technologies*. 2015. V. 20, No 6. Pp. 46–58 (In Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=25408686>
- [8] Mikhaitenko C.I., Valeeva Yu.R. Highly dispersed medium sedimentation from air under pressure forces // *Numerical methods and programming*. 2013. V. 14, No 1. Pp. 328–333 (in Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=21014483>
- [9] Bashirova K.I., Mikhaylenko C.I. Three-dimensional simulation of a shock tube with OpenFOAM software // *Vestnik Bashkirskogo universiteta (Bulletin of Bashkir University)*. 2018. V. 23, No 3. Pp. 621–626 (in Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=36476517>



К ЮБИЛЕЮ АЛЕКСАНДРА АЛЕКСЕЕВИЧА АГАНИНА



13 августа 2019 года главному научному сотруднику Института механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Республики Татарстан, лауреату Государственной премии Республики Татарстан в области науки и техники, нашему доброму другу и коллеге Александру Алексеевичу Аганину исполнилось 65 лет.

Аганин Александр Алексеевич родился 13 августа 1954 года в поселке Красногорский Звениговского района Марийской АССР. Там же обучался в средней школе № 1 с 1961 по 1971 годы. С 1971 по 1976 год учился на мехмате Казанского государственного университета. Трудовую деятельность начал в 1976 году в КБ Системного программирования г. Гомеля Белорусской ССР, где

проработал инженером до 1980 г., после чего переехал в г. Казань. С 1980 года по настоящее время работает в коллективе ИММ ФИЦ КазНЦ РАН.

В 1992 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности 05.13.16 «Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях», а затем в 2000 г. — докторскую диссертацию по специальности 01.02.05 «Механика жидкости, газа и плазмы.» В 2009 г. получил звание профессора по кафедре Вычислительной математики и информатики.

А.А. Аганин — специалист в области ударно-волновой динамики жидкости и газа, автор 295-и научных работ, из них 68 статей в ведущих профильных российских и зарубежных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus.

Отметим несколько основных научных результатов Александра Алексеевича Аганина.

Разработан метод расчета и изучено раскрытие парашюта в высокоскоростном потоке газа, когда существенно влияние образования и выхода ударной волны из-под купола.

Создана методика расчета динамики газа внутри и в окрестности резонансных труб и объемных резонаторов. Выявлены основные особенности влияния нагрева газа на фронте продольных ударных волн в трубе на усиление и ослабление этих волн, на неоднородность температуры газа, а также ударных волн и структуры потоков газа в окрестности открытого конца трубы и около выходного отверстия объемных резонаторов.

Развита теория, разработан метод расчета и выполнен цикл исследований экстремального сжатия парогазовых пузырьков в жидкости. Выявлено, что для реализации экстремального сжатия пара в кавитационных пузырьках ацетон намного предпочтительнее воды, которая многими использовалась ранее. Показано, что такое соотношение обусловлено, во-первых, тем, что радиально-сходящиеся ударные волны в пузырьке образуются

в ацетоне намного легче, чем в воде, и, во-вторых, тем, что несферичность пузырька в ацетоне при коллапсе растет намного меньше, чем в воде. Установлено, что в кавитационном пузырьке в тетрадекане радиально-сходящиеся ударные волны образуются еще легче, чем в ацетоне.

Развита теория гидродинамического взаимодействия пузырьков, изучены несферические деформации пузырьков в кластерах и стримерах.

Развит метод расчета разрушительного воздействия кавитации на поверхности твердых тел, выявлены закономерности такого воздействия на режиме с образованием в пузырьке направленной к телу кумулятивной струи жидкости.

Результаты А.А. Аганина использовались в НИИ Автоматических устройств (г. Москва) при разработке конструкций парашютов, в Казанском ОКБ «Союз» при решении проблемы неустойчивого горения в ракетных двигателях, в Казанском межвузовском инженерном центре «Волновые технологии» КХТИ при создании волновых технологий очистки отходящих газов химических производств, на предприятии «Корунд» (г. Зеленодольск) при создании установки волновой сушки куриного помета, в лаборатории измерительных преобразователей при кафедре автоматизации и управления КАИ при разработке датчиков измерения угловых скоростей малоразмерных летательных аппаратов.

На сегодняшний день Александр Алексеевич Аганин ведет активную научную деятельность и руководит аспирантами, имеет четырех учеников — кандидатов наук, им разработаны спецкурсы для студентов и аспирантов, учебно-методические пособия для студентов. Читал лекции и спецкурсы в КГПУ, КФУ, ИММ КазНЦ РАН. Для привлечения молодежи в науку выступает с научно-популярными лекциями для студентов и школьников.

Достижения А.А. Аганина в научной и научно-организационной деятельности отмечены высокими государственными наградами, среди которых Благодарность Президента РАН (1999 г.); звание «Заслуженный деятель науки Республики Татарстан» (2005 г.), Государственная премия Республики Татарстан в области науки и техники (2012 г.) и др.

Коллектив журнала «Многофазные системы» от всей души поздравляет своего коллегу, члена редколлегии журнала Александра Алексеевича Аганина с юбилеем и желает ему прекрасного самочувствия, творческого вдохновения и активности, новых замечательных успехов на благо нашего Отечества!

Основные публикации

- [1] Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Ильгамов М.А. Образование сходящихся ударных волн в пузырьке при его сжатии // Доклады Академии наук. 2014. Т. 458. № 3. С. 282–286.
[DOI: 10.7868/S0869565214270115](https://doi.org/10.7868/S0869565214270115)
- [2] Aganin A.A. Dynamics of a small bubble in a compressible fluid // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2000. Vol. 33. No. 2. Pp. 157–174.
[DOI: 10.1002/\(SICI\)1097-0363\(20000530\)33:2<157::AID-FLD6>3.0.CO;2-A](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(20000530)33:2<157::AID-FLD6>3.0.CO;2-A)
- [3] Аганин А.А., Давлетшин А.И. Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 6. С. 89–102.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=21276363>
- [4] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Нигматулин Р.И., Топорков Д.Ю. Эволюция искажений сферичности кавитационного пузырька при акустическом сверхсжатии // Механика жидкости и газа. 2010. № 1. С. 57–69.
[DOI: 10.1134/S0015462810010072](https://doi.org/10.1134/S0015462810010072)
- [5] Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Метод численного решения задач сильного сжатия несферического кавитационного пузырька // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 1. С. 14–32.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=15214561>
- [6] Aganin A.A., Ilgamov M.A., Smirnova E.T. Development of longitudinal gas oscillations in a closed tube // Journal of Sound and Vibration. 1996. Vol. 195. No. 3. Pp. 359–374.
[DOI: 10.11006/jsvi.1996.0431](https://doi.org/10.11006/jsvi.1996.0431)
- [7] Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Расчет сильного сжатия сферического парового пузырька в жидкости // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 6. С. 17–27.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=11902563>
- [8] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г. Динамика кавитационного пузырька вблизи твердой стенки // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23. № 2 (98). С. 219–228.
[DOI: 10.1134/S0869864316020074](https://doi.org/10.1134/S0869864316020074)
- [9] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г. Схлопывание кавитационного пузырька в жидкости вблизи твердой стенки // Вестник Башкирского университета. 2013. Т. 18. № 1. С. 15–21.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=18956892>
- [10] Аганин А.А., Нигматуллин Р.И., Ильгамов М.А., Ахатов И.Ш. Динамика пузырька газа в центре сферического объема жидкости // Доклады Академии наук. 1999. Т. 369. № 2. С. 182–186.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=41768359>

Содержание

Механика жидкости и газа

Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В.

Двумерная динамическая модель взаимодействия жидкости и пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом в плоском канале 220–232

Агишева У.О., Галимзянов М.Н.

Взаимодействие акустической волны с многослойной средой, содержащей слой пузырьковой жидкости 233–242

Шагапов В.Ш., Давлетшина М.Р.

К теории разработки гидратного пласта тепловым воздействием 243–252

Механика твердого тела

Белов А.В., Копченев О.В., Скачков А.О., Ушаков Д.Е.

Моделирование взрыва в твердой среде в COMSOL Multiphysics 253–261

Краткие сообщения

Юлмухаметов А.А., Хакимов А.Г.

Определение скорости и плотности жидкости внутри трубопровода на упругих опорах 262–267

Мукминов Т.Ф.

Цепочка вложенных инвариантных подмоделей конических движений 268–273

Юлмухаметова Ю.В.

Барохронное сдвиговое движение газа 274–278

Баширова К.И., Михайленко К.И.

Отражение ударной волны от слоя мелкодисперсной среды малых концентраций 279–283

Портрет ученого

К юбилею Александра Алексеевича Аганина 284–285

Contents

Liquid & Gas Mechanics

Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V.

Two-dimensional dynamic model of the interaction of a fluid and a piezoelectric bending actuator in a plane channel 220–232

Agisheva U.O., Galimzyanov M.N.

Interaction of an acoustic wave with a multilayer medium containing a bubble liquid layer 233–242

Shagapov V.Sh., Davletshina M.R.

On the theory of hydrate formation decomposition under thermal influence 243–252

Solid Mechanics

Belov A.V., Kopchenov O.V., Skachkov A.O., Ushakov D.E.

Solid-state explosion simulation in COMSOL Multiphysics 253–261

Brief Communications

Yulmukhametov A.A., Khakimov A.G.

Determination of the speed and density of the fluid inside the pipeline on elastic supports 262–267

Mukminov T.F.

The chain of embedded invariant submodels for conic motions 268–273

Yulmukhametova Yu.V.

Barochronous shear gas motion 274–278

Bashirova K.I., Mikhaylenko C.I.

Shock wave reflection from a layer of a finely dispersed medium with low concentrations 279–283

Profiles

Anniversary of Alexander Alexeevich Aganin (in Russian) 284–285