ISSN: 2658–5782

Номер 3 Июль–Сентябрь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 3, с. 149–156

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.021
DOI: 10.21662/mfs2019.3.021
УДК 532.546:536.421

Получена: 21.11.2019
Принята: 24.12.2019

Анализ интенсивности добычи метана при его вытеснении из газогидратного пласта диоксидом углерода[1]

Рафикова Г.Р.*,, Хасанов М.К.***

*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак
**Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе рассмотрена теоретическая модель в плоском и одномерном приближении, получены численные решения для процесса замещения метана диоксидом углерода из состава гидрата в пласте, насыщенном метаном и его гидратом, при нагнетании в пласт углекислого газа. Процесс рассматривается при термобарических условиях, соответствующих области стабильности газогидратов метана и двуокиси углерода и области существования CO_2 в виде газообразной фазы. Рассмотрен случай, когда интенсивность образования гидрата диоксида углерода лимитируется диффузией углекислого газа через образовавшийся гидратный слой между потоком газовой смеси и гидратом метана. Принято, что процесс гидратозамещения происходит без высвобождения воды из состава гидрата. Для описания математической модели в качестве основных уравнений использованы уравнения сохранения масс для метана, диоксида углерода и их гидратов, закон Дарси для фильтрации, закон Фика для диффузионного перемешивания газовой смеси, уравнения состояния для газовой фазы, закон Дальтона, уравнение энергии, уравнение диффузии для переноса CO_2 через гидратный слой в масштабах поровых микроканалов. Исследована динамика массовых расходов выходящего углекислого газа и извлекаемого метана. Проанализировано влияние величины коэффициента диффузии, значения абсолютной проницаемости и протяженности пласта на интенсивность добытого метана, полученного в результате процесса газозамещения. Выявлено три основных этапа процесса: вытеснение свободного метана из пласта; извлечение свободного метана, полученного в результате начала гидратозамещения в пласте; полный переход гидрата метана в гидрат диоксида углерода и полное извлечение метана из пласта. Определено, как при различных параметрах соотносятся между собой два основных фактора по степени влияния на скорость замещения: тепломассоперенос в пласте и кинетика процесса замещения.

Ключевые слова: замещение метана диоксидом углерода из состава гидрата, газогидратный пласт, массовый расход, кинетика гидратозамещения, фильтрационный массоперенос

1. Введение

Одними из наиболее известных и перспективных способов извлечения метана из газогидратного пласта являются депрессионное и тепловое воздействия на пласт [1–4], введение ингибиторов в пласт [5]. Мало изученным методом является инжекция диоксида углерода в метангидратные пласты. Суть метода состоит в том, что газогидрат углекислого газа является более стабильным, чем газогидрат метана, и молекулы диоксида углерода вытесняют молекулы метана из состава газогидрата. Преимуществами данного способа являются утилизация парникового газа и сохранение механической прочности породы [6, 7]. Отметим также, что если разложение газогидрата при депрессии и нагреве проходит с поглощением тепла, то в случае использования метода инжекции углекислого газа процесс будет происходить с небольшим выделением тепла [7, 8]. Эксперименты по иссле-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №17-79-20001).

дованию процесса замещения метана из состава гидрата диоксидом углерода описаны в работах [6–9]. Математические модели образования гидрата углекислого газа в пласте, содержащем воду и метан в свободном состоянии, путем инжекции газообразного и жидкого диоксида углерода были рассмотрены в работах [10–14].

Настоящая статья является продолжением работ по развитию, построению и анализу математической модели процесса вытеснения метана из газогидратного пласта двуокисью углерода [15–17]. В настоящей работе проведено исследование динамики массовых расходов и интенсивности добычи метана в зависимости от различных коэффициентов проницаемости, коэффициентов диффузии и протяженностей пласта.

2. Постановка задачи

2.1. Математическая модель

Рассмотрим в плоском и одномерном приближении процесс вытеснения метана из газогидратного пласта диоксидом углерода. Примем следующие допущения: процесс замещения будет протекать при термобарических условиях, соответствующих области стабильности газогидратов метана и двуокиси углерода и области существования CO_2 в виде газообразной фазы; пласт в исходном состоянии состоит из пористого скелета (не участвующего в физико-химическом превращении) метана и его газогидрата; скелет пористой среды и газогидратную фазу полагаем неподвижными и несжимаемыми.

Запишем уравнения сохранения масс для диоксида углерода и метана, фильтрующихся через пласт:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(mS_g\rho^0_{g(d)}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(mS_g v_{g(d)}\rho^0_{g(d)}\right)&=-J_{g(d)},\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(mS_g\rho^0_{g(m)}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(mS_g v_{g(m)}\rho^0_{g(m)}\right)&=J_{g(m)}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь m — пористость скелета; S_g — газонасыщенность; $\rho^0_{g(i)}$, $v_{g(i)}$ $(i=d,m)$ — парциальные плотности и скорости компонент газовой смеси; $J_{g(d)}$, $J_{g(m)}$ — интенсивности перехода диоксида углерода в состав гидрата и вытеснения метана из состава гидрата; нижние индексы $i=d,m$ относятся соответственно к углекислому газу и метану, g — к газу.

Будем полагать, что гидратная фаза состоит из двух составляющих: гидрата CH_4 и гидрата CO_2. Тогда объемную гидратонасыщенность можно представить как:

$$S_h=S_{h(d)}+S_{h(m)},\quad S_g+S_h=1,$$

где $S_{h(i)}$ — гидратонасыщенность метана $(i=m)$ и диоксида углерода $(i=d)$; нижний индекс h относится к гидрату.

Полагая, что газогидрат неподвижен, уравнения сохранения масс для составляющих гидратной фазы запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(mS_{h(d)}G_{h(d)}\rho^0_{h(d)}\right)&=J_{g(d)},\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(mS_{h(m)}G_{h(m)}\rho^0_{h(m)}\right)&=-J_{g(m)}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $\rho^0_{h(i)}$ и $G_{h(i)}$ — плотность гидрата и массовое содержание газа в составе гидрата для диоксида углерода $(i=d)$ и метана $(i=m)$.

Плотности гидрата диоксида углерода и метана равны соответственно 1117 кг/м^3 и 910 кг/м^3 [18]. Наиболее распространенной структурой гидратов CH_4 и CO_2 является КС-I, когда на одну молекулу газа приходится около шести молекул воды, в связи с чем массовые доли диоксида углерода и метана в составе гидрата соответственно равны $G_{h(d)}=0.29$ и $G_{h(m)}=0.13$. Следовательно, с хорошей точностью выполняется соотношение

$$\left(1-G_{h(d)}\right)\rho^0_{h(d)}=\left(1-G_{h(m)}\right)\rho^0_{h(m)}. \qquad (3)$$

Данное условие также означает, что в единице объема гидрата диоксида углерода и метана содержится одинаковая масса воды. С учетом вышеприведенных фактов примем, что число молекул метана, покидающего гидрат, равно числу молекул диоксида углерода, переходящих в состав гидрата, и процесс происходит без высвобождения воды из состава гидрата [6,8]. Отсюда, для интенсивностей выполняется следующее соотношение

$$\frac{J_{g(d)}}{M_{(d)}}=\frac{J_{g(m)}}{M_{(m)}}, \qquad (4)$$

где $M_{(i)}$ $(i=d,m)$ — молекулярные массы диоксида углерода и метана.

Для газовой смеси в целом введем среднемассовую скорость:

$$\begin{aligned} \rho^0_g v_g&=\rho^0_{g(d)}v_{g(d)}+\rho^0_{g(m)}v_{g(m)},\\ \rho^0_g&=\rho^0_{g(d)}+\rho^0_{g(m)}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Для фильтрации и диффузионного перемешивания газовой смеси примем соответственно законы Дарси и Фика:

$$mS_g v_g=-\frac{k_g}{\mu_g}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho^0_{g(d)}w_{g(d)}=-\rho^0_{g(m)}w_{g(m)}&=D_g\frac{\partial\rho^0_{g(m)}}{\partial x},\\ w_{g(d)}=v_{g(d)}-v_g,\quad w_{g(m)}&=v_{g(m)}-v_g. \end{aligned} \qquad (7)$$

Здесь k_g — проницаемость пласта; p — давление; μ_g — динамическая вязкость газа; $w_{g(i)}$ $(i = d, m)$ — диффузионные скорости метана и диоксида углерода; D_g — коэффициент диффузионного перемешивания смеси метана и диоксида углерода.

Запишем уравнения состояния для метана и диоксида углерода и закон Дальтона для газовой смеси:

$$p_{g(d)} = \rho^0_{g(d)} R_{(d)} T, \quad p_{g(m)} = \rho^0_{g(m)} R_{(m)} T, \qquad p = p_{g(d)} + p_{g(m)}, \tag{8}$$

где T — температура; R — приведенная газовая постоянная.

Для системы запишем уравнение теплопроводности $(T_{sk} = T_h = T_g = T)$:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + m S_g \rho^0_g c_g v_g \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + +m\left(\rho^0_{h(d)} l_{h(d)} \frac{\partial S_{h(d)}}{\partial t} + \rho^0_{h(m)} l_{h(m)} \frac{\partial S_{h(m)}}{\partial t}\right). \tag{9}$$

Здесь c_j $(j = g, h)$, λ — удельная теплоемкость и теплопроводность фаз; $l_{h(m)}$, $l_{h(d)}$ — удельные теплоты разложения и образования гидрата метана и диоксида углерода соответственно, отнесенные на единицу массы; нижний индекс sk относится к скелету.

Систему уравнений (1)–(9) дополним граничными и начальными условиями:

$$\begin{gathered} x=0,\ t>0: \ p=p_e,\ p_{g(d)}=p_{g(d)e},\ T=T_e, \\ x=L,\ t>0: \ p=p_0,\ \partial T/\partial x=0, \\ 0<x<L,\ t=0: \ p=p_0,\ p_{g(d)}=0,\ T=T_0. \end{gathered} \tag{10}$$

Массовые расходы углекислого газа и метана, отнесенные на единицу площади поперечного сечения пласта, равны:

$$q_{g(d)} = \rho^0_{g(d)} m S_g v_g, \quad q_{g(m)} = \rho^0_{g(m)} m S_g v_g.$$

Здесь $q_{g(d)}$, $q_{g(m)}$ — расходы диоксида углерода и метана на выходе.

Тогда общая масса добытых диоксида углерода и метана, отнесенная на единицу площади поперечного сечения пласта, равна:

$$m_{g(d)} = \int_0^t q_{g(d)} dt, \quad m_{g(m)} = \int_0^t q_{g(m)} dt.$$

2.2. Кинетика гидратозамещения

Будем полагать, что интенсивность замещения молекул метана молекулами диоксида углерода определяется диффузией диоксида углерода через слой гидрата диоксида углерода, образовавшийся между газом и гидратом метана. Для построения аналитических выражений для кинетики замещения молекул метана молекулами диоксида углерода рассмотрим следующую схему. Пористую среду схематически представим, как систему цилиндрических каналов радиуса a. Примем, что гидрат метана будет находиться в кольцевом слое между $r = a$ и $r = a_{(md)}$, гидрат диоксида углерода — в слое между $r = a_{(md)}$ и $r = a_g$, а газовая смесь диоксида углерода и метана будет протекать в канале радиуса $r = a_g$.

Для процесса переноса диффундирующего газа через слой гидрата диоксида углерода запишем уравнение диффузии [19]:

$$\frac{\partial \rho_{g(d)}}{\partial t} = D_{h(d)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \rho_{g(d)}}{\partial r}\right), \quad a_g < r < a_{(d)}, \tag{11}$$

где $D_{h(d)}$ — коэффициент диффузии углекислого газа в гидрате диоксида углерода. Дополним уравнение следующими граничными условиями:

$$r = a_g: \ \rho_{g(d)} = \rho_{g(d)s}, \quad r = a_{(d)}: \ \rho_{g(d)} = 0. \tag{12}$$

Здесь $\rho_{g(d)s}$ — плотность подвижного диоксида углерода в составе гидрата для состояния насыщения.

Для потока массы подвижного диоксида углерода к поверхности контакта между гидратами диоксида углерода и метана запишем выражение

$$j_{g(d)} = -D_{h(d)} \left(\frac{\partial \rho_{g(d)}}{\partial r}\right)_{a_{(d)}}. \tag{13}$$

Для интенсивности $J_{g(d)}$ потребления CO_2 на образование гидрата в единице объема на основании уравнений (11)–(13) получим

$$J_{g(d)} = 2m(1 - S_{h(m)}) \frac{\rho_{g(d)s} D_{h(d)}}{a^2_{(d)} \ln(a_{(md)}/a_g)}. \tag{14}$$

Введем эмпирический параметр — приведенный коэффициент диффузии для CO_2, — отвечающий в силу выше принятых допущений за кинетику образования гидрата CO_2 в виде:

$$D = \frac{\rho_{g(d)s} D_{h(d)}}{\rho^0_{g(d)}}. \tag{15}$$

Более подробно с аналитическим решением уравнения (11) при граничных условиях (12) и с выводом выражения для интенсивности потребления CO_2 на образование гидрата в единице объема (14) можно ознакомиться в работе [15].

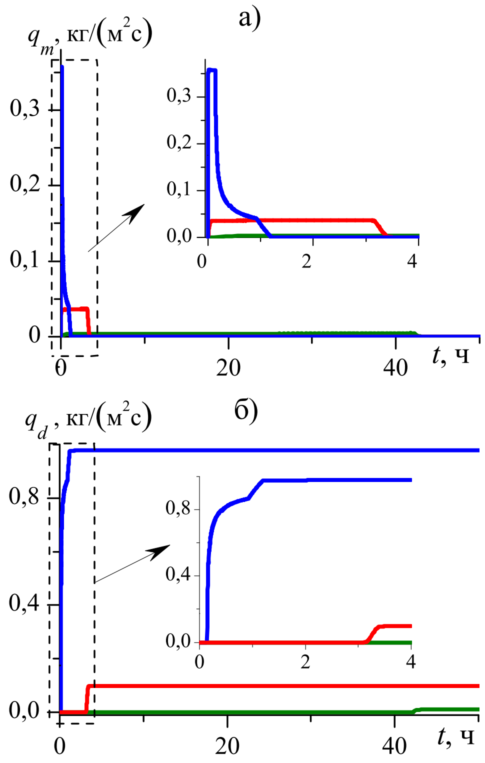


Рис. 1. Влияние проницаемости на динамику массовых расходов метана (а) и диоксида углерода (б) на выходе из пласта. Синяя, красная и зеленая кривые соответствуют значениям проницаемости $k = 5 \cdot 10^{-11}, 5 \cdot 10^{-12}, 5 \cdot 10^{-13}$ м^2

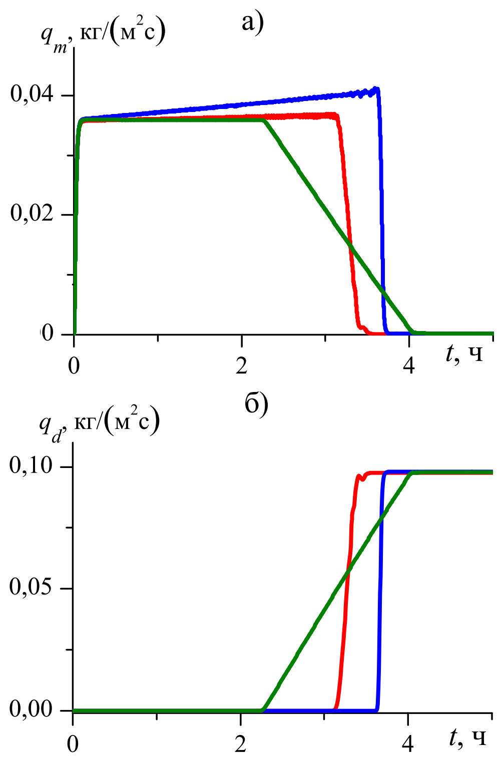


Рис. 2. Влияние коэффициента диффузии на динамику массовых расходов метана (а) и диоксида углерода (б) на выходе из пласта. Синяя, красная и зеленая кривые соответствуют значениям коэффициента диффузии $D = 5 \cdot 10^{-14}$, $5 \cdot 10^{-15}, 5 \cdot 10^{-16}$ м^2/с

3. Анализ полученных результатов

На основе системы уравнений (1)–(9), (11)–(15) с начальными и граничными условиями (10) проведены численные расчеты. Для основных параметров системы приняты следующие значения: $T_0 = 273$ K, $T_e = 273$ K, $p_0 = 3$ МПа, $p_e = 3.4$ МПа, $S_{h(m)0} = 0.2$, $x_0 = 100$ м, $m = 0.1$, $k = 5 \cdot 10^{-12}$ м^2, $D = 5 \cdot 10^{-15}$ м^2/с.

На рис. 1 приведены зависимости массовых расходов метана и диоксида углерода на выходе пласта от времени. Из рисунка видно, что явно прослеживаются три основных этапа процесса. На начальном этапе вытесняется свободный метан, находящийся в порах пласта в исходном состоянии. Данный этап сопровождается резким повышением расхода метана на выходе из пласта. Следующий этап характеризуется вытеснением метана, полученного в результате процесса замещения метана из состава гидрата углекислым газом. На этом этапе поддерживается стабильное с течением времени значение массового расхода добываемого через внешнюю границу пласта метана. Третий этап характеризуется полным переходом гидрата метана в гидрат диоксида углерода и полным извлечением метана из газогидратного пласта, что соответствует снижению массового расхода метана и повышению массового расхода диоксида углерода. На первом и втором этапах через внешнюю границу выходит практически «чистый» метан (т.е. содержание диоксида углерода в газовой смеси, выходящей через внешнюю границу пласта, очень мало), а на третьем этапе из гидратонасыщенного пласта будет извлекаться газовая смесь метана и углекислого газа, что требует дополнительных затрат на сепарирование газовой смеси.

Также отметим, что с уменьшением проницаемости пласта увеличивается продолжительность второго этапа процесса, что объясняется снижением влияния кинетики гидратозамещения и повышением влияния фильтрационного переноса.

На рис. 2 приведены зависимости массовых расходов метана и диоксида углерода на выходе пласта от времени. Можно заметить, что скорость

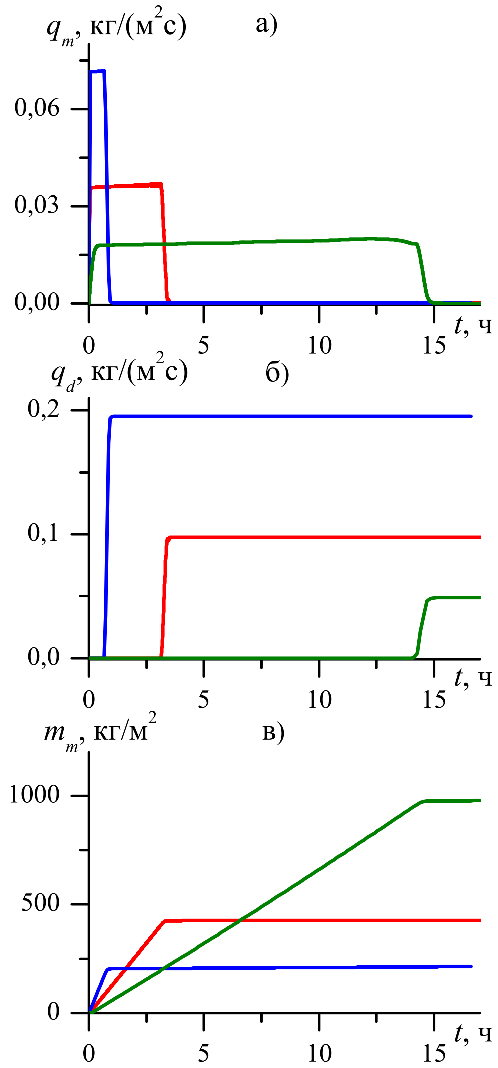


Рис. 3. Влияние протяженности пласта на динамику массовых расходов метана (а), диоксида углерода (б), массы метана (в) на выходе из пласта. Синяя, красная и зеленая кривые соответствуют значениям протяженности пласта $x_0 = 50, 100, 200$ м

массового расхода и продолжительность вытеснения свободного метана из пласта для первого этапа одинаковы для всех перечисленных коэффициентов диффузии. Период протекания второго этапа процесса сокращается, а третьего этапа увеличивается с уменьшением параметра D, что связано с ростом влияния кинетики замещения.

На рис. 3 приведены зависимости массовых расходов метана, диоксида углерода и массы метана на выходе пласта от времени. Заметим, что с увеличением длины пласта значение массового расхода уменьшается и увеличивается период

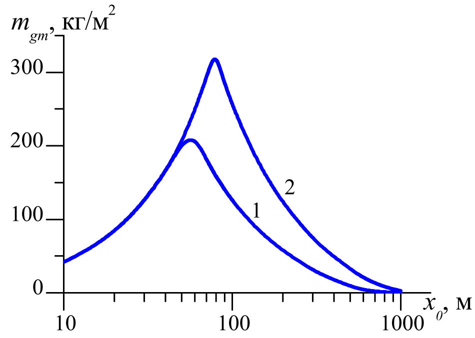


Рис. 4. Влияние длины пласта на массу метана, добытого за определенный промежуток времени

протекания второго и третьего этапов процесса, что объясняется ростом влияния фильтрационного массопереноса. Также отметим, что с ростом длины пласта уменьшается интенсивность добычи метана, но увеличивается масса добытого метана.

На рис. 4 проиллюстрировано влияние протяженности пласта на массу метана, добываемого за определенный промежуток времени. Числа на кривых соответствуют значениям времени в часах. Можно видеть, что в диапазоне $10 \div 100$ метров масса добытого метана за разные промежутки времени приблизительно одинакова, что говорит о быстром завершении процесса. Также заметим, что в этом диапазоне с ростом протяженности пласта скорость добычи метана увеличивается, а в диапазоне $100 \div 1000$ метров — уменьшается. В первом диапазоне значений длины пласта процесс происходит в объемной протяженной области (лимитируется кинетикой процесса замещения), поскольку характерное время $t^{(D)}$ кинетики процесса замещения превышает характерное время $t^{(P)}$ распространения фронта давления от скважины до внешней границы пласта $t^{(D)} > t^{(P)}$ [15, 20]. Во втором диапазоне процесс происходит в режиме с приближенно фронтальной границей фазовых превращений (лимитируется массопереносом в пласте), что соответствует $t^{(D)} < t^{(P)}$, пиковые значения $x_0 = 50 \div 90$ соответствуют приближенному равенству характерных времен $t^{(D)} \approx t^{(P)}$.

4. Заключение

Построена математическая модель процесса вытеснения метана из газогидратного пласта путем его замены на диоксид углерода. Проведено численное исследование влияния основных параметров пласта и коэффициента диффузии на массовые расходы и массы добываемого метана на выходе из пласта. Для процесса характерны три этапа:

вытеснение свободного метана из пласта; извлечение свободного метана, полученного в результате начала гидратозамещения в пласте; полный переход гидрата метана в гидрат диоксида углерода и полное извлечение метана из пласта.

Показано, что продолжительность второго этапа процесса растет с уменьшением проницаемости пласта, что объясняется повышением влияния фильтрационного массопереноса в пласте и протеканием режима с приближенно фронтальной границей фазовых превращений. С уменьшением параметра D период протекания второго этапа процесса сокращается, а третьего этапа увеличивается, что связано с ростом влияния кинетики гидратозамещения.

Список литературы

[1] Васильев В.И., Попов В.В., Цыпкин Г.Г. Численное исследование разложения газовых гидратов, сосуществующих с газом в природных пластах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 127–134.
https://elibrary.ru/item.asp?id=9282178

[2] Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: Физматлит, 2009. 232 с.

[3] Назмутдинов Ф.Ф., Хабибуллин И.Л. Математическое моделирование десорбции газа из газового гидрата // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 5. С. 118–125.
https://elibrary.ru/item.asp?id=28100566

[4] Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г. Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа. М.: Наука, 2016. 238 с.

[5] Moridis G.J. Numerical studies of gas production from methane hydrates // Society of Petroleum Engineers Journal. Vol. 8, No 4.
DOI: 10.2118/87330-PA

[6] Espinoza N.D., Santamarina C.J. P-wave monitoring of hydrate-bearing sand during CH_4–CO_2 replacement // Int. J. Greenhouse Gas Control. 2011. Vol. 5, P. 1031–1038.
DOI: 10.1016/j.ijggc.2011.02.006

[7] Jung J.W., Santamarina J.C. CH_4-CO_2 replacement in hydrate-bearing sediments: A pore-scale study // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. 2010. Vol. 11. Article Q0AA13.
DOI: 10.1029/2010GC003339

[8] Jung J.W., Espinoza D.N., Santamarina J.C. Properties and phenomena relevant to CH_4–CO_2 replacement in hydrate-bearing sediments // J. Geophysical Research: Solid Earth. 2010. Vol. 115. Article B10102.
DOI: 10.1029/2009JB000812

[9] Falenty A., Qin J., Salamatin A.N., Yang L., Kuhs W.F. Fluid composition and kinetics of the in situ replacement in CH_4–CO_2 hydrate system // Journal of physical chemistry C. 2016. Vol. 120, No 48. P. 27159–27172.
DOI: 10.1021/acs.jpcc.6b09460

[10] Цыпкин Г.Г. Образование гидрата при инжекции жидкой двуокиси углерода в пласт, насыщенный метаном и водой // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 99–107.
DOI: 10.7868/S0568528116050157

[11] Хасанов М.К. Инжекция вскипающей углекислоты в пласт, сопровождающаяся замещением метана в гидрате двуокисью углерода // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80, № 5. С. 553–565.
https://elibrary.ru/item.asp?id=27174958

[12] Мусакаев Н.Г., Хасанов М.К. Математическая модель процесса захоронения углекислого газа в гидратонасыщенном пласте // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 2. С. 181–187.
DOI: 10.21662/uim2016.2.026

[13] Шепелькевич О.А. Замещение метана в гидратном пласте путем инжекции в него жидкого диоксида углерода // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 206–213.
DOI: 10.21662/uim2017.2.031

[14] Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Байрамгулова Р.С. К теории инжекции жидкого диоксида углерода в пласт, насыщенный системой «газогидрат метана–метан» в режиме образования промежуточной талой зоны // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 2. С. 171–180.
DOI: 10.21662/uim2016.2.025

[15] Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Хасанов М.К. К теории замещения метана из состава газогидрата диоксидом углерода // Теоретические основы химической технологии. 2019. Т. 53. № 1. С. 67–77.
DOI: 10.1134/S0040357118060143

[16] Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Рафикова Г.Р. Вытеснение метана из газогидратного пласта при закачке диоксида углерода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 6(44). С. 104–114.
DOI: 10.17223/19988621/44/9

[17] Musakaev N.G., Khasanov M.K., Rafikova G.R. Mathematical model of the methane replacement by carbon dioxide in the gas hydrate reservoir taking into account the diffusion kinetics // AIP Conference Proceedings. 2018. Is. 1939. P. 020034-1–020034-6.
DOI: 10.1063/1.5027346

[18] Макогон Ю.Ф. Газогидраты. История изучения и перспективы освоения // Геология и полезные ископаемые Мирового океана. 2010. № 2. С. 5–21.
https://elibrary.ru/item.asp?id=15122639

[19] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Рафикова Г.Р. О применимости квазистационарного решения уравнения диффузии в слое гидрата, образующегося на границе контакта газ–лед (вода) // Теоретические основы химической технологии. 2018. Т. 52. № 4. С. 458–465.
DOI: 10.1134/S0040357118040073

[20] Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Хасанов М.К. К теории образования газогидрата в частично водонасыщенной пористой среде при нагнетании метана // Теплофизика высоких температур. 2016. Т. 54. № 6. С. 911–920.
DOI: 10.7868/S004036441606017X

ISSN 2658–5782

14 (2019), **3**, 149–156

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.021
DOI: 10.21662/mfs2019.3.021

Received: 21.11.2019
Accepted: 24.12.2019

Analysis of methane production intensity during its displacement from a gas hydrate formation by carbon dioxide

Rafikova G.R.*,, Khasanov M.K.***

*Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak
**Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

The theoretical model is considered in the one-dimensional approximations and numerical solutions are obtained for the process of replacing methane with carbon dioxide from a hydrate in a formation saturated with methane and its hydrate when carbon dioxide is injected into the formation. The process is considered under thermobaric conditions corresponding to the stability region of methane gas and carbon dioxide and the region of existence of CO_2 in the form of a gaseous phase. The case is considered when the rate of carbon dioxide hydrate formation is limited by diffusion of carbon dioxide through the formed hydrate layer between the gas mixture stream and methane hydrate. It is accepted that the hydration substitution process occurs without the release of water from the hydrate. To describe the mathematical model, the main equations are the mass conservation equations for methane, carbon dioxide and their hydrates, Darcy's law for filtration, Fick's law for diffusive mixing of the gas mixture, state equations for the gas phase, Dalton's law, energy equation, diffusion equation for transport CO_2 through the hydration layer at the pore microchannel scale. The dynamics of the mass flow rates of the outgoing carbon dioxide and methane recovered has been investigated. The influence of the diffusion coefficient, the absolute permeability and the length of the formation on the intensity of the methane produced as a result of the gas substitution process is analyzed. Three main stages of the process were identified: displacement of free methane from the reservoir; extraction of free methane obtained as a result of the beginning of hydrate substitution in the formation; complete conversion of methane hydrate to carbon dioxide hydrate and complete extraction of methane from the formation. It is determined how the two main factors relate to each other in terms of the degree of influence on the replacement rate: heat and mass transfer in the reservoir and the kinetics of the replacement process.

Keywords: replacement of methane with carbon dioxide from the hydrate, gas hydrate formation, mass flow rate, hydration substitution kinetics, filtration mass transfer

References

[1] Vasil'ev V.I., Popov V.V., Tsypkin G.G. Numerical investigation of the decomposition of gas hydrates coexisting with gas in natural reservoirs // Fluid Dynamics. 2006. V. 41. No. 4. Pp. 599–605. DOI: 10.1007/s10697-006-0078-z

[2] Tsypkin G.G. Techeniya s fazovymi perekhodami v poristykh sredakh. M.: Fizmatlit. 2009. P. 232 (in Russian).

[3] Nazmutdinov F.F., Khabibullin I.L. Mathematical modeling of gas desorption from a gas hydrate // Fluid Dynamics. 1996. V.31. No. 5. Pp. 724–730. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28097978

[4] Shagapov V.Sh., Musakayev N.G. Dinamika obrazovaniya i razlozheniya gidratov v sistemakh dobychi. transportirovki i khraneniya gaza. M.: Nauka. 2016. P. 238 (in Russian).

[5] Moridis G.J. Numerical studies of gas production from methane hydrates // Society of Petroleum Engineers Journal. Vol. 8, No. 4. DOI: 10.2118/87330-PA

[6] Espinoza N.D., Santamarina C.J. P-wave monitoring of hydrate-bearing sand during CH_4–CO_2 replacement // Int. J. Greenhouse Gas Control. 2011. Vol. 5. Pp. 1031–1038. DOI: 10.1016/j.ijggc.2011.02.006

[7] Jung J.W., Santamarina J.C. CH_4-CO_2 replacement in hydrate-bearing sediments: A pore-scale study // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. 2010. Vol. 11. Article Q0AA13. DOI: 10.1029/2010GC003339

[8] Jung J.W., Espinoza D.N., Santamarina J.C. Properties and phenomena relevant to CH_4–CO_2 replacement in hydrate-bearing sediments // J. Geophysical Research: Solid Earth. 2010. Vol. 115. Article B10102. DOI: 10.1029/2009JB000812

[9] Falenty A., Qin J., Salamatin A.N., Yang L., Kuhs W.F. Fluid composition and kinetics of the in situ replacement in CH_4-CO_2 hydrate system // Journal of physical chemistry C. 2016. Vol. 120, No. 48. Pp. 27159–27172.
DOI: 10.1021/acs.jpcc.6b09460

[10] Tsypkin G.G. Formation of hydrate in injection of liquid carbon dioxide into a reservoir saturated with methane and water // Fluid Dynamics. 2016. V. 51, No. 5. Pp. 672–679.
DOI: 10.1134/S0015462816050112

[11] Khasanov M.K. Injection of boiling liquid carbon dioxide into a stratum, accompanied by replacement of methane in hydrate by carbon dioxide // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2016. V. 80, No. 5. Pp. 391–399.
DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.02.006

[12] Musakayev N.G., Khasanov M.K. [The mathematical model of the carbon dioxide burial in the reservoir saturated with hydrate] *Trudy Instituta mekhaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN* [Proceedings of the Institute of Mechanics. R.R. Mavlyutov Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences]. 2016. V. 11, No. 2. Pp. 181-–187 (In Russian).
DOI: 10.21662/uim2016.2.026

[13] Shepelkevich O.F [The replacement of methane hydrate in the reservoir by injection into the liquid carbon dioxide] *Trudy Instituta mekhaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN* [Proceedings of the Institute of Mechanics. R.R. Mavlyutov Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences]. 2017. V. 12, No. 2. Pp.206–213 (In Russian).
DOI: 10.21662/uim2017.2.031

[14] Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Bayramgulova R.S. [The theory of injection of liquid carbon dioxide in formation, saturated system «hydrate of methane–methane» in the mode of formation of the intermediate melt zone]*Trudy Instituta mekhaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN* [Proceedings of the Institute of Mechanics. R.R. Mavlyutov Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences]. 2016. V. 11, No. 2. Pp. 171–180 (In Russian).
DOI: 10.21662/uim2016.2.025

[15] Shagapov V.Sh., Rafikova G.R., Khasanov M.K. The theory of the replacement of methane by carbon dioxide in gas hydrates // Theoretical foundations of chemical engineering. 2019. V. 53, No. 1. Pp. 64–74.
DOI: 10.1134/S0040579518060118

[16] Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Rafikova G.R. [Displacement of methane from a gas hydrate reservoir in the process of carbon dioxide injection] [Vestnik tomskogo gosudarstvennogo universiteta-matematika i mekhanika-tomsk state university journal of mathematics and mechanics]. 2016. No. 6. Pp. 104–114 (In Russian).
DOI: 10.17223/19988621/44/9

[17] Musakaev N.G., Khasanov M.K., Rafikova G.R. Mathematical model of the methane replacement by carbon dioxide in the gas hydrate reservoir taking into account the diffusion kinetics // AIP Conference Proceedings. 2018. Is. 1939. Pp. 020034-1–020034-6.
DOI: 10.1063/1.5027346

[18] Makogom Yu.F. [Gazogidraty. Istoriya izucheniya i perspektivy osvoyeniya] [Geologiya i poleznyye iskopayemyye Mirovogo okeana]. 2010. No. 2. Pp. 5–21 (In Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=15122639

[19] Shagapov V.S., Chiglintseva A.S., Rafikova G.R. On the applicability of a quasi-stationary solution of the diffusion equation for the hydrate layer formed at the gas–ice (water) interface // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2018. V. 52. No. 4. Pp. 560–567.
DOI: 10.1134/S0040579518040413

[20] Shagapov V.Sh., Rafikova G.R., Khasanov M.K. On the theory of formation of gas hydrate in partially water-saturated porous medium when injecting methane // High Temperature. 2016. V. 54, No. 6. Pp. 858—866.
DOI: 10.1134/S0018151X16060171

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 2, с. 157–164

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.2.022
DOI: 10.21662/mfs2019.2.022
УДК 532.529.534.2

Получена: 22.11.2019
Принята: 24.12.2019

К теории определения месторасположения гидратных отложений в газопроводах акустическим зондированием[1]

Шагапов В.Ш.*, Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.****

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа
**Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

Исследуется эволюция возмущений давления, распространяющихся в трубопроводе, заполненном газокапельной средой, представляющей собой «влажный» метан при температуре ниже точки росы и имеющем поврежденный участок в виде протяженного сужения канала из-за гидратной пробки. Образование гидрата происходит из-за наличия воды (или ее паров) и газа, компоненты которого растворяясь в воде при определенных условиях, формируют твердую фазу. Гидратные образования способствуют снижению проходимости газопроводов и поэтому их обнаружение является актуальной задачей. Предлагается решение проблемы с помощью акустических методов. Для этого рассмотрена математическая модель распространения акустических волн в длинноволновом диапазоне в газокапельной среде. Горизонтальный трубопровод представляется полубесконечным, решение ищется в виде гармонической волны. Волна — одномерная, имеет малую амплитуду колебаний. На основе дисперсионных уравнений построены зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты возмущения акустической волны и от объемного содержания взвешенной фазы (капелек воды). В области высоких частот с увеличением объемного содержания наблюдается рост коэффициента затухания. Формулы для коэффициентов отражения и прохождения выведены с учетом сужения трубопровода из-за гидратных отложений. Представлены результаты численных расчетов, иллюстрирующих динамику импульсных сигналов в зависимости от толщины газогидрата на внутренней стенке трубопровода. Расчеты проведены на основе прямых и обратных преобразований Фурье и с использованием программного обеспечения. Установлено, что, чем больше толщина гидратного отложения на стенке, тем большую амплитуду имеет возвратившийся отраженный сигнал.

Ключевые слова: газокапельная среда, гидратная пробка, импульс давления

1. Введение

При эксплуатации газопроводов возникают термодинамические условия для появления «склероза» (гидратообразования) из-за скопления на внутренней поверхности труб газогидратных отложений. Значительное сужение просвета трубопровода, заполненного газокапельной средой, приводит к перебоям в эксплуатации трубопроводов. Одним из надежных способов оперативного контроля состояния трубопроводов является использование акустических методов, основанных на особенностях трансформации импульсных сигналов в зависимости от метрических параметров трубопроводов, свойств заполняющих трубопровод среды и масштабов повреждения.

Впервые теоретический анализ распространения высокочастотных акустических волн в скважинах представлен в работе [1]. Исследованию особенностей распространения звуковых волн в парогазокапельных системах посвящены работы [2–7].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Академии наук Республики Башкортостан (гражданско-правовой договор на выполнение научно-исследовательской работы № 0301200057819000040_104987).

Моделирование процессов отложения парафина при течении газонефтяной смеси в трубах и гидратообразования на стенках газопровода выполнено в [8–11]. Теория акустического зондирования применительно к области нефтяных и газовых скважин развита в [12]. Как уже отмечено, диагностика трубопроводов при помощи дистанционного способа акустического контроля основана на методах, учитывающих особенности динамики сигналов на поврежденных участках трубопровода. В работах [13–15] показано, что с помощью интеллектуальной системы контроля [16, 17] можно зафиксировать место сужения канала из-за гидратной пробки в трубопроводе на ранних стадиях изменения давления по импульсам, отраженным от места «склероза».

В настоящей работе рассматривается математическая модель эволюции акустического сигнала в трубопроводе со «склерозом», заполненном газокапельной средой. По изменению амплитуды отраженного сигнала от начала суженного участка трубопровода можно судить о наличии газогидратной пробки.

2. Допущения и основные уравнения

Пусть горизонтальный полубесконечный трубопровод радиуса R, находящийся на поверхности земли, содержит поврежденный участок в виде протяженного сужения канала. Причем трубопровод заполнен газокапельной средой в виде метана и взвешенных капелек воды и находится под высоким давлением. Рассмотрим малые возмущения, инициируемые изменением давления на границе трубопровода. Будем полагать, что длины волн λ в канале значительно больше, чем величина сужения. Это допущение в дальнейшем позволяет при теоретическом описании рассмотреть начало и конец «склеротического» участка в качестве некоторых отражающих поверхностей. Кроме того, эволюция волн (затухание акустических сигналов) происходит за счет межфазных процессов в газокапельной среде.

Течение в канале будем полагать одномерным (параметры течения — скорость и давление зависят от времени и координаты x, отсчитываемой от входа трубопровода). Для этого, в свою очередь, необходимо выполнение условия [12]: $\lambda > 2R$ ($\lambda = 2\pi C/\omega$, где C — скорость звука в среде; ω — частота возмущений).

Процесс эволюции возмущений давления в трубопроводе можно разбить на отдельные этапы, характерные для распространения возмущений по газокапельной среде с наличием газогидрата на стенках трубопровода (рис. 1). А, именно: распро-

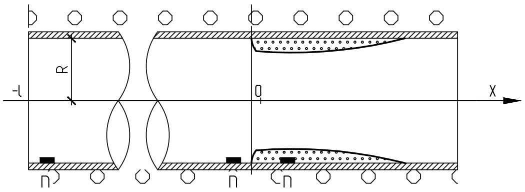


Рис. 1. Схема трубопровода со «склерозом»

странение сигнала на участке от границы трубопровода ($x = -l$) до газогидратного отложения ($x = 0$), отражение и прохождение через данный участок ($x = 0$), распространение отраженного сигнала на участке $-l < x < 0$, а также распространение прошедшего сигнала на участке $0 < x < \infty$.

Запишем уравнения сохранения масс, числа капель и импульсов в плоскоодномерном и линеаризованном приближении для малых возмущений:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \rho_{m0}\frac{\partial v_m}{\partial t} = I, \quad \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \rho_{w0}\frac{\partial v_w}{\partial t} = -I,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0\frac{\partial v_w}{\partial t} = 0, \quad \rho_{m0}\frac{\partial v_m}{\partial t} + \rho_{w0}\frac{\partial v_w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v_w}{\partial t} = \frac{v_m - v_w}{t_v}$$

$$\left(I = 4\pi a_0^2 n_0 j, \quad t_v = \frac{2}{9}\frac{a_0^2}{\nu_m^{(\mu)}}\frac{\rho_{w0}^0}{\rho_{m0}^0} \right).$$

Здесь ρ_m, ρ_w, ρ_m^0, ρ_w^0, v_m, v_w — средние по смеси и по фазе плотности, скорости; t, p, a_0, n — время, давление, размер капель, число капель в единице объема; I, j — интенсивности испарения жидкости ($I > 0$) или конденсации пара ($I < 0$), отнесенные к единице объема смеси и к единице площади поверхности раздела фаз; нижние индексы m и w относятся к параметрам метана и воды в капельках, дополнительный нижний индекс «0» отнесен к невозмущенному состоянию.

Из уравнений сохранения масс и числа капель с учетом кинематических зависимостей

$$\rho_m = \rho_m^0 \alpha_m, \quad \rho_w = \rho_w^0 \alpha_w,$$

$$\alpha_w = \frac{4}{3}\pi a^3 n, \quad \alpha_m + \alpha_w = 1,$$

где α_m, α_w — объемные содержания, пренебрегая сжимаемостью воды в капельках, имеем

$$\alpha_{m0}\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \rho_{w0}^0\left(\alpha_{m0}\frac{\partial v_m}{\partial x} + \alpha_{w0}\frac{\partial v_w}{\partial x}\right) =
= 3\frac{\rho_{m0}^0 - \rho_{w0}^0}{a_0}\alpha_{w0}\frac{\partial a}{\partial t}.$$

Учет межфазного тепломассообмена произведем на основе решений уравнений теплопроводности и диффузии:

$$
\begin{gathered}
\rho_{w0}^{0} c_w \frac{\partial T_w}{\partial t} = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_w r^2 \frac{\partial T_w}{\partial r}\right), \\
(0 < r < a_0), \\
\rho_{m0}^{0} c_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_m r^2 \frac{\partial T_m}{\partial r}\right) + \frac{\partial p}{\partial t}, \\
\frac{\partial k}{\partial t} = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r}\left(D r^2 \frac{\partial k}{\partial r}\right), \\
(a_0 < r < a_0 \alpha_{w0}^{-1/3})
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь T_w, T_m —температура воды и метана; k — массовая концентрация пара в метане; λ_w, λ_m — коэффициент теплопроводности воды и метана; D — коэффициент диффузии; c_w и c_m — теплоемкость воды и метана при постоянном давлении. Возмущение температуры и массовой концентрации пара зависят (помимо t и x) также от микрокоординаты r, которая выражает расстояние от центра капелек. Оценка показывает, что вклад термодиффузии не существенен.

Уравнения (1) необходимо дополнить системой граничных условий:

$$
\begin{gathered}
T_m = T_w = T_\sigma, \quad \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial r} - \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial r} = jL, \\
\rho_{w0}^{0} \frac{\partial a}{\partial t} = \rho_{m0}^{0} \frac{D}{1-k_0} \frac{\partial k}{\partial r} = -j \quad (r = a_0), \\
\frac{\partial T_w}{\partial r} = 0 \quad (r = 0), \\
\frac{\partial T_m}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial r} = 0 \quad (r = a_0 \alpha_{w0}^{-1/3}).
\end{gathered}
$$

Здесь последние два граничных условия выражают условие отсутствия теплообмена (адиабатичность) и массообмена между ячейками [18], приходящимися к соседним капелькам.

Уравнение состояния метана, представляющего парогазовую смесь, примем как

$$
p = \rho_m^0 T_m B_m, \quad B_m = B_v k + B_g (1-k),
$$

где B_v, B_g — приведенные газовые постоянные для пара и газа.

Кроме того, для параметров парового компонента на поверхности раздела двух фаз запишем уравнение Клапейрона–Клаузиуса

$$
\frac{dp_{vm}}{dT_\sigma} = \frac{\rho_{vm} L}{T_\sigma},
$$

где L — удельная теплота парообразования воды.

Из уравнения теплопроводности пара (второе уравнение в (1)), в предположении однородности давления в пределах сферической ячейки с радиусом $a_0 \alpha_{w0}^{-1/3}$ может быть получено уравнение для изменения давления

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{p_0}{\rho_{m0}^0} \frac{\partial \rho_m^0}{\partial t} - \frac{\alpha_{w0}}{\alpha_{m0}} \frac{\gamma - 1}{a_0} \lambda_m \left(\frac{\partial T_m}{\partial r}\right)_{a_0} \\
\left(\gamma = \frac{c_m}{(c_m - R_{m0})}, \; R_{m0} = B_v k_0 + B_g (1-k_0)\right),
\end{gathered} \tag{2}
$$

где γ — газовая постоянная.

Решения этих уравнений на участке образования гидрата ($x = 0$) должны быть согласованы условиями равенства давлений и равенством потоков среды. Эти условия можно записать следующим образом:

$$
p^{(1)}\Big|_{x=0} = p^{(2)}\Big|_{x=0}. \tag{3}
$$

Второе условие, следующее из закона сохранения масс, имеет вид:

$$
\begin{gathered}
S v^{(1)}\Big|_{x=0} = S' v^{(2)}\Big|_{x=0}, \\
S = \pi R^2, \qquad S' = \pi (R - \Delta)^2.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Здесь верхними индексами (1) и (2) снабжены возмущения давления p и скорости v соответственно на участках $-l < x < 0$, $0 < x < \infty$.

3. Дисперсионные уравнения

Решение вышеприведенной системы ищем в виде затухающей бегущей волны:

$$
\begin{gathered}
(p, v, a, n) = \\
= A_{(p)}, A_{(v)}, A_{(a)}, A_{(n)} \exp\left[i(Kx - \omega t)\right], \\
T = A_{(T)}(r) \exp\left[i(Kx - \omega t)\right], \\
k = A_{(k)}(r) \exp\left[i(Kx - \omega t)\right] \\
\Big(K = \mathrm{Re}(K) + i\,\mathrm{Im}(K), \\
C_p = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(K)}, \quad \delta = \mathrm{Im}(K)\Big),
\end{gathered} \tag{5}
$$

где K — волновой вектор; C_p и δ — фазовая скорость и коэффициент затухания.

Из условия существования решения вида (5)

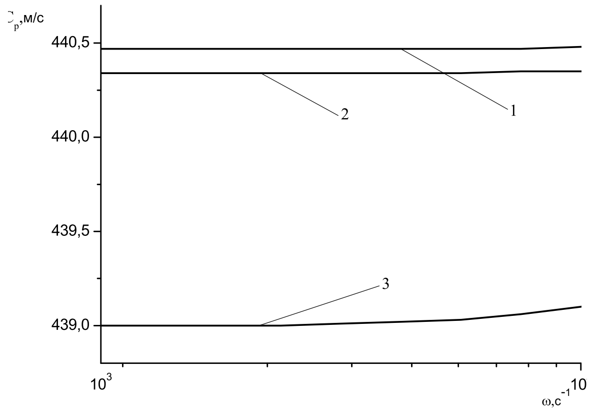


Рис. 2. Фазовая скорость в зависимости от частоты для трубопровода $2R = 0.22$ м при различных значениях объемного содержания капелек: 1, 2, 3 — $\alpha_{w0} = 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}$

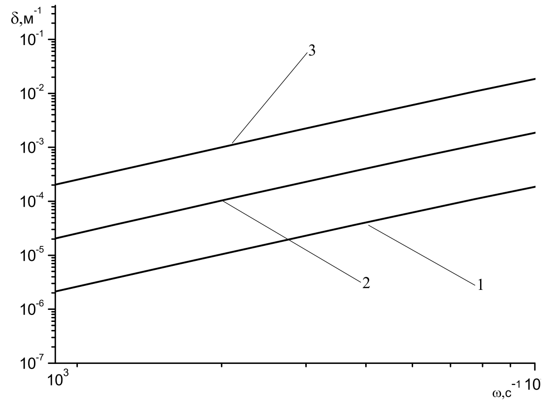


Рис. 3. Коэффициент затухания в зависимости от частоты для трубопровода $2R = 0.22$ м при различных значениях объемного содержания капелек: 1, 2, 3 — $\alpha_{w0} = 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}$

следует дисперсионное уравнение

$$\begin{gathered}
\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{\rho_0 + i\omega\rho_{m0}t_v}{p_0(1 - i\omega\alpha_{m0})}\left(\frac{\alpha_{m0}}{\gamma} + \frac{\alpha_{w0}}{Q}\right), \\
\rho_0 = \rho_{m0} + \rho_{w0}, \quad Q = E/F, \\
E = H_v H_g\big(\eta \mathrm{kh}(y_w) + \mathrm{sh}(y_m)\big) + \\
+\frac{k_0}{1-k_0}\frac{\mathrm{sh}\, v(z)}{\chi^2(1-\gamma^{-1})}, \\
F = (1-\gamma^{-1})H_v H_g \eta \mathrm{kh}(y_w)\,\mathrm{sh}(y_m) + \\
+\frac{k_0}{1-k_0}\,\mathrm{sh}\, v(z)\big[(\chi^{-1} - H_v)(\chi^{-1} - 1) + \\
+H_v\eta \mathrm{kh}(y_w)\big], \\
\mathrm{kh}(x) = 3(x\,\mathrm{cth}(x) - 1)x^{-2}, \\
\mathrm{sh}\, v(x) = 3\left(1 + x\frac{A_0 x\,\mathrm{th}(x(A_0-1)) - 1}{A_0 x - \mathrm{th}(x(A_0-1))}\right)x^{-2},
\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$y_{m,w} = \left(\frac{-i\omega a_0^2}{\nu_{m,w}^{(T)}}\right)^{1/2}, \quad \nu_{m,w}^{(T)} = \frac{\lambda_{m,w}}{\rho_{m0,w0}^0 c_{m,w}},$$

$$z = \left(\frac{-i\omega a_0^2}{D}\right)^{1/2}, \quad \eta = \frac{\rho_{w0}^0 c_w}{\rho_{m0}^0 c_m},$$

$$\chi = \frac{c_{m0}T_0}{L}, \quad H_{v,g} = \frac{B_{v,g}}{B_0}.$$

Дисперсионное уравнение написано с учетом пренебрежения величин порядка $\tilde{\rho} = \rho_{m0}^0/\rho_{w0}^0$ по сравнению с единицей.

В рамках принятых допущений равновесные массовые содержания пара в метане k_0 и температура T_0 связаны соотношением

$$P_*(T_0) = \frac{p_0 k_0}{k_0 + (1-k_0)B_g/B_v},$$

где $P_*(T_0)$ — парциальное давление насыщенных паров воды при температуре T_0.

На основе дисперсионного уравнения (6) были проведены численные расчеты. В расчетах использовались следующие физические параметры: $p_0 = 3.2$ МПа, $T_0 = 280$ К, $\rho_{m0}^0 = 21$ кг/м^3, $\rho_{w0}^0 = 10^3$ кг/м^3, $c_w = 4.2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $c_m = 2.3 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $D = 0.2 \cdot 10^{-4}$ м^2/с. На рис. 2 и 3 представлены зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты для различных значений объемного содержания капелек α_{w0}. Линии 1–3 соответствуют различным значениям объемного содержания капелек в смеси.

Из графика на рис. 2 видно, что фазовая скорость остается постоянной в рассматриваемом диапазоне частот для каждого значения α_{w0}.

Из рис. 3 видно, что при увеличении объемного содержания коэффициент затухания возрастает. При частоте $\omega = 5 \cdot 10^3$ с$^{-1}$ затухание волны в e раз происходит на расстоянии 20; 2; 0.2 км соответственно.

4. Коэффициенты отражения и прохождения

Пусть в трубопроводе на плоскую границу между газокапельной смесью и гидратом падает волна, часть отражается, часть проходит дальше. Будем полагать, что рассматриваемые волны представляют плоские гармонические волны.

На основе условий (3)–(4) при $x = 0$ для коэффициентов отражения и прохождения гармонических волн, определенных как $N = A_p^{(R)}/A_p^{(O)}$ и $M = A_p^{(G)}/A_p^{(O)}$, получим [19] :

$$M = \frac{2S}{(S+S')}, \quad N = M - 1.$$

5. Эволюция импульсных сигналов

Пусть через левую границу трубопровода ($x = -l$) запускается сигнал конечной длительности $p = \tilde{p}^{(0)}(t)$. Тогда, используя преобразование Фурье, для дошедшего до отражающей границы $x = 0$ сигнала можем записать

$$p^{(O)}(0,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{p}^{(0)}(\tau)\exp\left(iK(\omega)l\right)\times \\ \times\exp\left[i\omega(t-\tau)\right]d\omega\, d\tau.$$

Аналогичные соотношения можно записать для сигнала, отраженного от границы и прошедшего через границу:

$$p^{(R)}(0,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{p}^{(0)}(\tau)N(\omega)\exp\left[i\omega(t-\tau)\right]d\omega\, d\tau,$$
$$p^{(G)}(0,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{p}^{(0)}(\tau)M(\omega)\exp\left[i\omega(t-\tau)\right]d\omega\, d\tau.$$

В качестве исходного сигнала возьмем давление колоколообразной формы с амплитудой Δp_0:

$$\tilde{p}^{(0)}(t) = \Delta p_0 \exp\left(-\left(-\frac{t-t_0}{\Delta t/6}\right)^2\right).$$

На рис. 4 приведены расчетные осциллограммы, иллюстрирующие эволюцию импульса давления в трубопроводе радиуса $2R = 0.22$ м, заполненном газокапельной смесью. Осциллограммы 1, 2 и 3 соответствуют показаниям датчиков D_1, D_2 и D_3 расположенных на близком расстоянии от точки запуска сигнала, вблизи гидратного образования. Исходный импульс представляет собой импульс давления колоколообразной формы с единичной амплитудой. Временная протяженность его равна $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ с. Первый всплеск в осциллограмме датчика D_1 на рис. 4 выражает исходный сигнал, запущенный с расстояния $l = 2000$ м. Исходный импульс (первый всплеск в осциллограмме датчика D_2) достигает гидратной пробки с меньшей амплитудой из-за проявления тепловой и вязкостной диссипации в газокапельной среде. В осциллограмме датчика D_2 вторые всплески соответствуют толщине гидратного слоя $\Delta = 0.02$, 0.05 м.

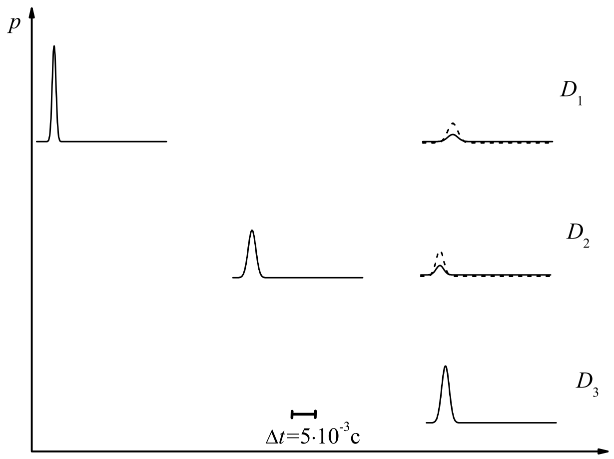


Рис. 4. Эволюция импульсного сигнала в трубопроводе протяженностью $l = 2000$ м, радиуса $2R = 0.22$ м, сплошные и пунктирные линии при толщине гидратного слоя: $\Delta = 0.02; 0.05$ м

Прошедший через границу $x = 0$ импульс фиксируется датчиком D_3. Второй всплеск на D_1 показывает возвратившийся отраженный от суженного участка импульс.

6. Заключение

Анализ полученных результатов при исследовании эволюции гармонических волн в трубопроводе с газокапельной смесью (газовая составляющая — метан) показывает возможность обнаружения местоположения гидратного слоя на стенке для дальнейшего определения толщины слоя.

Список литературы

[1] Biot M.A. Propogation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid // J. Appl. Phys. 1952. Vol. 23, No 9. Pp. 497–509.
DOI: 10.1063/1.1702365

[2] Шагапов В.Ш. О распространении малых возмущений в парогазокапельной системе // Теплофизика высоких температур. 1987. Т. 25, № 6. С. 1148–1154.
http://mi.mathnet.ru/tvt4833

[3] Губайдуллин Д.А., Ивандаев А. И. Скорость и затухание звука в парогазокапельных системах. Роль тепло- и массообменных процессов // ПМТФ.1987. № 3. С. 115–123.
http://sibran.ru/journals/issue.php?ID=148583&ARTICLE_ID=148641

[4] Губайдуллин Д.А., Ивандаев А. И. Динамика импульсных волн малой амплитуды в парогазокапельных системах // ПМТФ. 1991. № 2. С. 106–113.
http://sibran.ru/journals/issue.php?ID=119935&ARTICLE_ID=133821

[5] Губайдуллин Д.А. Динамика слабых импульсных возмущений в полидисперсных смесях газа с паром и каплями жидкости // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36, № 6. С. 944–949.
http://mi.mathnet.ru/tvt2674

[6] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности преломления и отражения звука на границе пузырьковой жидкости // Акустический журнал. 2015. Т. 61, № 1. С. 40–48.
DOI: 10.7868/S032079191406015X

[7] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности отражения и преломления акустических волн на границе раздела между газом и дисперсной системой // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 5 (333). С. 119–129.
DOI: 10.15372/PMTF20150510

[8] Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г. Моделирование процесса отложения парафина при течении газонефтяной смеси в трубах // Инженерно-физический журнал. 1999. Т. 72, № 4. С. 771–774.
https://www.itmo.by/jepter/721999r/720771.html

[9] Шагапов В.Ш., Уразов Р.Р., Мусакаев Н.Г. Математическое моделирование течения углеводородного газа в трубопроводе с учетом гидратообразования на внутренних стенках трубы // Вестник УГАТУ. 2011. Т. 15, № 4. С. 164–168.
http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/823/685

[10] Мусакаев Н.Г., Уразов Р.Р., Шагапов В.Ш. Динамика образования гидратов при транспортировке природного газа // Теплофизика и аэромеханика. 2006. Т. 13, № 2. С. 295–302.
https://www.sibran.ru/upload/iblock/ee1/ee1d32c52e660d90e71ace667b6b4447.pdf

[11] Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г., Уразов Р.Р. Математическая модель течения природного газа в трубопроводах с учетом диссоциации газогидратов // Инженерно-физический журнал. 2008. Т. 81, №2. С. 271–279.
https://www.itmo.by/jepter/812008r/8120271.html

[12] Nigmatulin R. I., Gubaydullin A. A. and Shagapov V. Sh. Numerical Investigation of Shock and Thermal Waves in Porous Saturated Medium with Phase Transitions // Porous Media: Physics, Models, Simulation (World Scientific Publishing). 2000. Pp. 3–31.
DOI: 10.1142/9789812817617_0001

[13] Галиакбарова Э.В., Галиакбаров В.Ф., Каримов М.С. Теоретические аспекты для организации мониторинга давления в газопроводной системе для поддержания пожарной и промышленной безопасности // Нефтегазовое дело: науч.-техн. журн. / УГНТУ. 2014. Т. 12, № 3. С. 140–146.
http://ngdelo.ru/files/old_ngdelo/2014/3/ngdelo-3-2014-p140-145.pdf

[14] Галиакбарова Э.В., Бахтизин Р.Н., Галиакбаров В.Ф., Ковшов В.Д., Хакимова З.Р. Использование энергии потоков для диагностики магистральных газопроводов с использованием интеллектуальной системы контроля // Нефтегазовое дело: науч.-техн. журн. 2016. Т. 15, № 2. С. 104–113.
http://ngdelo.ru/files/ngdelo/2016/2/ngdelo-2-2016-p104-113.pdf

[15] Галиакбаров В.Ф., Ковшов В.Д., Галиакбарова Э.В., Нагаева З.М. Построение интеллектуальной системы обнаружения несанкционированных скачков давления в магистральных трубопроводах для поддержания промышленной и пожарной безопасности // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефтепродуктов. 2015. № 2. С. 188–195.
http://ntj-oil.ru/article/view/1986

[16] Галиакбаров В.Ф., Гольянов А.А.; Коробков Г.Е. Способ определения места утечки жидкости из трубопровода. Патент № 2197679 РФ, F17D5/02. Опубл. 27.01.2003. Бюл. № 3.
https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2197679&TypeFile=html

[17] Галиакбаров В.Ф., Галиакбарова Э.В., Ковшов В.Д., Аминев Ф.М., Хакимова З.Р. Система контроля состояния трубопровода. Патент № 2606719 РФ, F17D05/00. Опубл. 10.01.2017, Бюл. № 1.
https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2606719&TypeFile=html

[18] Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.: ГЭОТАР–Медиа, 2014. 640 с.

[19] Исакович М.А. Общая акустика.М.: Наука, 1973. 496 с.

ISSN 2658–5782 14 (2019), 2, 157–164

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.2.022
DOI: 10.21662/mfs2019.2.022

Received: 22.11.2019
Accepted: 24.12.2019

To the theory of determining the location of hydrate deposits in gas pipelines by acoustic sounding

Shagapov V.Sh.*, **Galiakbarova E.V.****, **Khakimova Z.R.****

*Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa
**Ufa State Petroleum Technological University, Ufa

Evolution of pressure perturbations propagating in pipeline filled with gas-and-drop medium representing “”wet“” methane at temperature below dew point and having damaged section, in form of extended narrowing of channel due to hydrate plug, is investigated. Hydrate formation is due to the presence of water (or its vapours) and gas, the components of which dissolve in water under certain conditions form a solid phase. Hydrate deposits help to reduce the cross-country capacity of gas pipelines and therefore their detection is a pressing task. It is proposed to solve the problem using acoustic methods. For this purpose mathematical model of propagation of acoustic waves in long-wave range in gas-and-droplet medium is considered. The horizontal pipeline appears semi-pointed, the solution is sought in the form of a harmonic wave. Wave - one-dimensional, having small amplitude of oscillations. Based on dispersion equations, dependence of phase velocity and attenuation coefficient on frequency of acoustic wave disturbance and on volume content of suspended phase (water droplets) are built. In the high frequency region, the attenuation coefficient increases with the volume content. The formulas for reflection and passage coefficients are derived taking into account pipeline narrowing due to hydrate deposits. The results of numerical calculations illustrating the dynamics of pulse signals depending on the thickness of the gas hydrate on the inner wall of the pipeline are presented. Calculations are based on forward and backward Fourier transformations and the use of software. It is established that the greater the hydrate deposit on the wall in thickness, the greater the amplitude of the returned reflected signal.

Keywords: gas-and-drop mixture, hydrate deposit, pressure impulses

References

[1] Biot M.A. Propogation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid // J. Appl. Phys. 1952. Vol. 23, No 9. Pp. 497–509. DOI: 10.1063/1.1702365

[2] Shagapov V.Sh. Propagation of small perturbations in a vapor gas droplet medium // High Temperature. 1987. Vol. 25, № 6. Pp. 843–849. http://mi.mathnet.ru/tvt4833

[3] Gubaidullin D.A., Ivandaev A.I. Speed and attenuation of sound in gas-vapor-liquid systems. Role of heat and mass exchange //Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1987. Vol. 28, № 3. Pp. 423—430. DOI: 10.1007/BF00910630

[4] Gubaidullin D.A., Ivandaev A.I. Dynamics of low-amplitude pulse waves in vapor-gas-drop systems // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1991. Vol. 32, № 2. Pp. 240–247. https://doi.org/10.1007/BF00858043

[5] Gubaidullin D.A. The dynamics of small impulsive disturbances in polydisperse mixtures of gas with vapor and liquid droplets // High Temperature. 1998. Vol. 36, № 6. Pp. 920–925. http://pleiades.online/cgi-perl/search.pl?type=abstract&name=hightemp&number=6&year=98&page=920

[6] Shagapov V.S., Sarapulova V.V. Refraction and reflection of sound at the boundary of a bubbly liquid // Acoustical Physics. 2015. Vol. 61, № 1. Pp. 37–44. DOI: 10.1134/S1063771014060153

[7] Shagapov V.S., Sarapulova V.V. Reflection and refraction of acoustic waves at the interface between a gas and a disperse systems // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56, № 5. Pp. 838–847. DOI: 10.1134/S0021894415050107

[8] Shagapov V.Sh., Musakaev N.G. Modeling of Paraffin Deposition in Flow of a Gas-Oil Mixture in Tubes // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 1999. Vol. 72, No. 4. Pp. 744–747. DOI: 10.1007/BF02699285

[9] Shagapov V.Sh., Urazov R.R., Musakaev N.G. [The mathematical modeling of hydrocarbon gas flow in a pipeline, taking into account formation of gas hydrates on inner walls of the pipe]. Vestnik UGATU[Vestnik USATU]. 2011. V. 15, № 4(44). Pp. 164–168 (in Russian). http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/823/685

[10] Musakaev N.G., Urazov R.R., Shagapov V.Sh. Hydrate formation kinetics in piped natural-gas flows // Thermophysics and Aeromechanics. 2006. V. 13, No. 2. Pp. 275–281.
DOI: 10.1134/S0869864306020090

[11] Shagapov V.Sh., Musakaev N.G. and Urazov R.R. Mathematical model of natural gas flow in pipelines with allowance for the dissociation of gas hydrates // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2008. Vol. 81, No. 2. Pp. 287–296.
DOI: 10.1007/s10891-008-0036-1

[12] Nigmatulin R.I., Gubaydullin A.A. and Shagapov V.Sh. Numerical Investigation of Shock and Thermal Waves in Porous Saturated Medium with Phase Transitions // Porous Media: Physics, Models, Simulation (World Scientific Publishing). 2000. Pp. 3–31.
DOI: 10.1142/9789812817617_0001

[13] Galiakbarova E.V., Galiakbarov V.F., Karimov M.S. [Theoretical aspects for the organization of monitoring of pressure in the gas pipeline system for maintaining of the fire and production safety]. Neftegazovoe delo: nauchno–tekhnicheskij zhurnal / UGNTU [Oil and gas business. Ufa: USPTU]. 2014. Vol. 12, No. 3. Pp. 140–146 (in Russian).
http://ngdelo.ru/files/old_ngdelo/2014/3/ngdelo-3-2014-p140-145.pdf

[14] Galiakbarova E.V., Bakhtizin R.N. Galiakbarov V.F., Kovshov V.D., Khakimova Z.R. [Use of energy of streams for diagnostics of the main gas pipelines with use of the intelligent control system] Neftegazovoe delo: nauchno–tekhnicheskij zhurnal / UGNTU [Oil and gas business. Ufa: USPTU]. 2016. Vol. 15, No. 2. Pp. 104–113 (in Russian).
http://ngdelo.ru/files/ngdelo/2016/2/ngdelo-2-2016-p104-113.pdf

[15] Galiakbarov V.F., Kovshov V.D., Galiakbarova E.V., Nagaeva Z.M. [Development of intelligent system of pressure drop detection in the main pipelines aimed to maintain industrial and fire safety]. Problemy sbora, podgotovki i transporta nefteproduktov: nauchno – tekhnicheskij zhurnal [Problems of collecting, preparation and transport of oil products: Scientific technical journal]. 2015. No. 2(100). Pp. 188–195 (in Russian).
http://ntj-oil.ru/article/view/1986

[16] Galiakbarov V.F.,Gil'yanov A.A.,Korobkov G.E. [Way of definition of the leak of liquid from the pipeline] Sposob opredeleniya mesta utechki zhidkosti iz truboprovoda. Patent No. 2197679 C2 RF, F17D5/02, publ. 27.01.2003. byul. No. 3 (in Russian)
https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2197679&TypeFile=html

[17] Galiakbarov V.F., Galiakbarova E.V., Kovshov V.D., Aminev F.M., Khakimova Z.R. [Control system of a condition of the pipeline] Sistema kontrolya sostoyaniya truboprovoda. Patent No. 2606719 C1 RF, F17D5/00, publ.10.01.2017, byul. No. 1 (in Russian).
https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2606719&TypeFile=html

[18] Nigmatulin R.I. [Solid medium mechanics. Kinematics. Dynamics. Thermodynamics. Statistical dynamics] Mekhanika sploshnoj sredy. Kinematika. Dinamika. Termodinamika. Statisticheskaya dinamika. M: GEOTAR–Media, 2014. Pp. 640 (in Russian).

[19] Isakovich M.A. [General Acoustics] Obshchaya akustika. M: Nauka, 1973. Pp. 496 (in Russian).

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 3, с. 165–175

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.023
DOI: 10.21662/mfs2019.3.023
УДК 532.529

Получена: 15.11.2019
Принята: 25.12.2019

Влияние диффузии на акустические свойства пузырьковой жидкости[1]

Агишева У.О.*, **Вдовенко И.И.****, **Галимзянов М.Н.***

* Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа
**Бирский филиал Башкирского Государственного Университета, Бирск

Проблемы распространения волн в пузырьковых средах представляют большой интерес для исследователей на протяжении почти полувека в связи с широким распространением этих систем в природе и их интенсивным использованием в современных технологиях. Из литературы известно, что интенсивность затухания звуковых возмущений в рассматриваемых газожидкостных средах в основном определяется теплофизическими характеристиками газа, находящегося в пузырьках. Оказывается, что эти эффекты значительно усиливаются с ростом концентрации пара, обусловленным повышением температуры системы. В литературе имеется большое количество публикаций, в которых рассматривались различные постановки волнового воздействия на пузырьковые среды. В настоящей работе рассмотрено в плоскоодномерном и односкоростном приближении распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками, заполненными паром и нерастворимым в жидкой фазе газом. Интенсивность испарения жидкости (конденсации) внутри пузырька определялась из условия теплового баланса. Для учета межфазного тепломассообмена использованы уравнения теплопроводности и диффузии внутри пузырька и уравнение теплопроводности в жидкости вокруг пузырька. Из условия существования решения в виде затухающей бегущей волны с учетом эффектов акустической разгрузки пузырьков выписано дисперсионное уравнение. Из условия существования решения в виде затухающей бегущей волны с учетом эффектов акустической разгрузки пузырьков получено дисперсионное уравнение. На основе дисперсионного уравнения выписаны соотношения для равновесной скорости звука в зависимости от теплофизических параметров среды и проведены численные расчеты для воды с парогазовыми пузырьками. Исследованы особенности отражения гармонических волн от границы раздела «чистой» жидкости и жидкости с парогазовыми пузырьками. Изучено влияние частоты возмущений и температуры среды на коэффициент затухания акустической волны. Численный анализ на основе полученного дисперсионного уравнения показал аномальное снижение фазовой скорости и коэффициента затухания при приближении температуры к значению, для которой величина массы газовых зародышей является критической.

Ключевые слова: акустическая волна, перегретая жидкость, пузырьки, дисперсионный анализ, фазовая скорость, коэффициент затухания, диффузия

1. Введение

Из литературы известно, что физико-химические свойства жидкостей в метастабильном состоянии в основном определяются наличием в их составе различных включений, например, газовых пузырьков или твердых частиц [1, 2]. Отметим некоторые статьи, в которых исследуется распространение волн в пузырьковых средах. В работах [3–6] рассмотрено стационарное течение пузырьковой газожидкостной смеси в соплах кругового сечения. Проанализирована возможность реализации супервысоких температур и давлений в газовой фазе на участке сопла вблизи минимального сечения. Изучено влияние на

[1]Работа авторов поддержана средствами государственного бюджета по государственному заданию на 2019–2022 годы (№ 0246-2019-0052).

картину течения начального радиуса и объемного содержания пузырьков, определяющих состав и объемный расход жидкости, подаваемой в сопло.

В следующих работах представлены разработанные модели газожидкостной смеси для исследования волн давления с амплитудой ударной волны от 2 до 100 МПа [7–10] и сильных ударных волн с амплитудами от 100 МПа до 100 ГПа [11–14] в пузырьковых средах.

Случай «косого» падения акустического сигнала на границу раздела между парогазокапельной средой и воздухом рассмотрен в [15]. На основе расчетов, проведенных авторами, показано, что в случае падения волны на границу раздела со стороны парогазокапельной смеси существует критический угол падения, при котором волна полностью отражается. Для «холодной» жидкости, когда в пузырьках присутствует только газ, задача об отражении и прохождении волн на границе пузырьковой и «чистой» жидкостей изучена в [16]. Исследования позволили определить значения критических углов падения, при которых также возможно полное отражение волны от границы раздела.

В работах [17–19] были рассмотрены случаи распространения начального локализованного по поперечной координате волнового импульса в однородной пузырьковой смеси и в кусочно-неоднородной по объемному содержанию пузырьков области, находящейся между двумя плоскопараллельными стенками. При исследовании воздействия на пузырьковую жидкость плоским ударником с параболическим профилем по поперечной координате установлено, что за счет двумерных эффектов происходит фокусировка волны вдоль линии симметрии [17]. В случае смеси с неоднородным распределением объемного содержания газа распространение импульсного сигнала в кусочно-неоднородной по объемному содержанию пузырьков области сопровождается образованием в поперечном направлении профилей давления с пиками вблизи границ между слоями, что обусловлено различием скорости волны в слоях с отличающимися объемными содержаниями газа [18, 19].

В работах [20–22] исследовались вопросы роста паровых пузырьков в перегретой жидкости и проблемы ее устойчивости.

В обзорной работе [23] рассмотрены проблемы и особенности изучения течений сплошной среды, содержащей дисперсную примесь в виде твердых частиц, капель или пузырей. Приведены основные характеристики двухфазных течений и методы их моделирования.

В [24–26] построены и проанализированы карты зон устойчивости рассмотренных систем в зависимости от степени перегрева жидкости на плоскости «объемное содержание–радиус пузырьков» с повышением равновесного давления от 0.1 до 10 МПа. Исследованы влияние начального перегрева (от сотых долей до одного градуса) и повышения давления на дисперсию гармонических волн, а также зависимость инкремента от радиуса пузырьков для неустойчивых систем.

Настоящая работа является продолжением исследований, представленных в [27–30]. В статье анализируется влияние равновесной температуры, степени диспергированности объемного содержания пузырьковой фазы и диффузии на динамику отражения и прохождения акустической волны при падении на границу раздела пузырьковой и «чистой» жидкостей.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть в жидкости, находящейся при температуре T_0 и под давлением p_0, имеются сферические пузырьки радиусом a_0, которые содержат пар и нерастворимый в жидкой фазе газ. Тогда, при условии механического и теплового равновесия системы «жидкость–парогазовые пузырьки», находящейся в состоянии, далеком от критического, имеют место соотношения:

$$p_{\mathrm{v}0} + p_{\mathrm{air}0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad p_{\mathrm{v}0} = p_{\mathrm{eq}}(T_0), \qquad (1)$$

где нижние индексы «v» и «air» относятся к пару и воздуху соответственно, а «eq» — равновесное состояние.

Согласно второму уравнению парциальное давление пара $p_{\mathrm{v}0}$ равно его равновесному давлению при температуре жидкости T_0 в случае плоской межфазной поверхности. Если состояние жидкости достаточно далеко от критического, то это условие всегда выполняется [2]. Рассмотрим распространение малых возмущений в рассматриваемой системе в плоскоодномерном и односкоростном приближении в предположении, что жидкость является акустически сжимаемой.

Поставленная задача в полной постановке описывается уравнениями (1)–(11) из [27], основная методика расчета приведена там же. Далее везде используются терминология и обозначения, принятые в [27].

В настоящей статье рассмотрим случай отсутствия диффузии. Решение будем искать в виде бегущей волны:

$$p_{\mathrm{liq}}, \quad p_{\mathrm{g}}, \quad \upsilon, \quad a \sim \exp[i(Kx - \omega t)],$$
$$T_{\mathrm{g}}' = T_{\mathrm{g}}(r)\exp[i(Kx - \omega t)],$$

$$T'_{\text{liq}} = T_{\text{liq}}(r)\exp[i(Kx-\omega t)],$$
$$k' = k(r)\exp[i(Kx-\omega t)],$$
$$\left(K = k + i\delta, \quad C_p = \omega/k, \quad i = \sqrt{-1}\right).$$

где K — волновой вектор; δ и C_p — соответственно коэффициент затухания и фазовая скорость волны. Из условия существования решения такого вида с учетом эффектов акустической разгрузки [31] пузырьков получим дисперсионное уравнение

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{(1-\alpha_{g0})^2}{C_{\text{liq}}^2} + 3\frac{\rho^0_{\text{liq}0}\alpha_{g0}(1-\alpha_{g0})}{\psi}, \tag{2}$$

где

$$\psi = \frac{3\gamma p_{g0}}{Q} - \frac{\rho^0_{\text{liq}0}\omega^2 a_0^2}{\xi} - 4i\rho^0_{\text{liq}0}\nu^{(\mu)}_{\text{liq}}\omega - \frac{2\sigma}{a_0},$$
$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \xi = 1 - i\omega t_A, \quad t_A = \frac{a_0}{\sqrt[3]{\alpha_{g0}}C_{\text{liq}}},$$
$$Q = 1 + \left(\frac{\gamma-1}{k_0}H_{\text{air}}\text{kh}(y_g) + \frac{\gamma}{1-k_0}H_{\text{v}}\text{kh}(z)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{H_{\text{air}}}{k_0} + \frac{\gamma\,\text{kh}(z)}{(1-k_0)\beta\,\text{sh}\upsilon(y_{\text{liq}})}\right)^{-1},$$
$$\text{kh}(x) = 3(x\,\text{cth}x - 1)x^{-2},$$
$$\text{sh}\,\upsilon(x) = 3(1 + x(A_0x\,\text{th}\,(x(A_0-1)) - 1)\times$$
$$\times(A_0x - \text{th}\,(x(A_0-1)))^{-1})x^{-2}$$

или

$$\text{sh}\,\upsilon(x) = 3(1+x)x^{-2},$$
$$A_0 = \alpha_{g0}^{-1/3}, \quad y_{\text{liq}} = \sqrt{-\frac{i\omega a_0^2}{\nu^{(T)}_{\text{liq}}}}, \quad z = \sqrt{-\frac{i\omega a_0^2}{D}},$$
$$\beta = (\gamma-1)\eta H_{\text{v}}\chi^2, \quad \eta = \frac{\rho^0_{\text{liq}0}c_{\text{liq}}}{\rho^0_{g0}c_g}, \quad \chi = \frac{c_g T_0}{L},$$
$$H_{\text{v}} = \frac{B_{\text{v}}}{B_0}, \quad H_{\text{air}} = \frac{B_{\text{air}}}{B_0}, \quad H = H_{\text{v}} - H_{\text{air}}.$$

Вывод уравнения (2) приведен в [27].

Пренебрегая сжимаемостью жидкости ($C_p \to \infty$) из дисперсионного уравнения (2) при $\omega \to 0$ следует формула для равновесной скорости звука:

$$C_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{p_{g0}((1-k_0)H_{\text{air}} + k_0\alpha_{g0}\gamma/\beta)}{\rho^0_{\text{liq}0}\alpha_{g0}} - \frac{2}{3}\frac{\sigma}{a_0\rho^0_{\text{liq}0}\alpha_{g0}}}, \tag{3}$$

которая обобщает известные формулы Мэллока [32] и Ландау [33]. В точке кипения $T_0 = T_{\text{eq}}(p_0)$, отсюда, с учетом выражения (3), имеем:

$$C_{\text{eq}} = \sqrt{k_0\left(\frac{\rho^0_{g0}}{\rho^0_{\text{liq}0}}\right)^2\left(\frac{B_0}{B_{\text{v}}}\right)^2\frac{L^2}{C_{\text{liq}}T_0} + \frac{4}{3}\frac{\sigma}{a_0\rho^0_{\text{liq}0}\alpha_{g0}}}.$$

Отметим, что при выводе (3) не учитывалась сжимаемость жидкости и опускался параметр α_{g0}, много меньший по сравнению с единицей. Для частного случая ($2\sigma/a_0p_0 \ll 1$) при $k_0 = 0$ и $k_0 = 1$ (3) справедливы формулы Мэллока [32] и Ландау [33]:

$$C_M = \sqrt{\frac{p_0}{\rho^0_{\text{liq}0}\alpha_{g0}}} \quad \text{и} \quad C_L = \frac{\rho^0_{g0}}{\rho^0_{\text{liq}0}}\frac{L}{\sqrt{c_{\text{liq}}T_0}}.$$

3. О равновесном радиусе

Из (3) при выполнении условий $\alpha_{g0}, C_L^2/C_{\text{eq}}^2, \left(\rho^0_{g0}/\rho^0_{\text{liq}0}\right)\left(L/c_{\text{liq}}T_0\right) \ll 1$ можно получить следующую формулу для равновесной скорости звука:

$$C_{\text{eq}} = \sqrt{C_L^2 + (p_{g0} - 2\sigma/3a_0)/\rho^0_{\text{liq}0}\alpha_{g0}}. \tag{4}$$

Отсюда видно, что система «жидкость–парогазовые пузырьки» термодинамически устойчива [34] $\left(C_{\text{liq}}^2 > 0\right)$, если

$$p_{g0} \geqslant \frac{2\sigma}{3a_0} - \rho^0_{\text{eq}}\alpha_{g0}C_{\text{liq}}^2. \tag{5}$$

Отметим, что одиночный парогазовый зародыш в неограниченном объеме жидкости будет устойчивым [35], если

$$p_{g0} \geqslant \frac{2\sigma}{3a_0}. \tag{6}$$

Следовательно, в случае наличия распределенных по объему зародышей, область значений для парциального давления газа p_{g0} становится несколько шире. Условие (6) является достаточным условием, чтобы жидкость с зародышами нерастворимого газа была термодинамически устойчива.

Из формулы (4) видно, что при

$$p_{g0} \to \frac{2\sigma}{3a_0}$$

равновесная скорость звука приближается к скорости звука Ландау ($C_e \to C_L$) [33].

Условие механического равновесия (1) совместно с (6) дает следующее ограничение для радиуса газовых зародышей:

$$a_0 \leqslant a_{0*} = \frac{4\sigma}{3\left(p_{\text{eq}}(T_0) - p_0\right)}. \tag{7}$$

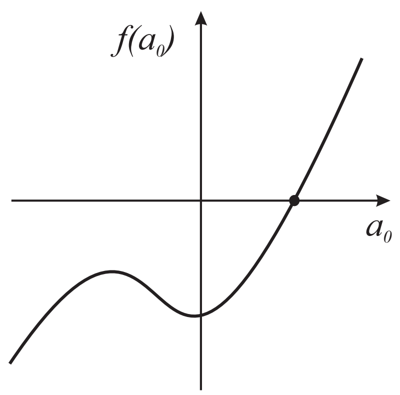


Рис. 1. В случае недогретой жидкости ($p_0 > p_{\text{eq}}(T_0)$) существует единственный равновесный радиус

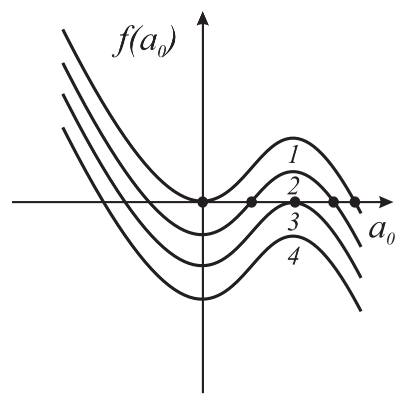


Рис. 2. Равновесные радиусы для случая перегретой жидкости ($p_{\text{eq}}(T_0) > p_0$) зависимости от массы газовых зародышей: 1 – $m_{g0} = 0$, 2 – $0 < m_{g0} < m_{g*}$, 3 – $m_{g0} = m_{g*}$, 4 – $m_{g0} > m_{g*}$

Таким образом, перегретая жидкость с газовыми зародышами будет устойчивой, если их радиусы удовлетворяют неравенству (7).

Используя (2) и (3) из [27] для p_{g0}, можем записать

$$p_{g0} = m_{g0} R_g T_0 \Big/ \left(4\pi a_0^3/3\right).$$

Отсюда, учитывая условие механического равновесия (1), имеем

$$m_{g0} = \frac{(2\sigma/a_0 + p_0 - p_{v0})\left(4\pi a_0^3/3\right)}{R_g T_0}.$$

Это выражение запишем как уравнение для определения равновесного радиуса a_0 в зависимости от массы m_{g0} зародыша:

$$f(a_0) = (p_0 - p_{\text{eq}}(T_0))a_0^3 + 2\sigma a_0^2 - \frac{3}{4\pi} m_{g0} R_g T_0 = 0. \quad (8)$$

Нетрудно заметить, что в случае недогретой жидкости ($p_0 > p_{\text{eq}}(T_0)$) для любого значения массы зародыша m_{g0} уравнение (8) имеет единственный положительный корень a_0. Это связано с тем, что $f(a_0)$ при $0 < a_0 < +\infty$ (рис. 1) монотонно растет от $f(0) = -3/4\pi m_{g0} R_g T_0$ до $+\infty$. Если выполняется условие $p_0 = p_{\text{eq}}(T_0)$, то уравнение (8) также имеет единственный положительный корень:

$$a_0 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}\frac{m_{g0} R_g T_0}{\sigma}}. \quad (9)$$

В случае перегретой жидкости ($p_{\text{eq}}(T_0) > p_0$) уравнение (9) имеет положительные корни только в том случае, когда выполняется условие

$$m_{g0} \leqslant m_{g*} = \frac{128\pi\sigma^3}{81 R_g T_0 \left(p_{\text{eq}}(T_0) - p_0\right)^2}.$$

На рис. 2 схематически представлены графики $f(a_0)$. В зависимости от величины массы газовых зародышей может быть две равновесные величины радиуса (линия 2, $0 < m_{g0} < m_{g*}$), единственный равновесный радиус (линия 3, $m_{g0} = m_{g*}$). В случае $m_{g0} > m_{g*}$ не существует равновесных радиусов (линия 4). Когда газ в зародышах отсутствует (линия 1, $m_{g0} = 0$), равновесные радиусы соответствуют значениям $a_0 = a_0^M$ и $a_0 = 0$.

Таким образом, если масса газовых зародышей меньше критического значения ($m_{g0} < m_{g*}$), то существует два значения радиуса a_{01} и a_{02}, при которых рассматриваемая система может находиться в равновесии. Причем эти значения радиусов удовлетворяют условиям:

$$0 < a_{01} < a_{0*} \quad \text{и} \quad a_{0*} < a_{02} < a_0^{(M)}.$$

Для меньшего значения радиуса a_{01}, поскольку выполняется условие (7), состояние равновесия — устойчивое. Состояние равновесия, соответствующее большему радиусу a_{02}, может быть устойчивым, если соответствующее парциальное давление газа удовлетворяет условию (5). Когда оно не выполняется, то система также неустойчива. Причем с ростом объемного содержания зародышей α_{g0} (или их числа n_0 в единице объема жидкости) тенденция устойчивости возрастает.

На рис. 3 представлена качественная картина зависимости равновесных радиусов, определяемых из уравнения

$$\alpha_{g0} = \frac{4}{3}\pi a_0^3 n_0,$$

от массы газовых зародышей. Нижняя ветвь этой кривой, где радиус меняется в промежутке от нуля

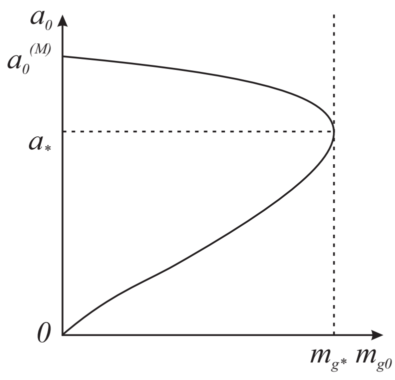


Рис. 3. Качественная картина зависимости равновесных радиусов от массы газового зародыша в перегретой воде

до a_*, всегда соответствует устойчивым состояниям, а для верхней ветви $\left(a_* \leqslant a_0 \leqslant a_0^{(M)}\right)$ состояние может быть устойчивым и неустойчивым. Причем состояние, соответствующее верхней ветви будет устойчивым, как это следует из (5), если объемное содержание пузырьков удовлетворяет условию

$$\alpha_{g0} \geqslant \alpha_{g0}^{(M)} = 2\sigma \Big/ \left(3a_0^{(M)}\rho_{\text{liq}0}^0 C_L^2\right).$$

Если в точности выполняется равенство $p_0 = p_{\text{eq}}(T_0)$, то из условия механического равновесия (1) следует

$$p_{g0} = \frac{2\sigma}{a_0}.$$

Для этого значения условие (6) всегда выполняется и, следовательно, рассматриваемая система будет всегда устойчивой.

Приведем качественное объяснение выше отмеченной неустойчивости одиночных паровых и парогазовых зародышей, когда условие (6) не выполняется. Действительно, давление жидкости $p_{\text{liq}a}$ на межфазной поверхности с давлением газа p_g внутри пузырька связаны как

$$p_{\text{liq}a} = p_g - \frac{2\sigma}{a}, \tag{10}$$

где a — радиус пузырька.

Пусть в условии постоянства давления жидкости ($p_{\text{liq}} = p_{\text{liq}0} = p_0$) радиус пузырька возмущен на величину $a' > 0$ от равновесного значения a_0. Для поведения газа примем политропический закон

$$p_g = p_{g0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma}. \tag{11}$$

Тогда, на основании (10) и (11), для возмущения давления жидкости $p'_{\text{liq}a}$ ($p_{\text{liq}a} = p_0 + p'_{\text{liq}a}$) можем записать

$$p'_{\text{liq}a} = -\left(3\gamma p_{g0} - \frac{2\sigma}{a_0}\right)\frac{a'}{a_0}. \tag{12}$$

Причем

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} \quad \text{и} \quad \gamma \geqslant 1.$$

Тогда, как это следует из (12), при повышении радиуса пузырька ($a' > 0$) происходит снижение давления жидкости на поверхности пузырька ($p'_{\text{liq}a} < 0$), т.е. со стороны жидкости возникает восстанавливающая сила, которая старается вернуть радиус пузырька к исходному равновесному значению a_0. В случае же парового пузырька может сложиться несколько иная ситуация. Записав аналогичные (10) выражения для давления парового пузырька, можем также получить выражения для возмущения давления жидкости на межфазной поверхности в виде:

$$p'_{\text{liq}\,a} = -p'_v + \frac{2\sigma}{a_0}\frac{a'}{a_0}.$$

Оказывается, для парового пузырька в неограниченном объеме жидкости всегда

$$\left|p'_v\right| < \frac{2\sigma}{a_0^2}\left|a'\right|.$$

В частности, если рассмотреть предельный случай, когда коэффициент теплопроводности жидкости стремится к бесконечности ($\lambda_{\text{liq}} \to \infty$), будем иметь $p'_v = 0$.

Паровой пузырек в определенном смысле аналогичен перевернутому маятнику, для которого механизм неустойчивости связан с появлением «скатывающей силы» при малом отклонении от вертикального положения. Для парового пузырька аналогом «скатывающей силы» является возникающий положительный перепад давления ($p'_{\text{liq}a} > 0$) при положительном возмущении радиуса парового пузырька ($a' > 0$). Если же пузырек содержит газ, не растворяющийся в жидкости, то «скатывающая сила» может снижаться или вообще исчезнуть, если выполняется условие (6). Аналогичная ситуация может иметь место, когда в жидкости находятся распределенные по объему зародыши. В этом случае паровые пузырьки растут лишь за счет отбора тепла от конечного объема жидкости (ячейки). Вследствие этого при определении значения объемного содержания пузырьков α_{g0}, удовлетворяющего условию (5) при $p_{g0} = 0$, «скатывающая сила» также может отсутствовать.

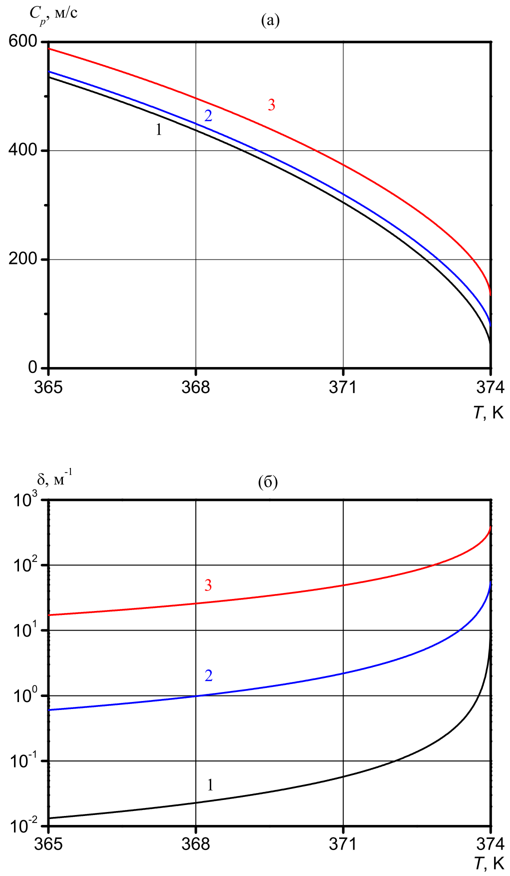


Рис. 4. Зависимость фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от равновесной температуры смеси и различных значений частоты возмущения смеси: 1 — $\omega = 10^3$ с$^{-1}$, 2 — 10^4 с$^{-1}$, 3 — 10^5 с$^{-1}$

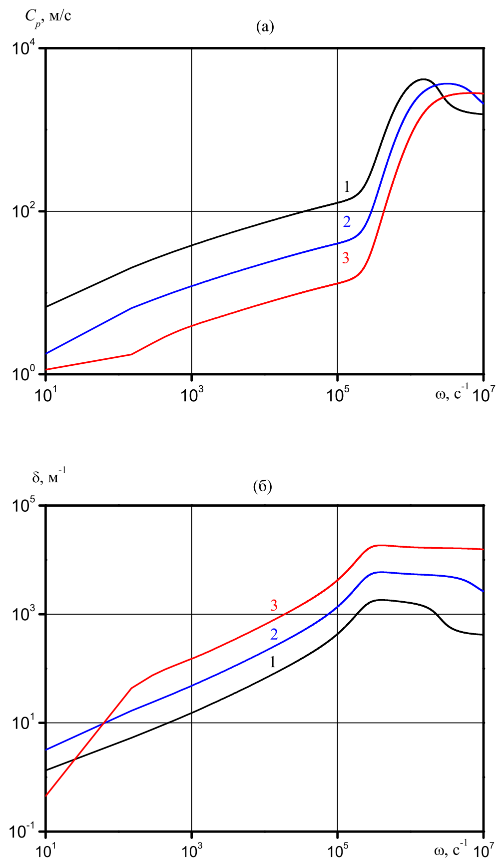


Рис. 5. Зависимость фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от частоты возмущений при различных значениях числа зародышей для значения температуры $T_0 = 374$ К: 1 — $n_0 = 10^{10}$ м$^{-3}$, 2 — 10^{11} м$^{-3}$, 3 — 10^{12} м$^{-3}$

4. Результаты расчетов

На основе дисперсионного уравнения (2) были проведены численные расчеты для воды с паровоздушными пузырьками. Величины физических и теплофизических параметров определялись с использованием справочных данных [36] и имеют следующие значения: $\rho^0_{\text{liq}0} = 10^3$ кг/м^3, $\rho^0_{g0} = 0.6$ кг/м^3, $c_{\text{liq}} = 4.2 \cdot 10^2$ Дж/(кг·К), $L = 2.256 \cdot 10^6$ Дж/кг, $\lambda_{\text{liq}} = 0.6$ Вт/(м·К), $\nu^{(\mu)}_{\text{liq}} = 10^{-6}$ м^2/с, $\sigma = 6 \cdot 10^2$ Н/м.

На рис. 4–5 показаны дисперсионные кривые от начальной температуры при $n_0 = 10^9$ м$^{-3}$, $a_0 = 2.2 \cdot 10^{-5}$ м и $\alpha_{g0} = 4.7 \cdot 10^{-5}$ (рис. 4) и от частоты возмущений при $T_0 = 374$ К, где для величины масс зародышей принято значение $m_{g0} = 8 \cdot 10^{-16}$ кг. Из этих рисунков отчетливо видно, что с увеличением частоты ω, для выбранного диапазона температур и начальных параметров смеси, значение фазовой скорости и коэффициента затухания увеличиваются. Причем, увеличение фазовой скорости несущественно, а коэффициент затухания может изменятся до нескольких порядков (рис. 4(б)).

Из рис. 5 следует, что для низких частот ($\omega \leqslant 10^2$) наблюдается снижение величины коэффициента затухания при повышении концентрации газовых зародышей. Отметим, что аналогичный эффект имеет место для парогазокапельной системы [37] (в частности, тумана). Это связано с тем, что при низких частотах ($\omega \leqslant \omega_M$, где ω_M — частота Миннаэрта [38]), когда температурные возмущения в жидкости охватывают весь объем жидкости в ячейке вокруг пузырька, степень температурной неравновесности в жидкости вокруг пузырьков снижается с уменьшением радиуса ячеек.

На рис. 6 представлено сравнение зависимостей фазовой скорости и коэффициента затуха-

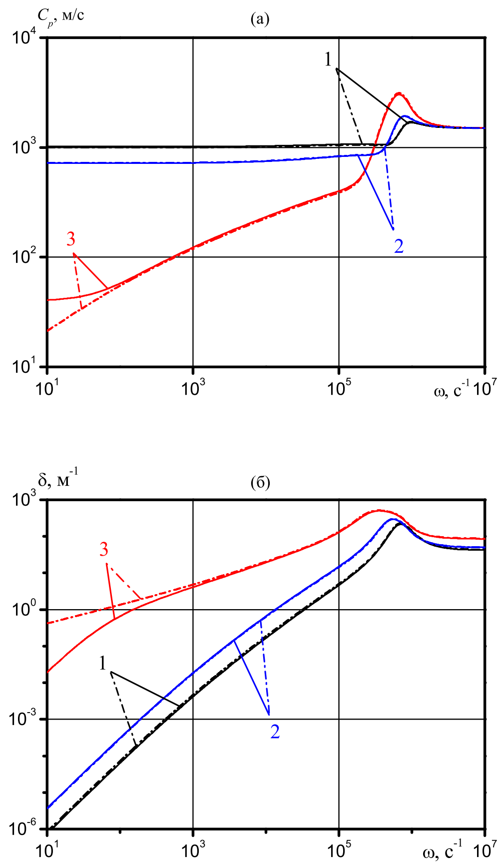


Рис. 6. Зависимость фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от частоты возмущений вблизи точки кипения для различных значений равновесной температуры: 1 — $T_0 = 372$ К, 2 — 373 К, 3 — 374 К

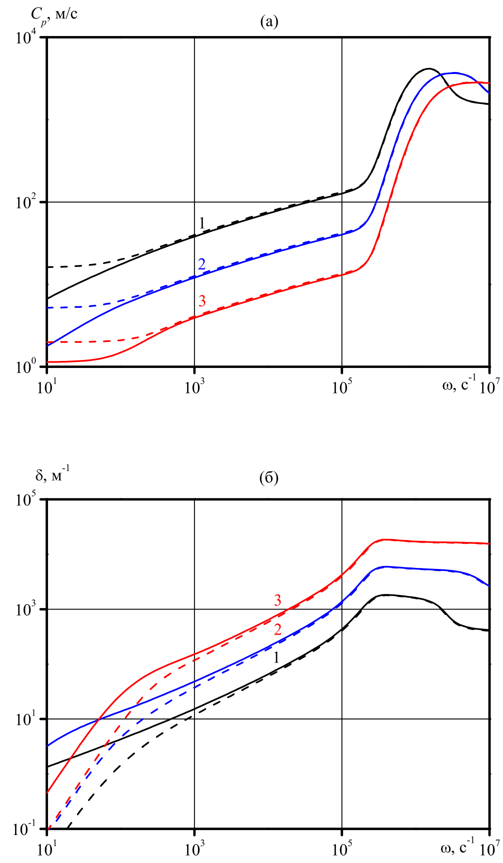


Рис. 7. Влияние числа зародышей на значения фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) при температурах 373 К (сплошные линии) и 374 К (пунктир): 1 — $n_0 = 10^{10}$ м$^{-3}$, 2 — 10^{11} м$^{-3}$, 3 — 10^{12} м$^{-3}$

ния от частоты возмущений для различных значений равновесной температуры T_0 вблизи точки кипения при $p_0 = 10^5$ Па ($T_{\text{eq}}(p_0) = 373$ К) с учетом диффузии (сплошные линии) и без ее учета (штриховые линии). Для числа зародышей и их масс приняты следующие величины: $n_0 = 10^9$ м$^{-3}$ и $m_{g0} = 8 \times 10^{-16}$ кг. Принятое значение m_{g0} является критической массой зародыша, определяемой из уравнения (8), для значения температуры $T_0 = 374$ К. Равновесные радиусы и объемные концентрации пузырьков, соответствующие этим температурам, брались следующими: $a_0 = 1.1 \cdot 10^{-5}$, $1.3 \cdot 10^{-5}$ и $2.2 \cdot 10^{-5}$ м и $\alpha_{g0} = 6 \cdot 10^{-6}$, $9.3 \cdot 10^{-6}$ и $4.7 \cdot 10^{-5}$. Для рассматриваемых значений начальной температуры массовая доля пара составила $k_0 = 0.816$ (372 К), 0.874 (373 К) и 0.971 (374 К). Из представленных графиков можно сделать вывод, что диффузия существенна только в низкочастотной области, когда температура приближается к значению, для которой масса зародышей m_{g0} является критической (8). В высокочастотной области ($\omega \geqslant \omega_M$, где ω_M – частота Миннаэрта [38]) учет диффузии не вносит особых корректив в распределение фазовой скорости и коэффициента затухания.

На рис. 7 показаны дисперсионные кривые, когда для величины масс зародышей принято значение $m_{g0} = 8 \times 10^{-16}$ кг с учетом диффузии (линии черного цвета) и без ее учета (линии красного цвета). Сплошные линии соответствуют начальной температуре $T_0 = 373$ К, а пунктирные — 374 К. Равновесные радиусы для данных температур брались $a_0 = 2.18 \times 10^{-5}$ м (373 К) и 2.24×10^{-5} м (374 К). Отметим, что учет диффузии при увеличении числа зародышей не вносит существенных корректив в изменение фазовой скорости. Однако, в низкочастотной области ($\omega \leqslant \omega_M$) учет диффузии приводит к уменьшению коэффициента затухания с увеличением числа зародышей. Это может быть связано с тем, что при низких частотах, когда температурные возмущения в жидкости охватывают весь объем жидкости в ячейке вокруг пузырька, степень температурной неравновесности в жидкости вокруг пузырьков снижается не только за счет уменьшения радиуса ячеек, но и за счет диффузионных эффектов.

5. Заключение

Исследование гармонических акустических волн в жидкости с паровоздушными пузырьками с учетом диффузии показало, что для рассматриваемых задач данный учет может носить существенный характер только для перегретых жидкостей ($T_0 \geqslant T_{\text{eq}}(p_0)$) в низкочастотной области. Это связано с увеличением роли фазовых переходов из-за роста массовой концентрации пара в пузырьках под действием капиллярных сил на межфазной поверхности.

Список литературы

[1] Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 302 с.

[2] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987. 360 с., 464 с.

[3] Шагапов В.Ш., Лепихин С.А., Галимзянов М.Н. Реализация высоких давлений и температур в газовой фазе при истечении пузырьковой жидкости через сопло // Инженерно-физический журнал. 2007. Т. 80, № 6. С. 134–137. https://elibrary.ru/item.asp?id=15509973

[4] Галимзянов М.Н., Лепихин С.А. Истечение двухфазной смеси через сопло с учетом фазовых переходов // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2010. № 2(76). С. 96–104. https://elibrary.ru/item.asp?id=16059300

[5] Галимзянов М.Н., Лепихин С.А., Чиглинцев И.А. Распространение нелинейных волн в каналах переменного сечения, сопровождаемое образованием гидрата газа // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Механика. 2012. № 3/1(94). С. 103–115. https://elibrary.ru/item.asp?id=18242265

[6] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Topolnikov A.S. et al. The hydrodynamic processes in bubbly liquid flowing in tubes and nozzles // World Acad. Sci. Eng. Technol. 2012. Vol. 6, No. 8. P. 1992–1999. DOI: 10.5281/zenodo.1329811

[7] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Гималтдинов И.К. и др. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны // Доклады Академии Наук. 2001. Т. 378, № 6. С. 763–768. https://elibrary.ru/item.asp?id=39274616

[8] Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Механика жидкости и газа. 2002. № 2. С. 139–147. https://elibrary.ru/item.asp?id=39274845

[9] Галимзянов М.Н. Распространение волн сжатия в пузырьковых зонах конечных размеров // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 2. С. 57–66. http://vst.ics.org.ru/journal/article/1677/

[10] Галимзянов М.Н. Распространение волн давления в пузырьковых зонах конечных размеров // Известия Саратовского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 27–35. DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35

[11] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Topolnikov A.S. et al. Nonlinear effects in bubbly liquid with shock waves // World Acad. Sci. Eng. Technol. 2012. Vol. 6, No. 8. P. 2000–2007. DOI: 10.5281/zenodo.1082523

[12] Болотнова Р.Х., Галимзянов М.Н., Агишева У.О. Моделирование ударных волн в газожидкостных смесях // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2011. № 2. С. 3–14. https://izvuz_fmn.pnzgu.ru/fmn1211

[13] Агишева У.О., Болотнова Р.Х., Бузина В.А. и др. Параметрический анализ режимов ударно-волнового воздействия на газожидкостные среды // Механика жидкости и газа. 2013. № 2. С. 15–28. https://elibrary.ru/download/elibrary_19116721_93992898.pdf

[14] Hawker N.A. and Ventikos Y. Interaction of a strong shockwave with a gas bubble in a liquid medium: a numerical study // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 701. P. 59–97. DOI: 10.1017/jfm.2012.132

[15] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности отражения и преломления акустических волн на границе раздела между газом и дисперсной системой // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 5(333). С. 119–129. DOI: 10.15372/PMTF20150510

[16] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности преломления и отражения звука на границе пузырьковой жидкости // Акустический журнал. 2015. Т. 61, № 1. С. 40–48. http://www.akzh.ru/pdf/2015_1_40-48.pdf

[17] Гималтдинов И.К., Галимзянов М.Н. Динамика локализованного импульса в пузырьковой жидкости // Сборник трудов Института механики УНЦ РАН. Выпуск 10. Уфа. 2014. С. 38–43. DOI: 10.21662/uim2014.1.007

[18] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Evolution of pressure waves acting on a bubble liquid through adjacent boundaries // Journal of Physics: Conf. Series. 1158(2019). 022008. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022008

[19] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Low-intensity pressure waves in a stratified bubbly liquid // Journal of Physics: Conf. Series. 1400(2019). 077045. DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077045

[20] Carey V.P. Thermodynamic Analysis of the Intrinsic Stability of Superheated Liquid in a Micromechanical Actuator with Elastic Walls // Microscale Thermophys. Eng. 2000. Vol. 4, iss. 2. P. 109–123. DOI: 10.1080/108939500404025

[21] Шагапов В.Ш., Коледин В.В., Вахитова Н.К. Об устойчивости перегретой жидкости, содержащей парогазовые зародыши // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 5. С. 64–80. https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=152736&ARTICLE_ID=152743

[22] Коледин В.В., Шагапов В.Ш. К динамике роста паровых пузырьков в перегретой жидкости // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, № 5. С. 754–767.
https://elibrary.ru/item.asp?id=20406061

[23] Вараксин А.Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 3. С. 421–455.
http://mi.mathnet.ru/tvt97

[24] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Акустика и устойчивость перегретой жидкости с газовыми зародышами // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 3. С. 85–95.
DOI: 10.15372/PMTF20190309

[25] Agisheva U.O., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Acoustic properties of overheated liquid with gas nuclei during temperature increasing // Journal of Physics: Conf. Series. 1268(2019). 012014.
DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012014

[26] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности устойчивости и акустических свойств перегретой жидкости с газовыми зародышами при повышении давления // Теплофизика высоких температур. 2019.Т. 57, № 5. С. 748–754.
DOI: 10.1134/S0040364419050144

[27] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. и др. Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 4. С. 912–921.
https://elibrary.ru/item.asp?id=35325382

[28] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при прямом их падении // Теплофизика высоких температур. Т. 57, № 2. 2019. С. 284–290.
DOI: 10.1134/S0040364419010228

[29] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при «косом» их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 3. С. 464–468.
DOI: 10.1134/S0040364419020194

[30] Agisheva U.O., Vdovenko I.I. and Galimzyanov M.N. Acoustic waves in a superheated liquid with a gas nuclei // Journal of Physics: Conf. Series. 1158(2019). 022007.
DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022007

[31] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волны в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1077–1081.

[32] Накоряков В.Е., Шрейбер И.Р. Распространение малых возмущений в парожидкостной смеси // Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение. 1974. С. 161–166.

[33] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.

[34] Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высш. шк.,1991. 376 с.

[35] Шагапов В.Ш., Ялаев А.В. Объемное вскипание жидкости, содержащей газовые зародыши // ТОХТ. 2012. Т. 46. № 4. С. 420–431.
DOI: 10.1134/S0040579512010149

[36] Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2-е изд. М.: Наука, 1972. 720 с.

[37] Шагапов В.Ш. К теории о распространении звука в тумане // Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24. № 5. С. 506–512.

[38] Гиббс Дж.В. Термодинамические работы. М.: Гостехиздат, 1950. 143 с.

ISSN 2658–5782

14 (2019), **3**, 165–175

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.023
DOI: 10.21662/mfs2019.3.023

Received: 15.11.2019
Accepted: 25.12.2019

The effect of diffusion on the acoustic properties of a bubble fluid

Agisheva U.O.*, Vdovenko I.I., Galimzyanov M.N.***

*Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa
**Birsk branch of the Bashkir State University, Birsk

The problems of wave propagation in bubble media have been of great interest to researchers for almost half a century in connection with the wide distribution of these systems in nature and their intensive use in modern technologies. It is known from the literature that the intensity of attenuation of sound disturbances in the gas-liquid media under consideration is mainly determined by the thermophysical characteristics of the gas in the bubbles. It turns out that these effects are significantly enhanced with increasing vapor concentration due to an increase in the temperature of the system. There are a large number of publications in the literature in which various statements of the wave action on bubble media have been considered. In the present work, the propagation of small perturbations in a liquid with bubbles filled with vapor and a gas insoluble in the liquid phase is considered in the plane one-dimensional and single-velocity approximations. The rate of liquid evaporation (condensation) inside the bubble was determined from the condition of heat balance. To take into account interphase heat and mass transfer, the heat conduction and diffusion equations inside the bubble and the heat conduction equation in the fluid around the bubble are used. From the condition for the existence of a solution in the form of a decaying traveling wave, taking into account the effects of acoustic unloading of bubbles, the dispersion equation is written. From the condition for the existence of a solution in the form of a decaying traveling wave, taking into account the effects of acoustic unloading of bubbles, the dispersion equation is written. Based on the obtained dispersion equation, relations are written for the equilibrium speed of sound depending on the thermophysical parameters of the medium and numerical calculations are performed for water with vapor-gas bubbles. The features of the reflection of harmonic waves from the interface between the "pure" liquid and liquid with vapor-gas bubbles are studied. The influence of the perturbation frequency and the temperature of the medium on the attenuation coefficient of the acoustic wave is studied. The influence of diffusion on the evolution of harmonic waves is analyzed.

Keywords: acoustic wave, superheated liquid, bubbles, analysis of variance, phase velocity, attenuation coefficient, diffusion

References

[1] Kutateladze S.S. and Nakoryakov V.E. [Heat and mass transfer in gas–liquid systems] *Teplomassoobmen i volni v gazojidkostnih sistemah*. Novosibirsk: Nauka, 1984. P. 302 (in Russian).

[2] Nigmatulin R.I. Dynamics of Multiphase Media. New York: Hemisphere, 1991, vols. 1 and 2. P. 360 and P. 464.

[3] Shagapov V.Sh., Lepikhin S.A. and Galimzyanov M.N. Realization of high pressures and temperatures in the gas phase of a bubble liquid flowing through a nozzle // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2007. V. 80, No. 6. Pp. 1206–1209. DOI: 10.1007/s10891-007-0155-0

[4] Galimzyanov M.N. and Lepikhin S.A. Outflow of a two-phase mixture through a nozzle with account for phase transitions // Vestnik Samarsk. Gos. Univ. Mekh. 2010. No. 2 (76). Pp. 96–104 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=16059300

[5] Galimzyanov M.N., Lepikhin S.A. and Chiglintsev I.A. Propagation of nonlinear waves in channels with variable cross-section, led to the gas hydrate formation // Vestnik Samarsk. Gos. Univ. Mekh. 2012. No. 3/1(94). Pp. 103–115 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=18242265

[6] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Topolnikov A.S. et al. The hydrodynamic processes in bubbly liquid flowing in tubes and nozzles. World Acad. Sci. Eng. Technol. 2012. V. 68. Pp. 1992–1999. DOI: 10.5281/zenodo.1329811

[7] Nigmatulin R.I., Shagapov V.Sh., Gimaltdinov I.K. et al. Two-dimensional pressure waves in a liquid containing bubble zones // Doklady Physics. 2001. V. 46, No. 6. Pp. 445–451. DOI: 10.1134/1.1384945

[8] Galimzyanov M.N., Gimaltdinov I.K. and Shagapov V.Sh. Two-dimensional pressure waves in a fluid with bubbles // Fluid Dynamics. 2002. V. 37, No. 2. Pp. 294–301.
DOI: 10.1023/A:1015818602291

[9] Galimzyanov M.N. Propagation of compression waves in finite-size bubbles zones // Vestnik Udmurt. Univ. Matematika. Mekhanika. 2010. No. 2. Pp. 57–66 (in Russian).
http://vst.ics.org.ru/journal/article/1677/

[10] Galimzyanov M.N. Propagation of Pressure Waves in Finite-Size Bubbles Zones // Izv. Sarat. Univ. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2010. V. 4. Pp. 27–35 (in Russian).
DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35

[11] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Topolnikov A.S. et al. Nonlinear effects in bubbly liquid with shock waves // World Acad. Sci. Eng. Technol. 2012. V. 68. Pp. 2000–2007.
DOI: 10.5281/zenodo.1082523

[12] Bolotnova R.Kh., Galimzyanov M.N. and Agisheva U.O. Modeling of shock waves in gas–liquid mixtures. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Fiz.-Mat. Nauki. 2011. No. 2. Pp. 3–14 (in Russian).
https://izvuz_fmn.pnzgu.ru/fmn1211

[13] Agisheva U.O., Bolotnova R.Kh., Buzina V.A. et al. Parametric analysis of the regimes of shockwave effect on gas–liquid media // Fluid Dynamics. 2013. Vol. 48, No. 2. Pp. 151–162.
DOI: 10.1134/S0015462813020038

[14] Hawker N.A. and Ventikos Y. Interaction of a strong shockwave with a gas bubble in a liquid medium: a numerical study // Journal of Fluid Mechanics. 2012. V. 701. Pp. 59–97.
DOI: 10.1017/jfm.2012.132

[15] Shagapov V.Sh. and Sarapulova V.V. Reflection and refraction of acoustic waves at the interface between a gas and a disperse systems // Journal of Applied Mechanicsand Technical Physics. 2015. V. 56, No. 5. Pp. 838–847.
DOI: 10.1134/S0021894415050107

[16] Shagapov V.Sh. and Sarapulova V.V. Characteristic features of rarefaction and refl ection of sound at the boundary of a bubble liquid // Acoustical Physics. 2015. V. 61, No. 1. Pp. 37–44.
DOI: 10.1134/S1063771014060153

[17] Gimaltdinov I.K. and Galimzyanov M.N. Dynamics of localized pulse in bubble liquid // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. 2014. V. 10. Pp. 38–43 (in Russian).
DOI: 10.21662/uim2014.1.007

[18] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Evolution of pressure waves acting on a bubble liquid through adjacent boundaries // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. V. 1158. 022008.
DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022008

[19] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Low-intensity pressure waves in a stratified bubbly liquid // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. V. 1400. 077045.
DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077045

[20] Carey V.P. Thermodynamic Analysis of the Intrinsic Stability of Superheated Liquid in a Micromechanical Actuator with Elastic Walls // Microscale Thermophysics Engineering. 2000. V. 4, No. 2. Pp. 109–123.
DOI: 10.1080/108939500404025

[21] Shagapov V.Sh., Koledin V.V. and Vakhitova N.K. Stability of an overheated liquid containing vapor-gas bubbles // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. V. 54, No. 5. Pp. 742–755.
DOI: 10.1134/S0021894413050076

[22] Koledin V.V. and Shagapov V.Sh. On the dynamics of vapor bubble growth in the super heated liquid // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2013. V. 77, No. 5. Pp. 754–767 (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=20406061

[23] Varaksin A.Y. Fluid dynamics and thermal physics of two-phase flows: problems and achievements // High Temperature. 2013. V. 51, No. 3. Pp. 377–407.
DOI: 10.1134/S0018151X13030073

[24] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Acoustics and stability of an overheated liquid with gas bubbles // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. V. 60, No. 3. Pp. 473–482.
DOI: 10.1134/S002189441903009X

[25] Agisheva U.O., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Acoustic properties of overheated liquid with gas nuclei during temperature increasing // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. V. 1268. 012014.
DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012014

[26] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Characteristics of the stability and acoustic properties of superheated liquid with gas nuclei under increasing pressure // High Temperature. 2019. V. 57, No. 5. Pp. 712–717.
DOI: 10.1134/S0018151X19050146

[27] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N., Vdovenko I.I. et al. Characteristic features of sound propagation in a warm bubble-laden water // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2018. V. 91, No. 4. Pp. 854–863.
DOI: 10.1007/s10891-018-1809-9

[28] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Characteristics of the reection and refraction of acoustic waves at normal incidence on the interface between «pure» and bubbly liquids // High Temperature. 2019. V. 57, No. 2. Pp. 256–262.
DOI: 10.1134/S0018151X1901022X

[29] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Characteristics of the reection and refraction of acoustic waves at oblique incidence on the interface between «pure» and bubbly liquids // High Temperature. 2019. V. 57, No. 3. Pp. 425–429.
DOI: 10.1134/S0018151X19020184

[30] Agisheva U.O., Vdovenko I.I. and Galimzyanov M.N. Acoustic waves in a superheated liquid with a gas nuclei // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. V. 1158. 022007.
DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022007

[31] Nigmatulin R.I., Shagapov V.Sh. and Vakhitova N.K. Effect of the compressibility of the carrier phase in wave propagation in a bubble medium // Doklady. Akad. Nauk SSSR. 1989. V. 304, No. 5. Pp. 1077–1081.

[32] Nakoryakov V.E. and Shreiber I.R. [Propagation of small perturbations in a vapor–liquid mixture] *Rasprostranenie malih vozmuscheniy v parojidkostnoi smesi* // Problems of Thermophysics and Physical Hydrodynamics. Novosibirsk: Nauka, 1974. Pp. 161–166 (in Russian).

[33] Landau L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. Moscow: Fizmatlit. Vol. 6. 2001. 736 p (in Russian).

[34] Bazarov I.P. Thermodynamics. Moscow: High School, 1991. P. 376 p (in Russian).

[35] Shagapov V.Sh., Yalaev A.V. On the theory of the bulk boiling of a liquid with transition into a metastable state // Theoretical Foundations Of Chemical Engineering. 2012. V. 46. No 4. Pp. 348–358.
DOI: 10.1134/S0040579512010149

[36] Vargaftik N.B. [Handbook of Thermophysical Properties of Gases and Liquids] *Spravochnik po teplofizicheskim svoistvam gazov i jidkostei*. Moscow: Nauka, 1972. P. 720 (in Russian).

[37] Shagapov V.Sh. [On the theory of sound propagation in fog] *K teorii o rasprostranenii zvuka v tumane* // Izvestiya AN SSSR Fizika atmosfery i okeana. 1988. V. 24. No. 5. Pp. 506-512 (in Russian).

[38] Gibbs J.W. Thermodynamics. London: Longmans, Green and Company, 1906.

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 3, с. 176–183

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.023
DOI: 10.21662/mfs2019.3.023
УДК 533:519.63:004.942

Получена: 5.06.2019
Принята: 24.10.2019

Воздействие дополнительной точки вдува, расположенной со стороны горячего выхода, на производительность вихревой трубы[1]

Привалов Л.Ю.*, Михайленко К.И.**

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа
**Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

На основе численного моделирования изучается выход холодного и горячего воздуха из модифицированной противоточной вихревой трубы. Особенностью исследуемой модификации является дополнительная область подачи воздуха по оси трубы со стороны горячего выхода. Дополнительная точка вдува воздуха призвана перераспределить потоки газа на холодном и горячем выходах. Вычислительные эксперименты проведены в программном пакете OpenFOAM с использованием решателя sonicFoam на основе $k-\varepsilon$ модели турбулентности в предположении идеального газа. Исследовалась зависимость расхода и температуры воздуха на холодном и горячем выходах для разных длин основного канала вихревой трубы. Для всех рассматриваемых длин трубы были подготовлены конечно-объемные сетки, в которых соблюдалась предпочтительно прямоугольная форма ячеек и удалось избежать их чрезмерного растяжения. Для ускорения расчетов использовалась технология MPI; пространственная декомпозиция исходной сетки производилась утилитой decomposePar на равные части вдоль трубы. Такой подход позволил уменьшить время вычислений приблизительно в 3.5 раза при запуске на шести процессах. Результаты параллельного моделирования объединялись утилитой reconstructPar и в дальнейшем обрабатывались программой на языке Python, написанной с использованием библиотеки vtk. Таким образом были получены средние по времени и пространству значения основных физических характеристик на холодном и горячем выходах. Обсуждены результаты, демонстрирующие влияние длины вихревой трубы на величину температуры и расход воздуха на соответствующих выходах. Показано нестандартное для вихревой трубы поведение ее основных характеристик, сделано предположение о причине подобного поведения: столкновение быстротекущих потоков порождает неустойчивость. Сделаны предварительные выводы о выборе эффективной длины вихревой трубы с дополнительным каналом подачи воздуха, при которой соотношение температуры воздуха на горячем и холодном выходах является наибольшим.

Ключевые слова: эффект Ранка–Хилша, модифицированная вихревая труба, турбулентность, OpenFOAM

1. Введение

Вихревая труба — это устройство без движущихся частей, которое позволяет разделять поток сжатого воздуха, поданный тангенциально через специальный завихритель, на два вихря. При этом один из вихрей имеет более низкую температуру, чем у подаваемого газа, второй — более высокую. Данный феномен был назван эффектом Ранка–Хилша в честь французского инженера Жоржа Жозефа Ранка, открывшего и запатентовавшего соответствующее устройство, и немецкого физика Рудольфа Хилша, который улучшил конструкцию вихревой трубы и вернул интерес к данному устройству [1, 2].

Конструкция обсуждаемой установки проста и надежна, поэтому она находит применение во

[1]Работа выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию на 2019–2022 годы (№246-2019-00520).

многих областях, где требуется охлаждение либо разделение смесей газов или жидкостей. Поэтому исследование устройств, реализующих вихревой эффект, является одним из основных направлений вихревой техники, особенно с учетом того факта, что механизм температурного разделения до сих пор не вполне ясен [3–6]. При этом поиск механизма ведется посредством исследования разнообразных эффектов, получаемых как на основе теоретических выкладок, например, связанных с ускорением тангенциальной скорости вихря благодаря акустическим эффектам [7], так и экспериментальным путем [8]. В подобных исследованиях часто демонстрируются эффекты, определяемые различным числом входных патрубков (от 1 до 5), длиной трубы и диаметром холодного выхода [9], формой основного канала. Так, в работе [5] определено существование оптимального малого конического угла основного канала трубы.

В целом рассматриваемый эффект интересен как в теоретическом, так и в практическом плане, поэтому следует отметить существование значительного числа работ, посвященных различным аспектам изучения и применения вихревых труб [3–5, 10–12]. Данный факт демонстрирует сохраняющийся интерес к исследуемому эффекту и актуальность проблемы, как это отмечено во многих обзорах по данной тематике [3, 4, 13].

На данный момент активно ведутся исследования нестандартных конфигураций вихревой трубы с точки зрения их влияния на ее характеристики. Существуют упоминания вихревой трубы с двумя контурами [14], с альтернативными формами горячего выхода [15], а также с видоизмененным главным цилиндром [16].

В настоящей статье рассматривается влияние длины вихревой трубы на эффективность ее работы при наличии дополнительного вдува вдоль оси трубы со стороны горячего выхода, расположенном соосно.

2. Постановка задачи

В настоящей работе проводится вычислительное моделирование противоточной вихревой трубы с дополнительным вдувом воздуха, расположенным соосно основному каналу трубы со стороны диафрагмы горячего воздуха, как это показано на схеме рис. 1. При моделировании газодинамических процессов для вихревой трубы приняты следующие геометрические параметры в соответствии с обозначениями на рис. 1: диаметр трубы $D = 4.7$ см; диаметр дополнительного вдува взят равным диаметру холодного выхода $r = d = 0.9$ см; ширина диафрагмы горячего воздуха $h = 0.5$ см; размеры основных каналов подачи воздуха $s = 0.45$ см, $q = 1$ см и $m = 4$ см; длина холодного выхода $\ell = 2.5$ см. Длина трубы L является изменяемой и варьируется от 20 до 80 см.

На вход завихрителей воздух подается при температуре 300 K и постоянном расходе 0.02 м^3/с, а на дополнительном вдуве — 0.002 м^3/с при той же температуре. Стоит отметить, что на холодном и горячем выходах задано неотражающее условие протекания для скорости и температуры, давление на этих границах постоянно и равно 10^5 Па. На стенках ставится условие прилипания и адиабатическое условие по температуре. В уравнения импульсов и энергии введены вязкие члены для расчетов с использованием $k-\varepsilon$ модели турбулентности.

Выбор $k-\varepsilon$ модели турбулентности определяется необходимостью поиска наиболее адекватных подходов к моделированию рассматриваемого процесса. Ранее [10, 11] рассматривался LES подход к моделированию вихревой трубы, показавший недостаточную точность при использовании доступных вычислительных ресурсов.

Динамика газа в канале вихревой трубы описывается на основе стандартной системы уравнений:

- уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U}) = 0\,;$$

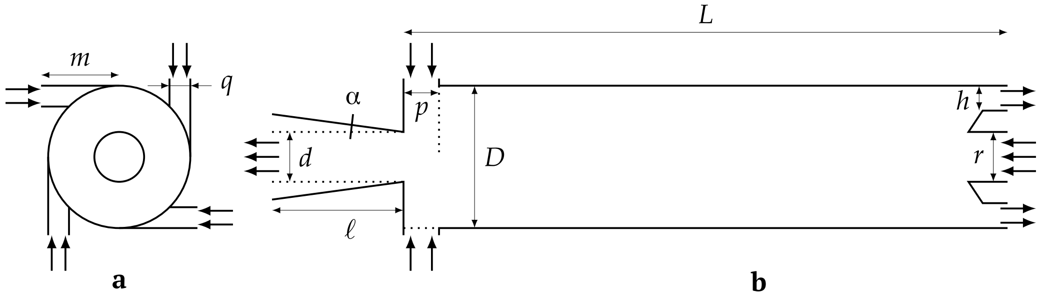


Рис. 1. Схема вихревой трубы: *a*) вид со стороны холодного выхода и завихрителя; *b*) продольный разрез

- уравнение имульса

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} \times \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \boldsymbol{\tau};$$

- уравнение энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} E) = -\nabla p \mathbf{U} + \nabla(\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{U});$$

- уравнение состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1)\rho e.$$

Здесь $\mathbf{U}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; $E = e + \frac{1}{2}|\mathbf{U}|^2$ — удельная полная энергия; e — удельная внутренняя энергия; γ — показатель адиабаты; $\boldsymbol{\tau}$ — тензор вязких напряжений, определяемый как

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t)\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right],$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; v_i — компоненты вектора скорости; μ — вязкость среды; $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ — турбулентная вязкость, вычисляемая из предположений $k - \varepsilon$ модели турбулентности [17]:

- кинетическая энергия турбулентности

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} = \nabla\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\nabla k\right) - \frac{2}{3}\rho\,(\nabla \mathbf{U})\,k - \rho\varepsilon,$$

- уравнение скорости диссипации турбулентности

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} = \nabla\left(\frac{\mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\nabla \varepsilon\right) - \frac{2}{3}C_1\rho\,(\nabla \mathbf{U})\,\varepsilon - C_2\rho\frac{\varepsilon^2}{k},$$

где $C_\mu = 0.09$, $C_1 = 1.44$, $C_2 = 1.92$, $\sigma_k = 1$ и $\sigma_\varepsilon = 1.3$.

3. Проведение вычислений

Компьютерное моделирование проводилось в среде OpenFOAM с использованием решателя sonicFoam [10], который позволяет получать решения при наличии ударных волн, быстро сходится и дает хорошее приближение к точному решению, зависящее от количества итераций метода PISO. Также в модели строилась конечно-объемная сетка, для которой предусматривалась равномерность и ортогонализированность, так как такой подход позволяет увеличивать шаг по времени без существенного роста погрешности [11]. Помимо этого при увеличении длины трубы увеличивалось число разбиений в направлении оси основного канала для предотвращения растяжения сетки и, соответственно, роста погрешности.

Важным моментом при подготовке параллельных вычислений является разбиение сетки на несколько приблизительно равных подсеток, что позволяет выполнить по ним параллельный расчет. Решатели пакета openFoam содержат параллельный вариант запуска средствами MPI. Для этого средствами утилиты decomposePar производилось разбиение на шесть подобластей плоскостями, ортогональными оси трубы, для минимизации числа ячеек, в которых происходит взаимодействие подсеток. Последующий расчет велся на шестиядерном процессоре. Таким образом в дальнейшем каждая конфигурация трубы рассчитывалась параллельно на шести процессах, а ускорение расчетов достигало 3.5 раз.

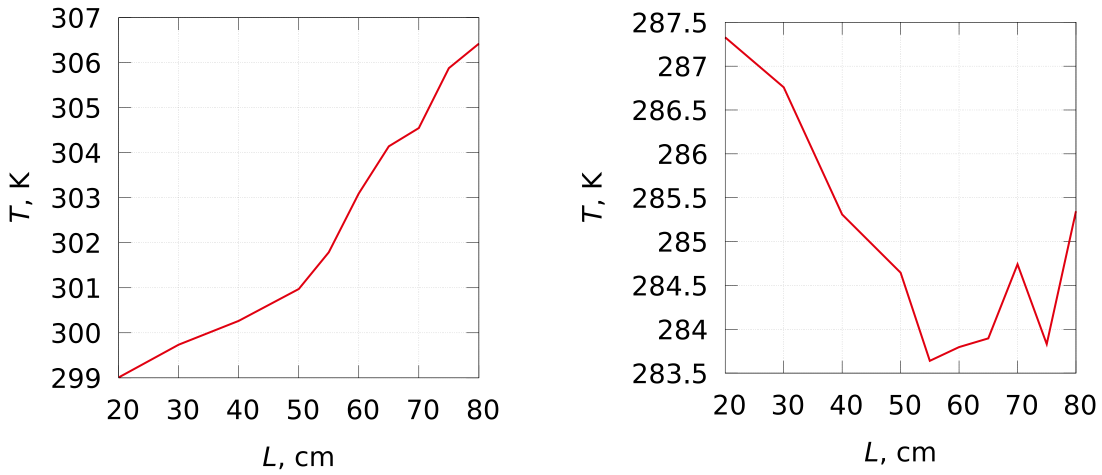
Моделируемое время для «коротких» каналов вихревой трубы (то есть для $L \leqslant 50$ см) ограничивалось 150 мс, причем по шагам на заключительных 50 мс производилось осреднение для уменьшения влияния на результат турбулентных пульсаций. Авторы полагают, что уже к моменту времени 100 мс и далее процесс является установившимся, что наблюдалось как последовательность схожих между собой значений физических величин, осредненных по площади сечения в каждый дискретный момент времени. Расчеты для длин $L > 50$ см проводились на увеличивающихся отрезках времени, вплоть до 210 мс, так как с увеличением длины трубы, увеличивалось и время, за которое происходит установление течения.

4. Результаты моделирования

На рис. 2–4 представлены графики температуры, скорости и массового расхода для диафрагм горячего и холодного воздуха. Для указанных графиков можно наблюдать характерное для вихревых труб поведение, выражающееся в росте температуры на горячем выходе и падении на холодном. В рассматриваемой постановке задачи эти процессы монотонно продолжаются до достижения основным каналом вихревой трубы длины $L \sim 50$ см.

Все графики показывают, что удлинение основного канала вихревой трубы положительно сказывается на такой ее характеристики, как отношение температуры выходящего из горячей и холодной диафрагм воздуха.

На горячем выходе наблюдается достаточно гладкая монотонная картина поведения рассматриваемых физических величин. Температура выходящего воздуха растет почти равномерно, как это показано на рис. 2(а). Если же рассматривать графики модуля скорости (рис. 3(а)) и массового расхода



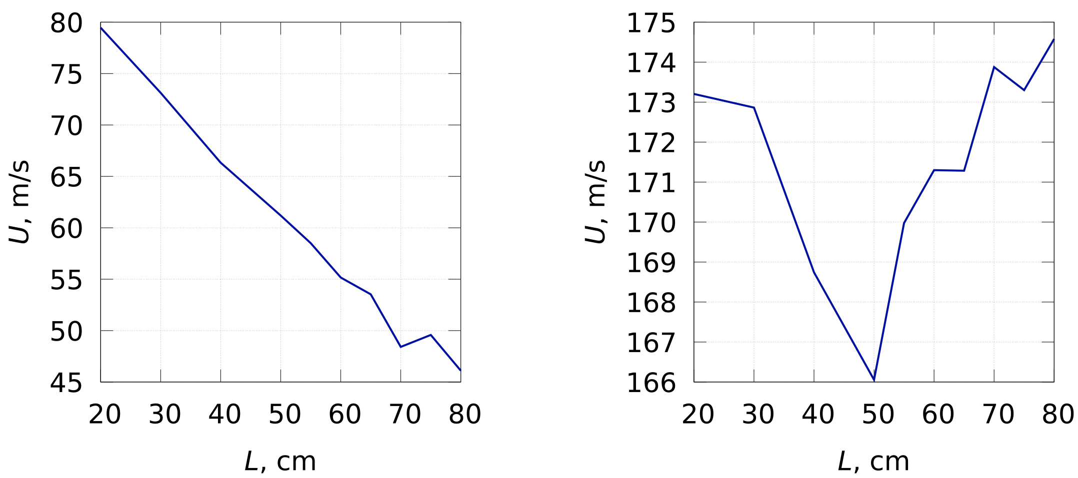
а) б)

Рис. 2. Зависимость температуры воздуха на горячей (а) и холодной (б) диафрагмах от длины трубы

(рис. 4(а)), то для них наблюдается также гладкая монотонная картина, однако эти физические величины уменьшают свое значение с ростом длины основного канала вихревой трубы. Причины небольшого отклонения при $L = 70$ см обсудим ниже.

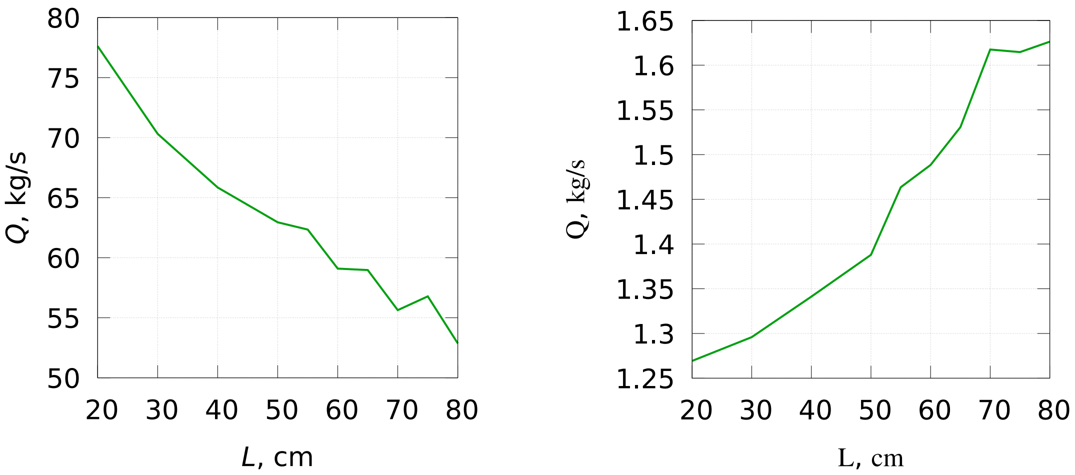
Однако, для диафрагмы холодного воздух полученные результаты не являются обратными, как можно было ожидать. Так, если обратить внимание на температуру (рис. 2(б)) и модуль скорости (рис. 3(б)) воздуха на выходе из холодной диафрагмы, то для них наблюдается немонотонное поведение, заключающееся сначала в уменьшении измеряемых значений с ростом длины канала до размера $L = 50$ см и $L = 55$ см, после чего указанные физические величины возрастают. Подобная немонотонность не наблюдалась для модели «стандартной» противоточной вихревой трубы [18], где эти физические величины гладко растут с увеличением длины основного канала.

Таким образом, можно предположить, что физика наблюдаемых процессов при наличии дополнительного вдува несколько отличается. Дополнительную подачу воздуха по оси канала со стороны горячей диафрагмы можно рассматривать как своеобразный «поршень», дополнительно толкающий образующийся по центру канала слой охлажденно-



а) б)

Рис. 3. Зависимость модуля скорости воздуха на горячей (а) и холодной (б) диафрагмах от длины трубы



а) б)

Рис. 4. Зависимость величины массового расхода воздуха на горячей (а) и холодной (б) диафрагмах от длины трубы

го воздуха в направлении холодной диафрагмы. С увеличением длины трубы область дополнительного вдува отодвигается от диафрагмы холодного воздуха и, соответственно, снижается ее влияние на выдув охлажденного газа. Когда длина основного канала вихревой трубы превышает длину $L \simeq 50$ см, «поршневое» действие поступающего из отверстия дополнительного вдува воздуха нивелируется. При дальнейшем удлинении вихревой трубы рассматриваемые физические параметры показывают качественную зависимость от длины основного канала аналогичную их зависимости для простой противоточной вихревой трубы [18].

Наконец, если рассматривать исключительно массовый расход воздуха через холодную и горячую диафрагмы (рис. 4), то как его величины, так и поведение в зависимости от длины канала повторяют величины и зависимости, наблюдаемые в случае обычной вихревой трубы [19].

Для всех графиков можно видеть некоторую неоднородность результатов на больших длинах ($L > 60$ см) основного канала вихревой трубы. Данная неоднородность может быть объяснена одной из двух причин. Во-первых, это может быть артефактом неравномерной конечно-объемной сетки, размер которой в проведенных вычислительных экспериментах изменялся скачкообразно, подстраиваясь под удобство пространственной декомпозиции для высокопроизводительных вычислений. Второе объяснение может быть связано с физикой процесса и основано на взаимодействии дополнительного потока воздуха с внешним и внутренним вихрями, определяющими эффект Ранка–Хилша. На данном этапе выбор между этими двумя объяснениями затруднен, требует бóльшего числа вычислительных экспериментов и является одной из целей дальнейших исследований.

5. Заключение

В ходе проведенных вычислительных экспериментов было продемонстрировано, что наличие дополнительного канала подачи воздуха, расположенного соосно основному каналу со стороны диафрагмы горячего выхода противоточной вихревой трубы оказывает заметное влияние на эффект Ранка–Хилша для «коротких» вихревых труб. В рассматриваемой конфигурации «короткими» являются трубы с длиной канала $L < 50$ см. Для таких труб зависимость температуры холодного воздуха от длины трубы имеет обратный характер по сравнению с классическим вариантом противоточной вихревой трубы. Объяснение этого, по-видимому, кроется в появлении некоторого направленного в сторону диафрагмы холодного воздуха мягкого «поршня» по центру, определяемого дополнительным каналом подачи газа. В целом это положительное свойство, которое может быть использовано для достижения бóльшего выхода холодного воздуха на практике.

Также в процессе исследования обнаружена неустойчивость рассмотренных физических параметров в зависимости от длины основного канала для вихревых труб большой длины. Указанная неустойчивость не может быть объяснена в рамках проведенной работы и требует дополнительных исследований.

Список литературы

[1] Hilsch R. The use of the expansion of gases in a centrifugal field as cooling process // Review of Sientific Instruments. 1947. V. 18. Pp. 108–113.
DOI: 10.1063/1.1740893

[2] Ranque G.J. Experiments on expantion a vortex with simultaneous exhaust of hot air and cold air // J. Phys. Radium. 1933. V. 4. Pp. 112–114 (in French).

[3] Eiamsa-Ard S., Promvonge P. Review of Ranque-Hilsch effects on vortex tubes // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2008. V. 1. Pp. 1822–1842.
DOI: 10.1016/j.rser.2007.03.006

[4] Subudhi S., Sen M. Review of Ranque–Hilsch vortex tube experiments using air // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2015. V. 52. Pp. 172–178.
DOI: 10.1016/j.rser.2015.07.103

[5] Thakare H.R., Monde A., Parekh A.D. Experimental, computational and optimization studies of temperature separation and flow physics of vortex tube: A review // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2015. V. 52. Pp. 1043–1071.
DOI: 10.1016/j.rser.2015.07.198

[6] Борисоглебский И.К., Метусова М.В., Михайленко К.И. Зависимость эффекта Ранка–Хилша от геометрии холодного выхода // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. С. 52–58.
DOI: 10.21662/mfs2018.3.008

[7] Xue Y., Arjomandi M., Kelso R. A critical review of temperature separation in a vortex tube // Experimental Thermal and Fluid Science. 2010. V. 34, No. 8. Pp. 1367–1374.
DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2010.06.010

[8] Majidi D., Alighardashi H., Farhadi F. Best vortex tube cascade for highest thermal separation // International Journal of Refrigeration. 2018. V. 85. Pp. 282–291.
DOI: 10.1016/j.ijrefrig.2017.10.006

[9] Moraveji A., Toghraie D. Computational fluid dynamics simulation of heat transfer and fluid flow characteristics in a vortex tube by considering the various parameters // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. V. 113. Pp. 432–443.
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.05.095

[10] Михайленко К.И. Зависимость перераспределения температуры в вихревой трубе от геометрии завихрителя // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 174–179.
DOI: 10.21662/uim2017.2.026

[11] Михайленко К.И. К моделированию вихревой трубы: подготовка гексагональной сетки для вычислительных экспериментов в среде OpenFOAM // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 112–118.
DOI: 10.21662/uim2016.1.017

[12] Mikhaylenko C.I. Vortex tube modelling: outlet parameter dependencies of cold air production // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1158, No. 3. 032032.
DOI: 10.1088/1742-6596/1158/3/032032

[13] Гуцол А.Ф. Эффект Ранка // Успехи физических наук. 1997. Т. 167, № 6. С. 665–687.
DOI: 10.3367/UFNr.0167.199706e.0665

[14] Khait A., Noskov A., Alekhin V., Bianco V. Analysis of the local entropy generation in a double-circuit vortex tube // Applied Thermal Engineering. 2018. V. 130. Pp. 1391–1403.
DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2017.11.136

[15] Rafiee S., Sadeghiazad M. Experimental and 3D CFD investigation on heat transfer and energy separation inside a counter flow vortex tube using different shapes of hot control valves // Applied Thermal Engineering. 2017. V. 110. Pp. 648–664.
DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2016.08.166

[16] Liu J., Chen S., Gan M., Chen Q. Heat transfer and flow resistance characteristics inside an innovative vortex enhanced tube // Applied Thermal Engineering. 2018. V. 144. Pp. 702–710.
DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2018.04.082

[17] Launder B.E., Spalding D.B.The Numerical Computation of Turbulent Flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 3, No. 2. Pp. 269–289.
DOI: 10.1016/0045-7825(74)90029-2

[18] Адиуллин Б.Р., Михайленко К.И. Влияние длины канала вихревой трубы на температурное разделение воздуха // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 36–43.
DOI: 10.21662/mfs2019.1.005

[19] Adiullin B.R., Mikhaylenko C.I. Influence of the channel length of a vortex tube on the air temperature separation // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1268. 012001.
DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012001

ISSN 2658–5782

14 (2019), **3**, 176–183

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.023
DOI: 10.21662/mfs2019.3.023

Received: 5.06.2019
Accepted: 24.10.2019

The impact of an additional inlet point on the hot outlet side on the vortex tube productivity

Privalov L.Yu.*, **Mikhaylenko C.I.****

*Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia
**Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC of RAS, Ufa, Russia

Based on numerical simulation, the production of cold and hot air on a modified countercurrent vortex tube is studied. A feature of the modification under study is an additional air inlet area along the axis of the pipe from the hot outlet side. An additional point of blowing air is designed to redistribute the gas flows at the cold and hot outlets. Computational experiments were performed in the OpenFOAM software package using the sonicFoam solver based on the $k-\varepsilon$ turbulence model under the assumption of an ideal gas. The dependence of the flow rate and temperature at the cold and hot outlets for different lengths of the main channel of the vortex tube was studied. For all considered pipe lengths, finite-volume grids were prepared in which the rectangular shape of the cells was preferably observed and their excessive stretching was avoided. To speed up the simulations, MPI technology was used; spatial decomposition of the original mesh was performed by decomposePar utility into equal parts along the pipe. This approach allowed us to reduce the computation time by approximately 3.5 times when running on six processes. The results of parallel modeling were combined with the reconstructPar utility and further processed by a Python program written using the vtk library. Thus, average values of the main physical characteristics by time and space at the cold and hot outlets were obtained. Results are discussed that demonstrate the effect of the vortex tube length on temperature and air flow at the respective outputs. The behavior of its main characteristics, non-standard for a vortex tube, is shown, an assumption is made about the reason for this behavior: the collision of very fast flows makes instability. Preliminary conclusions are made about choosing the effective length of the vortex tube with an additional air inlet channel at which the ratio of air temperature at the hot and cold outlets is the largest.

Keywords: Ranque–Hilsch effect, vortex tube, turbulence, OpenFOAM

References

[1] Hilsch R. The use of the expansion of gases in a centrifugal field as cooling process // Review of Sientific Instruments. 1947. V. 18. Pp. 108–113.
DOI: 10.1063/1.1740893

[2] Ranque G.J. Experiments on expantion a vortex with simultaneous exhaust of hot air and cold air // J. Phys. Radium. 1933. V. 4. Pp. 112–114 (in French).

[3] Borisoglebskiy I.K., Metusova M.V., Mikhaylenko C.I. The dependence of the Ranque–Hilsch effect on the cold outlet geometry // Multiphase Systems. 2018. V. 13, No. 3. Pp. 52–58 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2018.3.008

[4] Xue Y., Arjomandi M., Kelso R. A critical review of temperature separation in a vortex tube // Experimental Thermal and Fluid Science. 2010. V. 34, No. 8. Pp. 1367–1374.
DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2010.06.010

[5] Majidi D., Alighardashi H., Farhadi F. Best vortex tube cascade for highest thermal separation // International Journal of Refrigeration. 2018. V. 85. Pp. 282–291.
DOI: 10.1016/j.ijrefrig.2017.10.006

[6] Moraveji A., Toghraie D. Computational fluid dynamics simulation of heat transfer and fluid flow characteristics in a vortex tube by considering the various parameters // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. V. 113. Pp. 432–443.
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.05.095

[7] Thakare H.R., Monde A., Parekh A.D. Experimental, computational and optimization studies of temperature separation and flow physics of vortex tube: A review // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2015. V. 52. Pp. 1043–1071.
DOI: 10.1016/j.rser.2015.07.198

[8] Mikhaylenko C.I. Dependence of the temperature distribution in the vortex tube on the geometry of the swirler // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. 2017. V. 12, No. 2. Pp. 174–179 (in Russian).
DOI: 10.21662/uim2017.2.026

[9] Mikhaylenko C.I. Simulation of the vortex tube: design of a hexagonal mesh for computational experiments in OpenFOAM // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. 2016. V. 11, No. 1. Pp. 112–118 (in Russian).
DOI: 10.21662/uim2016.1.017

[10] Mikhaylenko C.I. Vortex tube modelling: outlet parameter dependencies of cold air production // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1158, No. 3. 032032.
DOI: 10.1088/1742-6596/1158/3/032032

[11] Gutsol A.F. The Ranque effect // Physics-Uspekhi. 1997. V. 40. Pp. 639–658.
DOI: 10.1070/PU1997v040n06ABEH000248

[12] Eiamsa-Ard S., Promvonge P. Review of Ranque-Hilsch effects on vortex tubes // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2008. V. 1. Pp. 1822–1842.
DOI: 10.1016/j.rser.2007.03.006

[13] Subudhi S., Sen M. Review of Ranque–Hilsch vortex tube experiments using air // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2015. V. 52. Pp. 172–178.
DOI: 10.1016/j.rser.2015.07.103

[14] Khait A., Noskov A., Alekhin V., Bianco V. Analysis of the local entropy generation in a double-circuit vortex tube // Applied Thermal Engineering. 2018. V. 130. Pp. 1391–1403.
DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2017.11.136

[15] Rafiee S., Sadeghiazad M. Experimental and 3D CFD investigation on heat transfer and energy separation inside a counter flow vortex tube using different shapes of hot control valves // Applied Thermal Engineering. 2017. V. 110. Pp. 648–664.
DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2016.08.166

[16] Liu J., Chen S., Gan M., Chen Q. Heat transfer and flow resistance characteristics inside an innovative vortex enhanced tube // Applied Thermal Engineering. 2018. V. 144. Pp. 702–710.
DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2018.04.082

[17] Launder B.E., Spalding D.B.The Numerical Computation of Turbulent Flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 3, No. 2. Pp. 269–289.
DOI: 10.1016/0045-7825(74)90029-2

[18] Adiullin B.R., Mikhaylenko C.I. The influence of the vortex tube channel length on the separation of air by its temperature. Multiphase Systems. 14 (2019) 1. 36–43 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2019.1.005

[19] Adiullin B.R., Mikhaylenko C.I. Influence of the channel length of a vortex tube on the air temperature separation // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1268. 012001.
DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012001

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 3, с. 184–201

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.025
DOI: 10.21662/mfs2019.3.025
УДК 517.984.5

Получена: 24.11.2019
Принята: 24.12.2019

Обзор исследований по вырожденным краевым условиям и конечному спектру[1]

Ахтямов А.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа
Башкирский государственный университет, Уфа

Показано, что для несимметрического оператора диффузии случай, когда характеристический определитель тождественно равен нулю, невозможен и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши. В случае симметрического оператора диффузии характеристический определитель тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда краевые условия являются ложнопериодическими краевыми условиями, и тождественно равен константе, отличной от нуля, тогда и только тогда, когда его краевые условия являются обобщенными условиями Коши. Описаны все вырожденные краевые условия для спектральной задачи с дифференциальным уравнением третьего порядка $y'''(x) = \lambda\, y(x)$. Найдена общая форма вырожденных краевых условий для оператора дифференцирования четвертого порядка D^4. Описаны 12 классов краевых задач на собственные значения для оператора D^4, спектр которого заполняет всю комплексную плоскость. Известно, что спектральные задачи, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость, существуют для дифференциальных уравнений любого четного порядка. Джоном Локкером поставлена следующая проблема (одинадцатая проблема): существуют ли подобные задачи для дифференциальных уравнений нечетного порядка? Дан положительный ответ на этот вопрос. Доказано, что спектральные задачи, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость, существуют для дифференциальных уравнений любого нечетного порядка. Таким образом, проблема Джона Локкера решена. Джон Локкер поставил проблему (десятая проблема): может ли спектральная краевая задача иметь конечный спектр? Рассматриваются краевые задачи с полиномиальным вхождением спектрального параметра в дифференциальное уравнение. Покзано, что соответствующая краевая задача может иметь заранее заданный конечный спектр в случае, когда корни характеристического уравнения являются кратными. Если же корни характеристического уравнения не являются кратными, то конечного спектра быть не может. Таким образом, десятая проблема Джона Локкера решена.

Ключевые слова: вырожденные краевые условия, конечный спектр, десятая и одинадцатая проблемы Джона Локкера

1. Введение

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned} -y'' = \lambda\, y = \rho^2\, y,& \\ y(0) - y(\pi) = 0,& \\ y'(0) + y'(\pi) = 0,& \end{aligned} \tag{1}$$

где $y(x)$ — функция, которая описывает какой–либо физический процесс (например, процесс колебания струны); $\rho > 0$ — непрерывная на $[0, \pi]$ постоянная функция (например, плотность струны); λ — собственные значения.

Найдем собственные значения этой задачи. Линейно независимыми решениями дифференциального уравнения задачи (1) являются функции $y_1(x, \rho) = \cos x\, \rho$, $y_1(x, \rho) = (1/\rho) \sin x\, \rho$. Характеристический определитель задачи (1) имеет следующий вид:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} y_1(0) - y_1(\pi) & y_2(0) - y_2(\pi) \\ y_1'(0) + y_1'(\pi) & y_2'(0) + y_2'(\pi) \end{vmatrix} \equiv$$

[1]Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию № 0246-2019-0088.

$$\equiv \begin{vmatrix} 1-\cos\pi\rho & \dfrac{\sin\pi\rho}{\rho} \\ -\rho\,\sin\pi\rho & 1+\cos\pi\rho \end{vmatrix} \equiv$$
$$\equiv (1-\cos\pi\rho)\cdot(1+\cos\pi\rho)-\sin^2\pi\rho \equiv$$
$$\equiv 1-\cos^2\pi\rho-\sin^2\pi\rho \equiv 0.$$

Как видим, характеристический определитель тождественно равен нулю. Это означает, что любое значение комплексной плоскости является собственным значением задачи (1).

Пример 2. Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения:

$$-y'' = \lambda y = \rho^2 y, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0. \qquad (2)$$

Найдем собственные значения этой задачи. Характеристический определитель задачи (2) имеет следующий вид:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 1.$$

Как видим, характеристический определитель тождественно равен единице. Это означает, что задача Коши (2) не имеет собственных значений.

Краевые условия для случая $\Delta(\lambda) \equiv C = \mathrm{const}$ были названы в работе В.А. Марченко [1, С. 35] *вырожденными краевыми условиями*.

В 1927 году М.Х. Стоун опубликовал статью [2], в которой пример 1 обобщен на случай дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля. Стоуном было показано, что, если потенциальная функция $q(x)$ является симметрической (т.е. $q(x)=q(\pi-x)$), то любое комплексное число является точкой спектра краевой задачи

$$y''+\lambda y+q(x)y,$$
$$y(0)-y(\pi)=0,$$
$$y'(0)+y'(\pi)=0.$$

Т.е. спектр этой краевой задачи полностью заполняет всю плоскость.

В книге М.А. Наймарка [3, С. 27] в 1969 году показано, что если коэффициенты обыкновенного линейного дифференциального уравнения являются непрерывными на $[0,1]$, то для спектра задачи (16), (17) (уравнения приведены на стр. 5 настоящей статьи) имеют место следующие две возможности: 1) существует не более счетного числа собственных значений, не имеющих предельных точек в $\mathbb{C}$; 2) каждое $\lambda \in \mathbb{C}$ есть собственное значение.

Прямые и обратные задачи с нераспадающимися краевыми условиями для случая 1 достаточно хорошо изучены (см. например, [4, 5]). Вырожденный случай 2 изучен мало.

Вопрос описания всех краевых задач с вырожденными краевыми условиями связан с описанием всех вольтерровых задач. Вольтерровыми задачами называются задачи, соответствующие дискретным дифференциальным операторам L, у которых обратный оператор L^{-1} вольтерров (см. [6, с. 208]). В случае невырожденных граничных условий для произвольной непрерывной функции $q(x)$ система корневых векторов оператора L полна в $L_2(0,\pi)$ (см. [1, с. 41]). Поэтому вольтерровые задачи находятся среди задач с вырожденными граничными условиями.

В работе А.А. Дезина [7] (1985) было показано, что всевозможные вольтерровые задачи для оператора дифференцирования второго порядка с краевыми условиями (17) (см. стр. 5) при $n=2$ имеют вид:

$$y(0) \mp a\,y(\pi)=0, \quad y'(0) \pm a\,y'(\pi)=0, \qquad (3)$$

где постоянная $a \neq 1$. В статье Б.Н. Биярова и С.А. Джумабаева [8] (1994) аналогичный результат получен для задачи Штурма–Лиувилля с дифференциальным уравнением $-y''+q(x)\,y=\lambda\,y$ с симметрическим потенциалом.

В статье Джона Локкера [9] (1989) описаны все вырожденные краевые условия для оператора дифференцирования второго порядка с краевыми условиями (17) (см. стр. 5) при $n=2$, а в работе А.М. Ахтямова [10] (2016) то же самое сделано для задачи Штурма–Лиувилля. Более точно в [10] показано следующее: если $q(x) \neq q(\pi-x)$ на некотором интервале отрезка $[0,\pi]$, то случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$ невозможен, и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши $y(0)=y'(0)=0$ и $y(\pi)=y'(\pi)=0$. Если $q(x)=q(\pi-x)$, то случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$ реализуется тогда и только тогда, когда краевые условия (17) (см. стр. 5) при $n=2$ являются ложнопериодическими краевыми условиями (15) (см. стр. 5) с $a=1$, а случай $\Delta(\lambda) \equiv C \neq 0$ — тогда и только тогда, когда краевые условия (17) (см. стр. 5) при $n=2$ являются обобщенными условиями Коши (15) с $a \neq 1$.

В работе А.М. Ахтямова [11] (2017) результаты для задач Штурма–Лиувилля обобщены на случай оператора диффузии. Описаны все вырожденные двухточечные краевые условия однородной спектральной задачи для оператора диффузии. Показано, что для несимметрического оператора диффузии случай, когда характеристический определитель тождественно равен нулю, невозможен и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши. В случае симметрического оператора диффузии характеристический определитель тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда краевые условия являются ложнопериодическими краевыми условиями, и тождественно равен константе, отличной от нуля, тогда и только тогда, когда его краевые условия являются обобщенными условиями Коши.

Первые результаты для дифференциальных операторов произвольного четного порядка были получены в 1982 году в работе В.А. Садовничего и Б.Е. Кангужина [12] (1982) (см. также работы Джона Локкера [13] (2006), [14] (2008)). В статье В.А. Садовничего и Б.Е. Кангужина было показано, что для любого четного порядка существуют дифференциальные операторы, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Эти краевые условия имели следующий вид:

$$U_j(y) = y^{(j-1)}(0) + (-1)^{j-1}\, y^{(j-1)}(1) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

А в работе А.С. Макина [15] показано, что, если постоянные коэффициенты $d \neq \pm 1$ и n — четное натуральное число, то характеристический определитель задачи

$$y^{(n)}(x) + \sum_{m=1}^{n} p_m(x) y^{(n-m)}(x) + \lambda y(x) = 0,$$
$$y^{(2\nu-j)}(0) + d(-1)^{j+1} y^{(2\nu-j)}(\pi) = 0.$$

тождественно равен константе, отличной от нуля. Здесь $p_m(x)$ — комплекснозначные функции в $L_1(0,\pi)$. Однако, в связи с этим возникает еще один вопрос, существуют ли другие примеры операторов, помимо приведенных в [12], спектр соответствующих задач для которых полностью заполняет всю комплексную плоскость. В работе А.М. Ахтямова [16] (2017) показано, что такие примеры существуют. Кроме того, описаны все 12 классов краевых задач на собственные значения для оператора D^4, спектр которого заполняет всю комплексную плоскость. Каждый из этих классов краевых условий содержит произвольную константу. Получается, что для оператора дифференцирования четвертого порядка число краевых условий, спектр соответствующих задач для которых полностью заполняет всю комплексную плоскость, бесконечно много (континуум).

До недавнего времени оставался открытым вопрос, сформулированный в частности в работе Джона Локкера [13] в 2006 году: существуют ли спектральные задачи (16), (17) (см. стр. 5) с дифференциальным уравнением нечетного порядка, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. А.М. Ахтямовым в 2017 году [17] было показано, что такие операторы существуют. Для любого нечетного порядка были приведены примеры подобных операторов.

Существуют ли другие примеры подобных операторов? В 2018 году в работе А.М. Ахтямова [18] для оператора дифференцирования третьего порядка дан отрицательный ответ на этот вопрос. Описаны все краевые задачи для оператора дифференцирования третьего порядка, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Для оператора дифференцирования третьего порядка они совпадают с найденными в работе [17]. Причем, в отличие от случая оператора дифференцирования четвертого порядка, для оператора дифференцирования третьего порядка количество краевых задач, спектр которых полностью заполняет всю плоскость, — конечное число. В работе [18] найдены также условия для которых характеристический определитель тождественен константе.

2. Вырожденные краевые условия оператора диффузии

Описаны все вырожденные двухточечные краевые условия однородной спектральной задачи для оператора диффузии. Показано, что для несимметрического оператора диффузии случай, когда характеристический определитель тождественно равен нулю, невозможен и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши. В случае симметрического оператора диффузии характеристический определитель тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда краевые условия являются ложнопериодическими краевыми условиями, и тождественно равен константе, отличной от нуля, тогда и только тогда, когда его краевые условия являются обобщенными условиями Коши. Оператор диффузии представляет собой обобщение оператора Штурма–Лиувилля. Настоящий параграф является кратким изложением статей [10] и [11].

Обозначим через L следующую задачу для оператора диффузии:

$$ly = y'' + \left(\lambda^2 - 2\lambda\, p(x) - q(x)\right) y = 0, \qquad (4)$$

$$U_i(y) = a_{i1}\, y(0) + a_{i2}\, y'(0) + a_{i3}\, y(\pi) + \\ + a_{i4}\, y'(\pi) = 0, \qquad (5)$$

где вещественные функции $p(x) \in W_2^1(0,\pi)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$; a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$ — комплексные постоянные.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{lk} краевых условий (5) через A, а ее миноры, составленные из i-го и j-го столбцов, через M_{ij}:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\|, \quad M_{ij} = \left| \begin{matrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{matrix} \right|,$$
$$i, j = 1, 2, 3, 4.$$

На протяжении всей статьи будем считать, что ранг матрицы A равен двум: $\operatorname{rank} A = 2$.

Собственные значения задачи L являются корнями следующей целой функции ([3, с. 29], [1, с. 33–36]):

$$\Delta(\lambda) = M_{12} + M_{34} + M_{32}\, y_1(\pi, \lambda) + \\ + M_{42}\, y_1'(\pi, \lambda) + M_{13}\, y_2(\pi, \lambda) + M_{14}\, y_2'(\pi, \lambda), \tag{6}$$

где $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \\ y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1.$$

Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$y_1(x, \lambda) = \cos\pi(\lambda - a) - a_1 \frac{\cos\pi(\lambda - a)}{\lambda} + \\ + \pi c_1 \frac{\sin\pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

$$y_2(x, \lambda) = \frac{\sin\pi(\lambda - a)}{\lambda} + a_0 \frac{\sin\pi(\lambda - a)}{\lambda^2} - \\ - \pi c_1 \frac{\cos\pi(\lambda - a)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_2(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

$$y_1'(x, \lambda) = -\lambda \sin\pi(\lambda - a) + a_0 \sin\pi(\lambda - a) + \\ + \pi c_1 \cos\pi(\lambda - a) + \int_{-\pi}^{\pi} \psi_3(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

$$y_2'(x, \lambda) = \cos\pi(\lambda - a) + a_1 \frac{\cos\pi(\lambda - a)}{\lambda} + \\ + \pi c_1 \frac{\sin\pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_4(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

где

$$a = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(t)\, dt, \quad a_0 = \frac{1}{2}\,(p(0) + p(\pi)),$$
$$a_1 = \frac{1}{2}\,(p(0) - p(\pi)),$$
$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (q(t) + p^2(t))\, dt,$$
$$\psi_i(t) \in L_2[0, \pi], \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

для достаточно большого $\lambda \in \mathbb{R}$ ([24, 25]).

Из этих соотношений следует, что линейно независимы функции $y_1(\pi, \lambda)$, $y_1'(\pi, \lambda)$, $y_2(\pi, \lambda)$, 1, входящие в разложение функции $\Delta(\lambda)$. Если добавить к этим функциям еще и функцию $y_2'(\pi, \lambda)$, то соответствующая система функций является линейно независимой тогда и только тогда, когда $p(x) \neq p(\pi - x)$ или (и) $q(x) \neq q(\pi - x)$ на некотором интервале из отрезка $[0, \pi]$. Это следует из того, что тождество $y_1(\pi, \lambda) \equiv y_2'(\pi, \lambda)$ верно тогда и только тогда, когда $p(x) = p(\pi - x)$ и $q(x) = q(\pi - x)$ [26, Лемма 3] (равенства функций понимаются в смысле равенств в пространствах функций, в которых они заданы).

Если $p(x) \neq p(\pi - x)$ или (и) $q(x) \neq q(\pi - x)$ и $\Delta(\lambda) \equiv C = \mathrm{const}$, то из (6) и линейной независимости соответствующих функций следуют равенства:

$$M_{12} + M_{34} = C, \quad M_{32} = 0, \quad M_{42} = 0, \\ M_{13} = 0, \quad M_{14} = 0. \tag{7}$$

Для нахождения миноров M_{12} и M_{34} воспользуемся тем, что произвольные числа не могут быть минорами матрицы. Для того чтобы числа M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34} были минорами матрицы необходимо и достаточно, чтобы выполнялись так называемые соотношения Плюккера [23]:

$$M_{12}\, M_{34} - M_{13}\, M_{24} + M_{14}\, M_{23} = 0. \tag{8}$$

(Миноры M_{23}, M_{24} из равенств (8) отличаются от миноров M_{32}, M_{42} из равенств (7) только знаком). Из (7) и (8) получаем два набора миноров:

$$M_{12} = C \neq 0, \quad M_{34} = 0, \quad M_{32} = 0, \\ M_{42} = 0, \quad M_{13} = 0, \quad M_{14} = 0; \tag{9}$$

$$M_{12} = 0, \quad M_{34} = C \neq 0, \quad M_{32} = 0, \\ M_{42} = 0, \quad M_{13} = 0, \quad M_{14} = 0. \tag{10}$$

Случай $C = 0$ (а, значит, и случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$) не может быть реализован, поскольку равенство нулю всех определителей второго порядка противоречит условию $\operatorname{rank} A = 2$. По наборам миноров (9) и (10) с помощью методов идентификации матрицы по ее минорам [23] однозначно определяются краевые условия (5) (т.е. матрица A находится с точностью до линейных преобразований ее строк). Набору миноров (9) соответствуют условия Коши $y(0) = y'(0) = 0$, а набору миноров (10) — $y(\pi) = y'(\pi) = 0$.

Таким образом, верна

Теорема 1. *Если $p(x) \neq p(\pi - x)$ или(и) $q(x) \neq q(\pi - x)$ на некотором интервале из отрезка $[0, \pi]$, то случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$ невозможен, и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши $y(0) = y'(0) = 0$ и $y(\pi) = y'(\pi) = 0$.*

Если $p(x) = p(\pi - x)$, $q(x) = q(\pi - x)$ и $\Delta(\lambda) \equiv C = \mathrm{const}$, то из (6) и линейной независимости соответствующих функций следуют равенства:

$$M_{12} + M_{34} = C, \quad M_{32} + M_{14} = 0, \\ M_{42} = 0, \quad M_{13} = 0. \tag{11}$$

Из (8) и (11) получаем два набора миноров:

$$\begin{gathered} M_{12}=C_1,\quad M_{34}=C-C_1,\\ M_{32}=\mp\sqrt{C_1\,(C_1-C)},\\ M_{42}=0,\quad M_{13}=0,\\ M_{14}=\pm\sqrt{C_1\,(C_1-C)}. \end{gathered}\tag{12}$$

Если $C=0$ (случай $\Delta(\lambda)\equiv 0$), то из (12) вытекают равенства:

$$\begin{gathered} M_{12}=C_1,\quad M_{34}=-C_1,\\ M_{32}=\mp C_1,\quad M_{42}=0,\\ M_{13}=0,\quad M_{14}=\pm C_1. \end{gathered}\tag{13}$$

По этим наборам миноров с помощью методов идентификации матрицы по ее минорам [23] однозначно получаем два вида краевых условий:

$$y(0)\mp y(\pi)=0,\quad y'(0)\pm y'(\pi)=0.\tag{14}$$

Условия (14) в [10] названы *ложнопериодическими*, так как они являются вырожденными и отличаются от невырожденных периодических или антипериодических краевых условий переменой только одного знака (с плюса на минус или с минуса на плюс).

Если $C\neq 0$ (случай $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$), то вид краевых условий зависит от того, какие из миноров (12) отличны от нуля. Если $C-C_1=0$, то получаем условия Коши $y(0)=y'(0)=0$, если $C_1=0$, то получаем условия Коши $y(\pi)=y'(\pi)=0$, если $C-C_1\neq 0$ и $C_1\neq 0$, то получаем условия:

$$y(0)\mp a\,y(\pi)=0,\quad y'(0)\pm a\,y'(\pi)=0,\tag{15}$$

где $a=\sqrt{(C_1-C)/(C_1)}\neq 1$. Эти условия (условия вида (15), где $0\leqslant a\leqslant\infty$ и $a\neq 1$) в [10] названы *обобщенными условиями Коши.*

Следовательно, верна

Теорема 2. *Если $p(x)=p(\pi-x)$ и $q(x)=q(\pi-x)$, то случай $\Delta(\lambda)\equiv 0$ реализуется тогда и только тогда, когда краевые условия (5) являются ложнопериодическими краевыми условиями (14), а случай $\Delta(\lambda)\equiv C\neq 0$ — тогда и только тогда, когда условия (5) являются обобщенными условиями Коши (15).*

3. Вырожденные краевые условия для дифференциального уравнения третьего порядка

3.1. Основные результаты

Рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу:

$$y'''(x)=\lambda\,y(x)=s^3\,y(x),\qquad x\in[0,1]\tag{16}$$

$$\begin{gathered} U_j(y)=\sum_{k=1}^{3}a_{jk}\,y^{(k-1)}(0)+\\ +\sum_{k=1}^{3}a_{j\,k+n}\,y^{(k-1)}(1)=0,\qquad j=1,2,3. \end{gathered}\tag{17}$$

Матрицу из коэффициентов краевых условий (17) обозначим через A:

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{matrix}\right\|,\tag{18}$$

где

$$\operatorname{rank}A=3.\tag{19}$$

В настоящем параграфе получены следующие результаты:

Теорема 1. *Краевые задачи (16), (17) не могут иметь спектра, состоящего из конечного числа собственных значений.*

Теорема 2. *Краевые условия (17) могут быть вырожденными только для задач с матрицами (18), которые с точностью до линейных преобразований строк совпадают с матрицами следующих двух видов:*

$$A_1=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_3 \end{matrix}\right\|,\tag{20}$$

и

$$A_2=\left\|\begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|.\tag{21}$$

Теорема 3. *Краевые условия задачи (16), (17) являются вырожденными тогда и только тогда, когда матрица (18) коэффициентов краевых условий (17) с точностью до линейных преобразований строк совпадает с матрицей (20) или матрицей (21), где числа a_1, a_2 и a_3 являются тремя различными корнями некоторого числа, а $\Delta(\lambda)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда числа a_1, a_2 и a_3 являются тремя различными корнями из минус единицы.*

3.2. Свойство линейно независимых решений

Спектральная задача (16), (17) при $n=3$ имеет следующий характеристический определитель $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3)\\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) \end{vmatrix},\tag{22}$$

где $y_j = y_j(x,s)$ — следующие линейно независимые решения уравнения (16), удовлетворяющие условиям

$$y_j^{(k-1)} = \begin{cases} 1, \text{ при } k = j \\ 0, \text{ при } k \neq j \end{cases} :$$

$$y_1 = \frac{1}{3}\exp(-s\,x) + \frac{2}{3}\exp\left(\frac{1}{2}sx\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right),$$

$$y_2 = -\frac{1}{3s}\exp(-sx) + \frac{\sqrt{3}}{3s}\exp\left(\frac{1}{2}sx\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) + \\ + \frac{1}{3s}\exp\left(\frac{1}{2}sx\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right),$$

$$y_3 = \frac{1}{3s^2}\exp(-sx) + \frac{\sqrt{3}}{3s^2}\exp\left(\frac{1}{2}sx\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) - \\ - \frac{1}{3s^2}\exp\left(\frac{1}{2}sx\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right),$$

Лемма 1. Функции $y_{j-1}^{(k-1)}(1,\lambda)$ и $y_j^{(k)}(1,\lambda)$ тождественно равны:

$$y_{j-1}^{(k-1)}(1,\lambda) \equiv y_j^{(k)}(1,\lambda), \qquad k,j = 1,2,3. \tag{23}$$

Утверждение леммы 1 проверяется непосредственным вычислением.

Обозначим через B матрицу следующего вида:

$$B = \left\| \begin{matrix} y_1(0) & y_1'(0) & y_1''(0) & y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) \\ y_2(0) & y_2'(0) & y_2''(0) & y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) \\ y_3(0) & y_3'(0) & y_3''(0) & y_n(1) & y_3'(1) & y_3''(1) \end{matrix} \right\| = \\ = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) \\ 0 & 1 & 0 & y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) \\ 0 & 0 & 1 & y_3(1) & y_3'(1) & y_3''(1) \end{matrix} \right\| = \|B_1, B_2\|.$$

Таким образом, матрица B состоит из двух квадратных матриц B_1 и B_2. Определители этих матриц представляют собой Вронскианы в точках $x = 0$ и $x = 1$ соответственно: $\det(B_1) = W(0)$, $\det(B_2) = W(1)$. Из формулы Лиувилля для определителя Вронского [27, с. 95–96] следует, что

$$\det(B_1) = W(0) = 1, \quad \det(B_2) = W(1) = 1.$$

С помощью матриц A и B определитель (22) можно представить следующим образом:

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(A \cdot B^T).$$

Разложив последний определитель с помощью формулы Бине–Коши получим [28, п. 1.14, С. 41-42]:

$$\Delta(\lambda) = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant 2n} A_{i_1,i_2,i_3}\, B_{i_1,i_2,i_3}(s) = 0. \tag{24}$$

Здесь через A_{i_1,i_2,i_3} обозначены миноры, составленные из i_1-го, i_2-го, i_3-го столбцов матрицы A соответственно, а через B_{i_1,i_2,i_3} — из i_1-го, i_2-го, i_3-го столбцов матрицы B или, что то же самое, строк транспонированной матрицы B^T.

Обозначим через $P(s)$ сумму первого слагаемого $A_{123}\,B_{123}$ и последнего слагаемого $A_{456}\,B_{456}$ в разложении (24), а через $S(s)$ — сумму всех остальных слагаемых из разложения (24). То есть

$$\Delta(\lambda) = S(s) + P(s).$$

Функция $P(s)$ тождественно равна константе:

$$P(s) \equiv A_{123} \cdot W(0) + A_{456} \cdot W(1) = \\ = A_{123} + A_{456} = \text{const}.$$

Каждое слагаемое суммы $S(s)$ содержит линейные комбинации экспонент $e^{\omega_j s x}$ или $e^{\sum_j \omega_j s x}$. Аргументы этих экспоненциальных функций не обращаются в нуль, а коэффициенты-множители перед экспонентами не совпадают. Ниже будет показано, что характеристический определитель (24) тождественно равен константе только в случае, когда $S(s) \equiv 0$, причем эта константа равна $A_{123} + A_{456}$.

Отсюда

$$\Delta(\lambda) = A_{123} + A_{456} + A_{124}\,B_{124} + A_{125}\,B_{125} + \\ + A_{126}\,B_{126} + A_{134}\,B_{134} + A_{135}\,B_{135} + A_{136}\,B_{136} + \\ + A_{145}\,B_{145} + A_{146}\,B_{146} + A_{156}\,B_{156} + A_{234}\,B_{234} + \\ + A_{235}\,B_{235} + A_{236}\,B_{236} + A_{245}\,B_{245} + A_{246}\,B_{246} + \\ + A_{256}\,B_{256} + A_{345}\,B_{345} + A_{346}\,B_{346} + A_{356}\,B_{356}.$$

Из леммы 1 следует, что

$$B_2 = \left\| \begin{matrix} y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) \\ y_2(1) & y_1(1) & y_1'(1) \\ y_3(1) & y_2(1) & y_1(1) \end{matrix} \right\|.$$

Кроме того, $y_1'(1)\,y_2(1) = y_1''(1)\,y_3(1)$. Поэтому

$$\Delta(\lambda) = (A_{123} + A_{456}) + A_{124}\,y_3(1) + \\ + (A_{125} - A_{134})\,y_2(1) + (A_{126} - A_{135} + A_{234})\,y_1(1) + \\ + (-A_{136} + A_{235})\,y_1'(1) + (A_{156} - A_{246} + A_{345}) \times \\ \times (y_1^2(1) - y_1'(1)\,y_2(1)) + A_{145}\,(y_2^2(1) - y_1(1)y_3(1)) + \\ + (A_{146} - A_{245})(y_1(1)\,y_2(1) - y_1'(1)\,y_3(1)) + \\ + A_{236}\,y_1''(1) + (-A_{256} + A_{346})\,(y_1(1)\,y_1'(1) - \\ - y_1''(1)\,y_2(1)) + A_{356}\,((y_1'(1))^2 - y_1(1)\,y_1''(1)).$$

где

$$y_1(1) = \frac{1}{3}\,e^{-s} + \frac{2}{3}\,e^{\frac{s}{2}}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right),$$
$$y_2(1) = -\frac{1}{3s}e^{-s} + \frac{\sqrt{3}}{3s}e^{\frac{s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3s}e^{\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right),$$
$$y_3(1) = \frac{1}{3s^2}e^{-s} + \frac{\sqrt{3}}{3s^2}e^{\frac{s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3s^2}e^{\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right),$$

$$y_1'(1) = -\frac{s}{3}e^{-s} + \frac{s}{3}e^{\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \frac{\sqrt{3}s}{3}e^{\frac{s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right),$$
$$y_1''(1) = \frac{s^2}{3}e^{-s} - \frac{s^2}{3}e^{\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}s^2}{3}e^{\frac{s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right),$$
$$y_1^2(1) - y_1'(1)\,y_2(1) = \frac{1}{3}\,e^{s} + \frac{2}{3}\,e^{-\frac{s}{2}}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right),$$
$$y_1^2(1) - y_1(1)y_3(1) = -\frac{1}{9\,s^2}\,\left(-e^{-2\,s}\,s^2 - 4\,e^{-\frac{s}{2}}\,s^2\times\right.$$
$$\times\cos\left(\frac{s\,\sqrt{3}}{2}\right) + e^{-2\,s} + e^{-\frac{s}{2}}\,\cos\left(\frac{s\,\sqrt{3}}{2}\right) + e^{-\frac{s}{2}}\times$$
$$\times\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\,\sqrt{3} - -2\,e^{s}\,\cos^2\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\,(2\,s^2+1) +$$
$$\left. +2\,\sqrt{3}\,e^{s}\,\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\,\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\right),$$
$$y_1(1)\,y_2(1) - y_1'(1)\,y_3(1) = \frac{1}{3s}\,e^{\frac{s}{2}}\left(e^{-s}\sin\left(\frac{s\,\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3} -\right.$$
$$\left. -e^{-s}\,\cos\left(\frac{s\,\sqrt{3}}{2}\right) + e^{\frac{s}{2}}\right),$$
$$y_1(1)\,y_1'(1) - y_1''(1)\,y_2(1) = -\frac{s}{3}\,e^{\frac{s}{2}}\left(e^{-s}\,\cos\left(\frac{s\,\sqrt{3}}{2}\right) +\right.$$
$$\left. +e^{-s}\,\sin\left(\frac{s\,\sqrt{3}}{2}\right)\,\sqrt{3} - e^{\frac{s}{2}}\right),$$
$$(y_1'(1))^2 - y_1''(1)\,y_1(1) = \frac{s^2}{3}\,e^{\frac{s}{2}}\left(\sqrt{3}\,e^{-s}\sin\left(\frac{s\,\sqrt{3}}{2}\right) -\right.$$
$$\left. -e^{-s}\,\cos\left(\frac{s\,\sqrt{3}}{2}\right) + e^{\frac{s}{2}}\right).$$

Из представления характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ видно, что он является целой функцией класса К [29, 30]. А поэтому количество его корней бесконечно и имеет асимптотические представления, выписанные в работах [29, 30]. Это доказывает теорему 1.

3.3. Вид краевых задач с вырожденными краевыми условиями

Далее нам понадобятся следующие три определения:

1. *Характеристической суммой* определителя B_{i_1,i_2,i_3} (а также соответствующего определителя A_{i_1,i_2,i_3}) будем называть сумму всех его индексов и обозначать r_0: $r_0 = i_1 + i_2 + i_3$.

2. Пусть количество индексов i_k определителя B_{i_1,i_2,i_3}, для которых выполняется неравенство $1 \leqslant i_k \leqslant 3$, равно r_1, а количество индексов i_k определителя B_{i_1,i_2,i_3}, для которых выполняется неравенство $4 \leqslant i_k \leqslant 6$, равно r_2. Тогда упорядоченную тройку чисел (r_0, r_1, r_2) будем называть *характеристическим индексом* определителя B_{i_1,i_2,i_3} (A_{i_1,i_2,i_3}).

3. Из разложения характеристического определителя, полученного выше, и леммы 1 видно, что определители B_{i_1,i_2,i_3}, имеющие различные характеристические индексы, линейно независимы и отличаются показателями степеней s^k, определители же B_{i_1,i_2,i_3}, имеющие одинаковые характеристические индексы, совпадают или отличаются только знаком. Определители B_{i_1,i_2,i_3} (A_{i_1,i_2,i_3})), которые имеют одинаковые характеристические индексы, будем называть *подобными*.

Если $S(s) \equiv 0$, то один из миноров A_{123} или A_{456} отличен от нуля. Иначе получили бы, что все миноры матрицы A третьего порядка равны нулю, что противоречит тому, что $\operatorname{rank} A = 3$. Действительно, из представления для характеристического определителя, линейной независимости соответствующих функций получаем следующие равенства:

$$\begin{gathered} A_{124} = A_{145} = A_{236} = A_{356} = 0, \\ A_{126} - A_{135} + A_{234} = A_{156} - A_{246} + A_{345} = 0, \\ A_{125} - A_{134} = A_{235} - A_{136} = A_{146} - A_{245} = \\ = A_{346} - A_{256} = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Из алгебраической геометрии известно, что числа $A_{i_1 i_2 i_3}$ являются минорами матрицы A, тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Плюккера [23]. Для матрицы A размера 3 на 6 эти соотношения таковы:

$$\begin{gathered}
A_{i_1 i_4 i_5}A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_4 i_3}A_{i_1 i_2 i_5} + A_{i_1 i_5 i_3}A_{i_1 i_2 i_4} = 0, \\
A_{i_1 i_4 i_6}A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_4 i_3}A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_1 i_6 i_3}A_{i_1 i_2 i_4} = 0, \\
A_{i_1 i_5 i_6}A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_5 i_3}A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_1 i_6 i_3}A_{i_1 i_2 i_5} = 0, \\
A_{i_2 i_4 i_5}A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_4 i_3}A_{i_1 i_2 i_5} + A_{i_2 i_5 i_3}A_{i_1 i_2 i_4} = 0, \\
A_{i_2 i_4 i_6}A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_4 i_3}A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_2 i_6 i_3}A_{i_1 i_2 i_4} = 0, \\
A_{i_2 i_5 i_6}A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_5 i_3}A_{i_1 i_2 i_6} + A_{i_2 i_6 i_3}A_{i_1 i_2 i_5} = 0, \\
A_{i_3 i_4 i_5}A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_4 i_3}A_{i_1 i_3 i_5} + A_{i_2 i_5 i_3}A_{i_1 i_3 i_4} = 0, \\
A_{i_3 i_4 i_6}A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_4 i_3}A_{i_1 i_3 i_6} + A_{i_2 i_6 i_3}A_{i_1 i_3 i_4} = 0, \\
A_{i_3 i_5 i_6}A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_2 i_5 i_3}A_{i_1 i_3 i_6} + A_{i_2 i_6 i_3}A_{i_1 i_3 i_5} = 0, \\
A_{i_4 i_5 i_6}A_{i_1 i_2 i_3} - A_{i_1 i_2 i_4}A_{i_3 i_5 i_6} + \\
+ A_{i_1 i_2 i_5}A_{i_3 i_4 i_6} - A_{i_1 i_2 i_6}A_{i_3 i_4 i_5} = 0,
\end{gathered}$$

где $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ такая перестановка, что $A_{i_1,i_2,i_3} \neq 0$. Если $A_{123} = A_{456} = 0$, то из этих соотношений, а также из равенств (25), следует, что все миноры $A_{i_1 i_2 i_3}$ матрицы A обращаются в нуль, что противоречит тому, что rank $A = 3$. Следовательно, если $S(s) \equiv 0$, то один из миноров A_{123} или A_{456} отличен от нуля.

Пусть $A_{123} \neq 0$. Тогда матрица (18) с точностью до линейных преобразований строк имеет следующий вид:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{matrix} \right\|.$$

(Здесь a_{ij}, вообще говоря, не совпадают с коэффициентами a_{ij} из (18). Мы не стали обозначать их другими символами, чтобы не загромождать работу обилием обозначений. Из контекста всегда понятно о каких коэффициентах идет речь.)

Покажем, что из условия $S(s) \equiv 0$ вытекает, что матрица A с точностью до линейных преобразований строк имеет вид (20), т.е. подматрица, составленная из последних трех столбцов, имеет диагональный вид.

Заметим, что среди определителей B_{i_1,i_2,i_3} в сумме $S(s)$ определитель $B_{236} = y_1''(1)$ не имеет подобных, а значит, он линейно независим с любым другим слагаемым суммы $S(s)$. Тогда из тождества $S(s) \equiv 0$ вытекает, что $A_{236} = 0$. Разложив этот определитель, получаем:

$$A_{236} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{16} \\ 1 & 0 & a_{26} \\ 0 & 1 & a_{36} \end{vmatrix} = a_{16} = 0. \qquad (26)$$

Покажем теперь, что элементы a_{15} и a_{26}, стоящие на второй верхней диагонали матрицы A, также равны нулю.

Среди определителей B_{i_1,i_2,i_3} в сумме $S(s)$ определитель $B_{356} = (y_1'(1))^2 - y_1(1)\, y_1''(1)$ не имеет подобных и линейно независим с любым другим слагаемым суммы $S(s)$. Тогда из тождества $S(s) \equiv 0$ вытекает, что $A_{356} = 0$. Разложив этот определитель, получаем:

$$A_{356} = \begin{vmatrix} 0 & a_{15} & 0 \\ 0 & a_{25} & a_{26} \\ 1 & a_{35} & a_{36} \end{vmatrix} = a_{15}\, a_{26} = 0.$$

Откуда

$$a_{15}\, a_{26} = 0. \qquad (27)$$

Далее, определители $B_{235} = y_1'(1)$ и B_{136} подобны. Они не имеют подобных среди остальных определителей B_{i_1,i_2,i_3} в сумме $S(s)$. Поэтому имеем

$$A_{235} + A_{136} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{15} \\ 1 & 0 & a_{25} \\ 0 & 1 & a_{35} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 1 & a_{36} \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда следует равенство:

$$a_{15} + a_{26} = 0. \qquad (28)$$

Из (27) и (28) получаем равенства

$$a_{15} = a_{26} = 0, \qquad (29)$$

которые означают, что диагональ, состоящая из элементов a_{15} и a_{26}, состоит из нулей.

Аналогично показывается, что любая диагональ ниже главной состоит из нулей.

Если $A_{456} \neq 0$, то из условия $S(s) \equiv 0$ для всех $\lambda = s^2 \neq 0$ следует, что матрица A имеет вид (21), т.е. подматрица, составленная из первых n столбцов, имеет диагональный вид. Это доказывается также, как и в случае $A_{123} \neq 0$. Таким образом, теорема 2 доказана.

3.4. Описание всех вырожденных краевых условий для оператора дифференцирования третьего порядка

Согласно теореме 2 среди всех краевых задач (16), (17) при $n = 3$ вырожденные краевые условия могут иметь только краевые задачи с матрицами A, которые с точностью до линейных преобразований строк совпадают с матрицами двух видов (20) и (21).

Спектральная задача (16), (17) с матрицей краевых условий A_1 имеет следующий характеристический определитель $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = \left(a_1 a_2 + a_1\, a_3 + a_2\, a_3\right) \left(\left(y_3''(1)\right)^2 - y_3'(1)\, y_3'''(1) \right) + \\ + \left(a_1 + a_2 + a_3\right) y_3''(1) + a_1\, a_2\, a_3 + 1.$$

Тождество

$$\Delta(\lambda) \equiv C = \mathrm{const}$$

выполняется тогда и только тогда, когда числа a_1, a_2 и a_3 являются решениями следующей системы уравнений:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad a_1\, a_2 + a_1\, a_3 + a_2\, a_3 = 0, \\ a_1\, a_2\, a_3 + 1 = C = \mathrm{const}. \qquad (30)$$

Решением системы (30) являются следующие коэффициенты краевых условий:

$$a_1 = C_1, \quad a_2 = \frac{C_1}{2}\,(-1 \pm \sqrt{3}\, i), \\ a_3 = -\frac{C_1}{2}\,(1 \pm \sqrt{3}\, i), \qquad (31)$$

где C_1 — произвольное число, являющееся решением уравнения

$$C_1^3 = C - 1.$$

В частности, $\Delta(\lambda) \equiv 0$ для задачи (16), (17) с матрицей коэффициентов (20) тогда и только тогда, когда числа a_1, a_2 и a_3 являются корнями из минус единицы.

Ввиду равноправия концов аналогичные выводы справедливы и для задачи (16), (17) с матрицей коэффициентов (21).

Таким образом, вырожденными краевыми условиями (17) для уравнения (16) являются только краевые условия с матрицей коэффициентов (20) или (21), где числа a_1, a_2 и a_3 являются тремя различными корнями некоторого числа, а $\Delta(\lambda) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда числа a_1, a_2 и a_3 являются тремя различными корнями из минус единицы.

4. Вырожденные краевые условия для оператора D^4

4.1. Основные результаты

Рассмотрим следующую краевую задачу для оператора D^4:

$$y^{(4)}(x) = \lambda\, y(x) = s^4\, y(x), \qquad x \in [0,1], \tag{32}$$

$$\begin{gathered} U_j(y) = \sum_{k=0}^{n} a_{jk}\, y^{(k-1)}(0) + \\ + \sum_{k=0}^{n} a_{j\,k+n}\, y^{(k-1)}(1) = 0, \\ j,k = 1,2,3,4. \end{gathered} \tag{33}$$

Хорошо известен пример дифференциального оператора четного порядка, спектр которого заполняет всю комплексную плоскость [12] (см. также [13]). В этом примере краевые условия (33) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} U_j(y) = y^{(j-1)}(0) + (-1)^{j-1}\, y^{(j-1)}(1) = 0, \\ j = 1,2,3,4. \end{gathered} \tag{34}$$

Обозначим матрицу, состоящую из коэффициентов a_{lk} краевых условий (33) через A, а через A_{i_1,i_2,i_3,i_4} обозначим минор матрицы A, составленный из i_1-го, i_2-го, i_3-го и i_4-го столбцов матрицы A:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \end{matrix} \right\|. \tag{35}$$

$$A_{i_1,i_2,i_3,i_4} = \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & a_{1,i_3} & a_{1,i_4} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & a_{2,i_3} & a_{2,i_4} \\ a_{3,i_1} & a_{3,i_2} & a_{3,i_3} & a_{3,i_4} \\ a_{4,i_1} & a_{4,i_2} & a_{4,i_3} & a_{4,i_4} \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Далее будем предполагать, что ранг матрицы A равен 4:

$$\operatorname{rank} A = 4. \tag{37}$$

Целью этого параграфа является доказательство следующих теорем:

Теорема 1. *Матрица (35) коэффициентов краевых условий (33) имеет следующий вид:*

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{matrix} \right\| \tag{38}$$

или

$$A_2 = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \tag{39}$$

где a_i $(i = 1,2,3,4)$ — некоторые числа.

Теорема 2. *Характеристический определитель задачи (32),(33) тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда матрица (35) коэффициентов краевых условий (33) имеет вид (38) или (39), где $\{a_i\}$ $(i = 1,2,3,4)$ — следующие:*

$$\begin{aligned} &1.\ a_1 = C_1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = C_1^{-1}, \quad a_4 = 1, \\ &2.\ a_1 = C_2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = C_2^{-1}, \quad a_4 = -1, \\ &3.\ a_1 = C_3, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = -1, \\ &4.\ a_1 = C_4, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 1, \\ &5.\ a_1 = -1, \quad a_2 = C_5, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 1, \\ &6.\ a_1 = -1, \quad a_2 = C_6, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = C_6^{-1}, \\ &7.\ a_1 = 1, \quad a_2 = C_7, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = C_7^{-1}, \\ &8.\ a_1 = 1, \quad a_2 = C_8, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = -1, \\ &9.\ a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = C_9, \quad a_4 = 1, \\ &10.\ a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = -1, \\ &11.\ a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1 \quad a_4 = C_{11}, \\ &12.\ a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = C_{12}. \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь C_j $(j = 1,2,\ldots,12)$ — произвольные константы.

4.2. Вид вырожденных краевых условий

В настоящем пункте приведено доказательство теоремы 1.

Собственные значения задачи (32), (33) являются корнями целой функции [3, С. 26] $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}, \quad (41)$$

где

$$y_1 = \frac{1}{4}\exp(s\,x) + \frac{1}{4}\exp(-s\,x) + \frac{1}{2}\cos(s\,x),$$
$$y_2 = \frac{1}{4\,s}\exp(s\,x) - \frac{1}{4\,s}\exp(-s\,x) + \frac{1}{2\,s}\sin(s\,x),$$
$$y_3 = \frac{1}{4\,s^2}\exp(s\,x) + \frac{1}{4\,s^2}\exp(-s\,x) - \frac{1}{2\,s^2}\cos(s\,x),$$
$$y_4 = \frac{1}{4\,s^3}\exp(s\,x) - \frac{1}{4\,s^3}\exp(-s\,x) - \frac{1}{2\,s^3}\sin(s\,x),$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (32), удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0,\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq r, \\ 1 \text{ при } j = r, \end{cases} \quad j,\, r = 1,\, 2,\, 3,\, 4. \quad (42)$$

Через B, B_1 и B_2 обозначим следующие матрицы:

$$B = \begin{Vmatrix} B_1 & B_2 \end{Vmatrix},$$

где

$$B_1 = \begin{Vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) & y_1''(0) & y_1'''(0) \\ y_2(0) & y_2'(0) & y_2''(0) & y_2'''(0) \\ y_3(0) & y_3'(0) & y_3''(0) & y_3'''(0) \\ y_4(0) & y_4'(0) & y_4''(0) & y_4'''(0) \end{Vmatrix},$$

$$B_2 = \begin{Vmatrix} y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) & y_1'''(1) \\ y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) & y_2'''(1) \\ y_3(1) & y_3'(1) & y_3''(1) & y_3'''(1) \\ y_4(1) & y_4'(1) & y_4''(1) & y_4'''(1) \end{Vmatrix}.$$

Здесь

$$y_1(1) = \frac{1}{4}\left(e^s + e^{-s} + 2\cos(s)\right),$$
$$y_1'(1) = \frac{1}{4}\,s\left(e^s - e^{-s} - 2\sin(s)\right),$$
$$y_1''(1) = \frac{1}{4}\,s^2\left(e^s + e^{-s} - 2\cos(s)\right),$$
$$y_1'''(1) = \frac{1}{4}\,s^3\left(e^s - e^{-s} + 2\sin(s)\right),$$
$$y_2(1) = \frac{1}{4\,s}\left(e^s - e^{-s} + 2\sin(s)\right),$$
$$y_2'(1) = \frac{1}{4}\left(e^s + e^{-s} + 2\cos(s)\right),$$
$$y_2''(1) = \frac{1}{4}\,s\left(e^s - e^{-s} - 2\sin(s)\right),$$
$$y_2'''(1) = \frac{1}{4}\,s^2\left(e^s - e^{-s} - 2\cos(s)\right),$$
$$y_3(1) = \frac{1}{4\,s^2}\left(e^s - e^{-s} - 2\cos(s)\right),$$
$$y_3'(1) = \frac{1}{4\,s}\left(e^s - e^{-s} + 2\sin(s)\right),$$
$$y_3''(1) = \frac{1}{4}\left(e^s + e^{-s} + 2\cos(s)\right),$$
$$y_3'''(1) = \frac{1}{4}\,s\left(e^s - e^{-s} - 2\sin(s)\right),$$
$$y_4(1) = \frac{1}{4\,s^3}\left(e^s - e^{-s} - 2\sin(s)\right),$$
$$y_4'(1) = \frac{1}{4\,s^2}\left(e^s + e^{-s} - 2\cos(s)\right),$$
$$y_4''(1) = \frac{1}{4\,s}\left(e^s - e^{-s} + 2\sin(s)\right),$$
$$y_4'''(1) = \frac{1}{4}\left(e^s + e^{-s} + 2\cos(s)\right).$$

Заметим, что

$$y_{j-1}^{(k-1)}(1,\lambda) \equiv y_j^{(k)}(1,\lambda), \quad j = 2,3,4,5 \quad k = 1,2,3,4. \quad (43)$$

Из (42) и (43) следует, что

$$B = \|B_1, B_2\|, \quad (44)$$

где

$$B_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$B_2 = \begin{Vmatrix} y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) & y_1'''(1) \\ y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) & y_2'''(1) \\ y_3(1) & y_3'(1) & y_3''(1) & y_3'''(1) \\ y_4(1) & y_4'(1) & y_4''(1) & y_4'''(1) \end{Vmatrix}.$$

С помощью матриц A и B определитель (41)

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) & y_1'''(1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_2(1) & y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3(1) & y_2(1) & y_1(1) & y_1'(1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4(1) & y_3(1) & y_2(1) & y_1(1) \end{Vmatrix}$$

записывается в следующем виде:

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(A \cdot B^T).$$

Из формул Бине–Коши [28, 1.14] следует, что

$$\Delta(\lambda) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant 8} A_{i_1,i_2,i_3,i_4}\, B_{i_1,i_2,i_3,i_4} = 0. \quad (45)$$

Здесь через $B_{i_1,i_2,i_3,i_4} = B_{i_1,i_2,i_3,i_4}(\lambda)$ обозначен минор, составленный из i_1-й, i_2-й, i_3-й и i_4-й столбцов матрицы B (строк матрицы B^T).

Через $P(s)$ обозначим $P(s) = A_{1234}\,B_{1234} + A_{5678}\,B_{5678}$. Из формулы Лиувилля–Остроградского, связывающего Вронскиан решений с коэффициентами уравнения, следует что [27, 17.1] $B_{1234} = \det(B_1) = W(0) = 1$, $B_{5678} = \det(B_2) = W(1) = 1$ и $P(s) = A_{1234} + B_{5678} = \text{const}$.

Все другие функции $B_{i_1,i_2,i_3,i_4} = B_{i_1,i_2,i_3,i_4}(s)$ (кроме B_{1234} и B_{5678}) не являются константами.

Поэтому если $\Delta(\lambda) \equiv C = \text{const}$, то $\Delta(\lambda) - P(s) \equiv 0$ и один из миноров A_{1234} or A_{5678} не равен нулю. Предположив противное получим, что все миноры A_{i_1,i_2,i_3,i_4} обращаются в нуль. Это противоречит условию (37).

Предположим $A_{1234} \neq 0$. Тогда матрица (35) имеет следующий вид:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \end{Vmatrix}.$$

(Здесь через a_{ij} обозначены коэффициенты a_{ij}, вообще говоря отличные от коэффициентов (35). Мы не стали обозначать их новыми символами, чтобы не увеличивать количества обозначений.)

Заметим, что определитель $B_{2348} = y_1'''(1)$ и любой другой определитель B_{i_1,i_2,i_3,i_4} являются линейно независимыми. Предположим, что $\Delta(\lambda) \equiv C = \text{const}$, тогда $\Delta(\lambda) - P(s) \equiv 0$ и $A_{2348} = 0$. Отсюда следует, что

$$A_{2348} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{18} \\ 1 & 0 & 0 & a_{28} \\ 0 & 1 & 0 & a_{38} \\ 0 & 0 & 1 & a_{48} \end{vmatrix} = -a_{18} = 0. \tag{46}$$

Покажем, что a_{17} и a_{28} также равны нулю. Действительно, $B_{3478} = y_1'(1)\, y_1'''(1) - (y_1''(1))^2$ и любой другой определитель B_{i_1,i_2,i_3,i_4} являются линейно независимыми. Предположим, что $\Delta(\lambda) \equiv C = \text{const}$, тогда $\Delta(\lambda) - P(s) \equiv 0$ и $A_{3478} = 0$. Отсюда следует, что

$$A_{3478} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{17} & 0 \\ 0 & 0 & a_{27} & a_{28} \\ 1 & 0 & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 1 & a_{47} & a_{48} \end{vmatrix} = a_{17} \cdot a_{28} = 0. \tag{47}$$

Кроме того, $B_{2347} = -B_{1348} = -y_1''(1)$ и любой другой определитель B_{i_1,i_2,i_3,i_4} линейно независимы. Отсюда следует, что

$$A_{2347} - A_{1348} = -(a_{17} + a_{28}) = 0. \tag{48}$$

Сочетая (47) и (48), получаем

$$a_{17} = a_{28} = 0.$$

Аналогично,

$$a_{16} = a_{27} = a_{38} = 0.$$

Далее, $B_{1235} = y_4(1)$ и любой другой определитель B_{i_1,i_2,i_3,i_4} линейно независимы. Поэтому если $\Delta(\lambda) - P(s) \equiv 0$, то минор $A_{1235} = a_{45}$ обращается в нуль. Как это было сделано выше, получаем

$$a_{34} = a_{46} = a_{25} = a_{36} = a_{47} = 0.$$

Следовательно, если $A_{1234} \neq 0$, то матрица A имеет вид A_1.

Поступая как это было сделано выше, получим, что если $A_{5678} \neq 0$, то матрица A имеет вид A_2.

Это полностью доказывает теорему 1.

4.3. Краевые задачи для оператора D^4, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость

В этом пункте доказывается, что характеристический определитель тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда матрица коэффициентов краевых условий размера 4×8 состоит из двух квадратных диагональных матриц четвертого порядка. Одна из диагональных матриц является единичной, а диагональ второй диагональной матрицы состоит из чисел (40).

Если $A_{1234} \neq 0$ и $\Delta(\lambda) \equiv 0$, то из теоремы 1 следует, что

$$\begin{aligned} 0 \equiv \Delta(\lambda) = \det(A_1 \cdot B^T) = 1 + \frac{1}{2}\,(a_1 a_2 + a_1 a_4 + \\ + a_2\, a_3 + a_3 a_4) + a_1 a_2 a_3 a_4 + \frac{1}{4}\,(a_1\, a_2 + a_1 a_4 + \\ + a_2 a_3 + a_3 a_4 + 2\, a_1 a_3 + 2 a_2 a_4)\,(e^s + e^{-s}) \cos s + \\ + \frac{1}{4}\,(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_1\, a_2\, a_3 + a_1\, a_2\, a_4 + \\ + a_1\, a_3\, a_4 + a_2\, a_3\, a_4)\ \ (e^s + e^{-s} + 2\, \cos s)\,. \end{aligned} \tag{49}$$

Функции 1, $(e^s + e^{-s}) \cos s$, and $(e^s + e^{-s} + 2 \cos s)$ — линейно независимы. Поэтому характеристический определитель (49) тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 являются решениями следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} & 2 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 a_4 = 0, \\ & a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + 2 a_1 a_3 + 2 a_2 a_4 = 0, \\ & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + \\ & \qquad + a_2\, a_3\, a_4 = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Решения системы уравнений (50) находятся непосредственными вычислениями. Этими решениями являются (40).

Если $A_{5678} \neq 0$ и $\Delta(\lambda) \equiv 0$, то из теоремы 1 следует, что

$$0 \equiv \Delta(\lambda) = \det(A_2 \cdot B^T). \tag{51}$$

Отсюда получаем систему уравнений (50), решениями которой являются числа (40).

Это доказывает теорему 2.

Замечание. Если

$$2+a_1\,a_2+a_1\,a_4+a_2\,a_3+a_3\,a_4+2\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4=C\neq 0$$

в (50), то решение новой системы уравнений сводится к решению алгебраического уравнения шестой степени, которое не может быть решено в радикалах. Система уравнений (50) решается в радикалах, т.к. сводится к бикубическому уравнению.

Известно, что спектральные задачи, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость, существуют для дифференциальных уравнений любого четного порядка. Джоном Локкером поставлена следующая проблема (одиннадцатая проблема): существуют ли подобные задачи для дифференциальных уравнений нечетного порядка? В настоящем параграфе дается положительный ответ на этот вопрос. Доказано, что спектральные задачи, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость, существуют для дифференциальных уравнений любого нечетного порядка. Параграф представляет собой изложение статьи [17].

В одиннадцатой главе своей монографии [13] Джон Локкер (John Locker) сформулировал 15 нерешенных проблем спектрального анализа двухточечных краевых задач. Одиннадцатая проблема [13, С. 296] представляет собой следующий вопрос: существует ли спектральная задача с дифференциальным уравнением

$$i^{-n}\,y^{(n)}(x)=\lambda\,y(x)=s^n\,y(x),\qquad x\in[0,1] \tag{52}$$

нечетного порядка n, краевыми условиями

$$U_j(y)=\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\,y^{(k)}(0)+\sum_{k=0}^{n}a_{j\,k+n}\;y^{(k)}(1) \tag{53}$$
$$j=1,\ldots,n$$

и спектром, состоящим из конечного числа собственных значений?

В настоящей работе дан положительный ответ на этот вопрос. Доказана следующая

Теорема. *Спектр задачи с дифференциальным уравнением (52) порядка n и краевыми условиями (53) не может состоять из конечного числа собственных значений.*

Доказательство. Спектральная задача (52), (53) имеет следующий характеристический определитель $\Delta(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \ldots & U_1(y_n)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \ldots & U_2(y_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \ldots & U_n(y_n)\end{vmatrix}, \tag{54}$$

где

$$y_j(x)=y_j(x,\lambda)=\begin{cases} x^{j-1}, & \text{если } \lambda=0,\\ e^{\omega_j\,s\,x}, & \text{если } \lambda\neq 0,\end{cases}$$
$$\omega_j=e^{\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i\,(j-1)}{2}},\qquad j=1,2,\ldots,n.$$

Разложив определитель (54) в сумму, получим:

$$\Delta(\lambda)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant 2\,n}M_{ijk}\,Z_{ijk}(\lambda)=0. \tag{55}$$

Здесь через $M_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ обозначены миноры, составленные из i_1-го, i_2-го, ..., i_n-го столбцов матрицы

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n+2} & \ldots & a_{1\,2n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n+2} & \ldots & a_{2\,2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n+2} & \ldots & a_{n\,2n}\end{Vmatrix}$$

соответственно, а через $Z_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ — миноры, составленные из i_1-го, i_2-го, ..., i_n-го столбцов матрицы

$$B=\|\;B_1\quad B_2\;\|,$$

где

$$B_1=\begin{Vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) & y_1''(0) & y_1'''(0)\\ y_2(0) & y_2'(0) & y_2''(0) & y_2'''(0)\\ y_3(0) & y_3'(0) & y_3''(0) & y_3'''(0)\\ y_4(0) & y_4'(0) & y_4''(0) & y_4'''(0)\end{Vmatrix},$$

$$B_2=\begin{Vmatrix} y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) & y_1'''(1)\\ y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) & y_2'''(1)\\ y_3(1) & y_3'(1) & y_3''(1) & y_3'''(1)\\ y_4(1) & y_4'(1) & y_4''(1) & y_4'''(1)\end{Vmatrix}.$$

Пусть $\lambda\neq 0$. Тогда только первое и последнее слагаемые этой суммы представляют собой полиномы. Обозначим эти полиномы через $P(s)$:

$$P(s)\equiv\begin{vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) & \ldots & y_1^{(n-1)}(0)\\ y_2(0) & y_2'(0) & \ldots & y_2^{(n-1)}(0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n(0) & y_n'(0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(0)\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{vmatrix} y_1(1) & y_1'(1) & \ldots & y_1^{(n-1)}(1)\\ y_2(1) & y_2'(1) & \ldots & y_2^{(n-1)}(1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n(1) & y_n'(1) & \ldots & y_n^{(n-1)}(1)\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{vmatrix} 1 & \omega_1\,s & \ldots & \omega_1^{n-1}\,s^{n-1}\\ 1 & \omega_2\,s & \ldots & \omega_2^{n-1}\,s^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega_n\,s & \ldots & \omega_n^{n-1}\,s^{n-1}\end{vmatrix}\equiv P_0\,s^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

где

$$P_0 = \begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & \dots & \omega_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = \text{const} \neq 0.$$

Обозначим сумму всех остальных слагаемых в (55) через $S(s)$. Функции $S(s)$ и $P(s)$ линейно независимы как функции от s. Каждое слагаемое суммы $S(s)$ содержит экспоненты $e^{\omega_j s x}$. Поэтому, если $S(s)$ не обращается в нуль тождественно, то характеристическая функция

$$\Delta(\lambda) = S(s) + (M_{1,2,\dots,n-1,n} + \\ + M_{n+1,n+2,\dots,2n-1,2n})\, P_0\, s^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad (56)$$

имеет бесконечное число нулей (собственных значений задачи (52), (53)). Отсюда следует, что характеристический определитель (56) имеет конечное число собственных значений только в случае $S(s) \equiv 0$. А в этом случае характеристический определитель (56) тождественно равен функции

$$(M_{1,2,\dots,n-1,n} + M_{n+1,n+2,\dots,2n-1,2n})\, P_0\, s^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

которая не имеет ненулевых корней. Следовательно, задача (52), (53) не может иметь конечное число ненулевых собственных значений.

Покажем, что спектральная задача (52), (53) не может иметь и единственного собственного значения, равного нулю.

Предположим противное. Пусть задача (52), (53) имеет и единственное собственное значение, равное нулю. Поскольку у задачи (52), (53) нет ненулевых собственных значений, то $S(s) \equiv 0$. Кроме того,

$$(M_{1,2,\dots,n-1,n} + M_{n+1,n+2,\dots,2n-1,2n})\, P_0\, s^{\frac{n(n-1)}{2}} \not\equiv 0. \qquad (57)$$

Иначе имели бы тождество $\Delta(\lambda) \equiv 0$, означающее, что каждое значение задачи (52), (53) является собственным. Из (57) следует, что хотя бы один из двух миноров $M_{1,2,\dots,n-1,n}$ или $M_{n+1,n+2,\dots,2n-1,2n}$ отличен от нуля.

Пусть $M_{1,2,\dots,n-1,n} \neq 0$. Тогда матрица с точностью до линейных преобразований строк имеет следующий вид:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1\,n+1} & a_{1\,n+2} & \dots & a_{1\,2n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2\,n+1} & a_{2\,n+2} & \dots & a_{2\,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n\,n+1} & a_{n\,n+2} & \dots & a_{n\,2n} \end{Vmatrix}.$$

Функция $S(s)$ имеет следующий вид:

$$S(\lambda) = M_{1,2,\dots\,n-1,n+1} \times \\ \times \begin{vmatrix} y_1(0) & \dots & y_{n-1}(0) & y_1(1) \\ y_1'(0) & \dots & y_{n-1}'(0) & y_1'(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(0) & y_1^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} + \\ + M_{1,2,\dots\,n-1,n+2} \times \\ \times \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_{n-1}(1) & y_n(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & \dots & y_{n-1}'(1) & y_n'(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(1) & y_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix} + \\ + \dots + \qquad (58) \\ + M_{n+1,n+2,\dots,2n-1,2n} \times \\ \times \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) & \dots & y_n(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) & \dots & y_n'(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(1) & y_2^{(n-1)}(1) & \dots & y_n^{(n-1)}(1) \end{vmatrix}.$$

Известно, что любые две функции $f_{b_1,b_2}(s) = s^{b_1} e^{b_2 s}$, которые имеют либо различные b_1, либо различные b_2, являются линейно независимыми [31, C.101]. Отсюда следует, что все слагаемые в (58), стоящие перед $M_{i_1,i_2,\dots\,i_{n-1},i_n}$ линейно независимы.

Рассмотрим только те слагаемые в $S(\lambda)$, где в определителе $Z_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ есть только один столбец со значениями линейно независимых решений в точке $x = 1$, причем этот столбец есть

$$(y_1(1), y_1'(1), \dots, y_1^{(n-1)}(1))^T,$$

т.е. столбец со значениями первой функции $y_1(x)$ и ее производных:

$$M_{2,3,\dots,n-1,n,n+1} Z_{2,3,\dots,n-1,n\,n+1} + \\ + M_{1,3\dots,n-1,n,n+1} Z_{1,3,\dots,n-1,n\,n+1} + \\ + \dots + M_{1,2,\dots,n-1,n+1} Z_{1,2,\dots,n-1,n+1} = \\ = \left(\begin{vmatrix} y_2(0) & \dots & y_n(0) & y_1(1) \\ y_2'(0) & \dots & y_n'(0) & y_1'(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) & y_1^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} + \right. \\ + \begin{vmatrix} y_1(0) & \dots & y_1(1) & \\ y_1'(0) & \dots & yy_n'(0) & y_1'(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) & y_1^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(0) & \dots & y_{n-1}(0) & y_1(1) \\ y_1'(0) & \dots & y_{n-1}'(0) & y_1'(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(0) & y_1^{(n-1)}(1) \end{vmatrix}\Bigg) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \omega_2 & \omega_3 & \dots & \omega_{n-1} & \omega_n & \omega_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_2^{n-1} & \omega_3^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} & \omega_n^{n-1} & \omega_1^{n-1} \end{vmatrix} + \right.$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_3 & \dots & \omega_{n-1} & \omega_n & \omega_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_3^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} & \omega_n^{n-1} & \omega_1^{n-1} \end{vmatrix} +$$

$$+\dots+$$

$$+ \left. \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n-1} & \omega_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} & \omega_1^{n-1} \end{vmatrix} \right) s^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{\omega_1 s}.$$

Как видим, во всех определителях–слагаемых, кроме первого, есть два совпадающих столбца. Поэтому, имеем:

$$M_{2,3,\dots,n-1,n,n+1} Z_{2,3,\dots,n-1,n\,n+1} +$$
$$+ M_{1,3\dots,n-1,n,n+1} Z_{1,3,\dots,n-1,n\,n+1} +$$
$$+ \dots + M_{1,2,\dots,n-1,n+1} Z_{1,2,\dots,n-1,n+1} =$$
$$= M_{2,3,\dots,n-1,n,n+1} Z_{2,3,\dots,n-1,n\,n+1} =$$
$$= M_{2,3,\dots,n-1,n,n+1} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} y_2(0) & \dots & y_n(0) & y_1(1) \\ y_2'(0) & \dots & y_n'(0) & y_1'(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) & y_1^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} \times$$
$$\times s^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{\omega_1 s}.$$

5. О конечном спектре

Рассмотрим краевую задачу с дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + \\ + a_n(x)\, y = \lambda\, y(x), \quad x \in [0,1] \tag{59}$$

и краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n} b_{jk}\, y^{(k)}(0) + \\ + \sum_{k=0}^{n} b_{jk+n} y^{(k)}(1) = 0, \ j = 1,2,\dots,n, \tag{60}$$

где $\operatorname{rank} ||b_{jk}||_{n\times 2n} = n$, $b_{jk} \in \mathbb{C}$.

Прямые и обратные задачи для краевых задач с бесконечным счетным спектром достаточно хорошо изучены. Случаи конечного спектра и спектра, который заполняет всю плоскость, изучены меньше. Примеры краевых задач, спектр которых полностью заполнят всю плоскость, для дифференциальных операторов любого четного порядка приведены В.А. Садовничим и Б.Е. Кангужиным [12], а для дифференциальных уравнений любого нечетного порядка приведены в работе [17]. Краевые задачи с конечным спектром изучены еще меньше. В [9, с. 556] и [13] показано, что конечного спектра для операторов дифференцирования второго и четвертого порядка с соответствующими краевыми условиями (60) быть не может. В 2008 году для уравнений Джон Локкер поставил проблему [13]: может ли краевая задача (59), (60) иметь конечный спектр? В том же году Т.Ш. Кальменовым и Д. Сураганом [32] для регулярных краевых задач с частными производными, в том числе и для задач (59), (60), было доказано, что их спектр либо пустое, либо бесконечное множество.

В [33] показано, что задача (59), (60) не может иметь иметь конечного вещественного спектра. Доказана более общая теорема для уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x,\lambda) y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x,\lambda) y' + \\ + a_n(x,\lambda) y = 0, \ x \in [0,1], \tag{61}$$

где функции $a_q(x,\lambda)$ $(q = 1,\dots,n)$ являются непрерывными от x на отрезке [0,1] и полиномами от параметра λ.

Теорема 1. *Если функции $a_q(x,\lambda)$ имеют вид:*

$$a_q(x,\lambda) = \lambda^q \sum_{j=0}^{q} \lambda^{-j} a_{qj}(x), a_{q0}(x) = a_{q0}\cdot r(x), \\ r(x) > 0, \quad q = 1,2,\dots,n,$$

а полином $\pi(\omega) = \omega^n + a_{10}\,\omega^{n-1} + \dots + a_{q0}$ не имеет кратных корней, то спектр краевой задачи (61), (60) представляет собой либо пустое, либо бесконечное множество.

Доказательство этой теоремы вытекает из работ В.Б. Лидского и В.А. Садовничего [29, 30], где показано, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (61), (60), удовлетворяющей условиям теоремы 1, является целой функцией класса K, а количество его корней (если они есть) бесконечно и, если характеристический определитель не тождественен нулю, имеет асимптотические представления, выписанные в работах [29, 30].

Для случая, когда в уравнении (62) кратность корня полинома $\pi(\lambda)$ равна его степени (порядку дифференциального уравнения), доказано, что конечный спектр может существовать. Было показано следующее: *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — некоторые вещественные числа. Существует краевая задача (61), (60), такая, что спектр этой задачи состоит только из наперед заданных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.*

Обозначим $(\lambda-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_n)$ через $p(\lambda)$, а $p(\lambda)-1$ — через d. Тогда характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи с дифференциальным уравнением

$$y''-2\,d\,y'+d^2\,y=0 \tag{62}$$

и краевыми условиями

$$U_1(y)=y(0)=0,\quad U_2(y)=y'(1)=0 \tag{63}$$

равен $p(\lambda)\,e^{d(\lambda)}$.

В этой же статье [33] был задан вопрос: может ли краевая задача (61), (60) иметь конечный спектр в случае, когда полином $\pi(\lambda)$ имеет кратные корни, но кратность корней меньше степени полинома. Покажем, что такое может быть.

Теорема 2. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — некоторые комплексные числа. Существует краевая задача (61), (60), у которой полином $\pi(\lambda)$ имеет кратные корни, такая, что спектр этой задачи состоит только из наперед заданных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.*

Доказательство. Обозначим

$$(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,\ldots\,(\lambda-\lambda_n)$$

через $p(\lambda)$, а $\dfrac{p(\lambda)-\pi}{2-\pi}$ — через a. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} y^{(4)}-4\,a\,y'''+\left(6\,a^2+\frac{\pi^2}{2}\right)y''+\\ +\left(4a^3+a\pi^2\right)y'+\left(a^4+\frac{a^2\pi^2}{2}+\frac{\pi^4}{16}\right)y=0 \end{gathered} \tag{64}$$

с краевыми условиями

$$y(0)=0,\;\; y'(0)=0,\;\; y''(0)=0,\;\; y(1)=0. \tag{65}$$

Фундаментальная система решений такова ($b=\pi/2$):

$$y_1(x,\lambda)=e^{a\,x}\cdot\cos bx,\quad y_2(x,\lambda)=e^{a\,x}\cdot\sin bx,$$
$$y_3(x,\lambda)=x\cdot e^{a\,x}\cdot\cos bx,\quad y_4(x,\lambda)=x\cdot e^{a\,x}\cdot\sin bx.$$

Если $a=0$, то характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (64), (65) равен

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ a & \dfrac{\pi}{2} & 1 & 0\\ a^2-\dfrac{\pi^2}{4} & a\,\pi & 2\,a & \pi\\ 0 & e^a & 0 & e^a \end{vmatrix}=$$
$$=\Big(a(2-\pi)+\pi\Big)\,e^a.$$

Таким образом, если $a=0$, то характеристический определитель равен π (не обращается в нуль), а поэтому в случае $a=0$ задача (64), (65) не имеет собственных значений.

Если $a\neq 0$, то характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (64), (65) равен $\Delta(\lambda)=\Big(a(2-\pi)+\pi\Big)\,e^a$. Чтобы найти собственные значения, приравняем характеристический определитель к нулю. Так как $e^a\neq 0$, то $p(\lambda)=0$. Следовательно собственными значениями задачи (64), (65) являются только комплексные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 329 с.

[2] Stone M.H. Irregular differential systems of order two and the related expansion problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1927. V. 29. Pp. 23–53. DOI: 10.2307/1989277

[3] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

[4] Ширяев Е.А., Шкаликов А.А. Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы // Матем. заметки. 2007. Т. 81, № 4. С. 636–640. DOI: 10.4213/mzm3708

[5] Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M. General Inverse Sturm–Liouville Problem with Symmetric Potential // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2015. V. 5, No. 2. Pp. 96–108. https://www.azjm.org/volumes/0502/0502-8.pdf

[6] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974. 664 с.

[7] Дезин А.А. Спектральные характеристики общих граничных задач для оператора D^2 // Матем. заметки. 1985. Т. 37, № 2. С. 249–256. http://mi.mathnet.ru/mz5301

[8] Бияров Б.Н., Джумабаев С.А. Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 1994. Т. 56, № 1. С. 143–146. http://mi.mathnet.ru/mz2233

[9] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2. I. Spectral properties // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. V. 141, No. 2. Pp. 538–558. DOI: 10.1016/0022-247X(89)90196-0

[10] Ахтямов А.М. О вырожденных краевых условиях в задаче Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 8. С. 1121–1123. DOI: 10.1134/S0374064116080148

[11] Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия оператора диффузии // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 11. С. 1546–1549. DOI: 10.1134/S0374064117110140

[12] Садовничий В.А., Кангужин Б.Е. О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // ДАН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 310–313. http://mi.mathnet.ru/dan45727

[13] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators. American Mathematical Society, 2006. P. 315.

[14] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two–point differential operators. American Mathematical Society, 2008. P. 177.

[15] Makin A.S. Two–point boundary–value problems with nonclassical asymptotics on the spectrum // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. No. 95. P. 1–7. http://ejde.math.unt.edu/Volumes/2018/95/makin.pdf

[16] Akhtyamov A.M. On Degenerate Boundary Conditions for Operator D^4 // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2017. V. 216. P. 195–203. DOI: 10.1007/978-3-319-67053-9_18

[17] Ахтямов А.М. О спектре дифференциального оператора нечетного порядка // Матем. заметки. 2017. Т. 101, № 5. С. 643–646. DOI: 10.4213/mzm11549

[18] Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия для дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 4. С. 427–434. DOI: 10.1134/S0374064118040015

[19] Джумабаев С.А., Кангужин Б.Е. Об одной нерегулярной задаче на конечном отрезке // Известия АН КазССР. Сер. физ.–мат.. 1988. № 1. С. 14–18.

[20] Маламуд М.М. О полноте системы корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с общими краевыми условиями // Функ. анализ. 2008. Т. 42, № 3. С. 45–52. DOI: 10.4213/faa2911

[21] Макин А.С. Об обратной задаче для оператора Штурма–Лиувилля с вырожденными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, №. 10. С. 1408–1411. DOI: 10.1134/S0374064114100173

[22] Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями // Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 569–576. http://mi.mathnet.ru/mz9971

[23] Akhtyamov A., Amram M., Mouftakhov A. On reconstruction of a matrix by its minors // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2018. V. 49, No. 2. Pp. 268–321. DOI: 10.1080/0020739X.2017.1383526

[24] Гусейнов Г.Ш. Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале // Спектральная теория операторов и ее приложения. Баку. 1986. № 7. С. 51–101.

[25] Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // Математический сборник. 2007. Т. 198, № 11. С. 47–66. DOI: 10.4213/sm1491

[26] Набиев И.М., Шукюров А.Ш. Решение обратной задачи для оператора диффузии в симметрическом случае // Изв. Сарат. ун–та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 4, ч. 1. С. 36–40. https://elibrary.ru/item.asp?id=13032931

[27] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с. http://elibrary.bsu.az/kitablar/1019.pdf

[28] Ланкастер П. Теория матриц / Пер. с англ. М.: Наука, 1982. 272 с.

[29] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т. 1, № 2. С. 52–59. http://mi.mathnet.ru/faa2816

[30] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Математический сборник. 1968. Т. 75, № 4. С. 558–566. http://mi.mathnet.ru/msb4001

[31] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд.-во иностр. литературы, 1958. 474 с.

[32] Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Определение структуры спектра регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений методом антиаприорных оценок В.А. Ильина // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 423, № 6. С. 730–732. https://elibrary.ru/item.asp?id=11634292

[33] Ахтямов А.М. О конечности спектра краевых задач // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 1. С. 138–140. DOI: 10.1134/S0374064119010151

ISSN 2658–5782 14 (2019), **3**, 184–201

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.025
DOI: 10.21662/mfs2019.3.025

Received: 24.11.2019
Accepted: 24.12.2019

Survey of studies on degenerate boundary conditions and finite spectrum

Akhtyamov A.M.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia
Bashkir State University, Ufa, Russia

It is shown that for the asymmetric diffusion operator the case when the characteristic determinant is identically equal to zero is impossible and the only possible degenerate boundary conditions are the Cauchy conditions. In the case of a symmetric diffusion operator, the characteristic determinant is identically equal to zero if and only if the boundary conditions are false–periodic boundary conditions and is identically equal to a constant other than zero if and only if its boundary conditions are generalized Cauchy conditions. All degenerate boundary conditions for a spectral problem with a third–order differential equation $y'''(x) = \lambda\, y(x)$ are described. The general form of degenerate boundary conditions for the fourth–order differentiation operator D^4 is found. 12 classes of boundary value eigenvalue problems are described for the operator D^4, the spectrum of which fills the entire complex plane. It is known that spectral problems whose spectrum fills the entire complex plane exist for differential equations of any even order. John Locker posed the following problem (eleventh problem): are there similar problems for odd–order differential equations? A positive answer is given to this question. It is proved that spectral problems, the spectrum of which fills the entire complex plane, exist for differential equations of any odd order. Thus, the problem of John Locker is resolved. John Locker posed a problem (tenth problem): can a spectral boundary–value problem have a finite spectrum? Boundary value problems with a polynomial occurrence of a spectral parameter in a differential equation are considered. It is shown that the corresponding boundary–value problem can have a predetermined finite spectrum in the case when the roots of the characteristic equation are multiple. If the roots of the characteristic equation are not multiple, then there can be no finite spectrum. Thus, John Locker's tenth problem is resolved.

Keywords: degenerate boundary conditions, finite spectrum, tenth and eleventh John Locker problems

References

[1] Marchenko V.A. [Sturm–Liouville operators and their applications] *Operatory Shturma–Liuvillya i ix prilozheniya*. Kiev: Naukova dumka, 1977. P. 329 (In Russian).

[2] Stone M.H. Irregular differential systems of order two and the related expansion problems. Trans. Amer. Math. Soc.. 1927. V. 29. Pp. 23–53.
DOI: 10.2307/1989277

[3] Naimark M.A. [Linear Differential Operators] *Linejnye differencial'nye operatory*. M.: Nauka, 1969. P. 526 (In Russian).

[4] Shiryaev E.A., Shkalikov A.A. Regular and completely regular differential operators. Mathematical Notes. 2007. V. 81, No. 4. Pp. 566–570.
DOI: 10.1134/S0001434607030352

[5] Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M. General Inverse Sturm–Liouville Problem with Symmetric Potential. Azerbaijan Journal of Mathematics. 2015. V. 5, No. 2. Pp. 96–108.
https://www.azjm.org/volumes/0502/0502-8.pdf

[6] Danford N., Shvarts Dzh.T. [Linear operators. Spectral Operators] *Linejnye operatory. Spektral'nye operatory*. M.: Mir, 1974. P. 664 (In Russian).

[7] Dezin A.A. Spectral characteristics of general boundary–value problems for operator D^2. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1985. V. 37, No. 2. Pp. 142–146.
DOI: 10.1007/BF01156759

[8] Biyarov B.N., Dzhumabaev S.A. A criterion for the Volterra property of boundary value problems for Sturm–Liouville equations. Mathematical Notes. 1994. V. 56, No. 1. Pp. 751–753.
DOI: 10.1007/BF02110567

[9] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2. I. Spectral properties. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. V. 141, No. 2. Pp. 538–558.
DOI: 10.1016/0022-247X(89)90196-0

[10] Akhtyamov A.M. On degenerate boundary conditions in the Sturm–Liouville problem. Differential Equations. 2016. V. 52, No. 8. C. 1085–1087.
DOI: 10.1134/S0012266116080140

[11] Akhtyamov A.M. Degenerate boundary conditions for the diffusion operator. Differential Equations. 2017. V. 53, No. 11. Pp. 1515–1518.
DOI: 10.1134/S0012266117110143

[12] Sadovnichii V.A.; Kanguzhin B.E. A connection between the spectrum of a differential operator with symmetric coefficients and the boundary conditions. Sov. Math.,Dokl.. 1982. V. 26. Pp. 614–618.
https://zbmath.org/?q=an:0521.34031

[13] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two–point differential operators. American Mathematical Society, 2006. P. 315.

[14] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two–point differential operators. American Mathematical Society, 2008. P. 177.

[15] Makin A.S. Two–point boundary–value problems with nonclassical asymptotics on the spectrum. Electronic Journal of Differential Equations. 2018. No. 95. P. 1–7.
http://ejde.math.unt.edu/Volumes/2018/95/makin.pdf

[16] Akhtyamov A.M. On Degenerate Boundary Conditions for Operator D^4. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2017. V. 216. Pp. 195–203.
DOI: 10.1007/978-3-319-67053-9_18

[17] Akhtyamov A.M. On the spectrum of an odd–order differential operator. Mathematical Notes. 2017. V. 101, No. 5. Pp. 755–758.
DOI: 10.1134/S0001434617050017

[18] Akhtyamov A.M. Degenerate Boundary Conditions for a Third–Order Differential Equation. Differential Equations. 2018. V. 54, No. 4. Pp. 419–426.
DOI: 10.1134/S0012266118040018

[19] Dzhumabaev S.A., Kanguzhin B.E. [On an irregular problem on a finite interval]. *Izvestiya AN KazSSR. Ser. fiz.–mat.* [Bulletin of the Academy of Sciences of the KazSSR. Ser. Fiz.–Mat.]. No. 1. Pp. 14–18 (In Russian).

[20] Malamud M.M. On the completeness of the system of root vectors of the Sturm–Liouville operator with general boundary conditions. Functional Analysis and Its Applications. 2008. V. 42, No. 3. Pp. 198–204.
DOI: 10.1007/s10688-008-0028-0

[21] Makin A.S. On an inverse problem for the Sturm–Liouville operator with degenerate boundary conditions. Differential Equations. 2014. V. 50, No. 10. Pp. 1402–1406.
DOI: 10.1134/S0012266114100176

[22] Yurko V.A. The inverse problem for differential operators of second order with regular boundary conditions.Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1975. V. 18, No. 4. Pp. 928–932.
DOI: 10.1007/BF01153046

[23] Akhtyamov A., Amram M., Mouftakhov A. On reconstruction of a matrix by its minors. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2018. V. 49, No. 2. Pp. 268–321.
DOI: 10.1080/0020739X.2017.1383526

[24] Guseinov I.M. [Inverse spectral problems for a quadratic pencil of Sturm–Liouville operators on a finite interval]. *Spektral'naya teoriya operatorov i ee prilozheniya. Baku* [Spectral theory of operators and its applications. Baku]. 1986. No. 7. Pp. 51–101 (In Russian).

[25] Guseinov I.M., Nabiev I.M. The inverse spectral problem for pencils of differential operators. Sb. Math. 2007. V. 198, No. 11. Pp. 1579–1598.
DOI: 10.1070/SM2007v198n11ABEH003897

[26] Nabiev I.M., Shukurov A.Sh. Solution of inverse problem for the diffusion operator in a symmetric case. Izv. Saratov Univ. (N.S.) Ser. Math. Mech. Inform. 2009. V. 9, No. 4. Pp. 36–40.
http://mi.mathnet.ru/eng/isu73

[27] Kamke E. [Handbook of Ordinary Differential Equations] *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam*. M.: Nauka, 1976. P. 576 (in Russian).
http://elibrary.bsu.az/kitablar/1019.pdf

[28] Lankaster P. Theory of matrices. New York–London: Academic Press, 1969. P. 316.

[29] Lidskii V.B., Sadovnichii V.A. Regularized sums of zeros of a class of entire functions. Functional Analysis and Its Applications. 1967. V. 1, No. 2. Pp. 133–139.
DOI: 10.1007/BF01076085

[30] Lidskii V.B., Sadovnichii V.A. Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions. Mathematics of the USSR–Sbornik. 1968. V. 4, No. 4. Pp. 519–530.
DOI: 10.1070/SM1968v004n04ABEH002812

[31] Kodington E.A., Levinson N. [Theory of ordinary differential equations] *Teoriya obyknovennyx differencial'nyx uravnenij*. M.: Izd.–vo inostr. literatury, 1958. P. 474 (In Russian).

[32] Kalmenov T.Sh., Suragan D. [Determining the structure of regular boundary value problems for differential equations by the method of non–a priori estimates V.A. Ilyina]. *Doklady Akademii Nauk* [Doklady Mathematics]. 2008. No. 6. Pp. 730–732 (In Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=11634292

[33] Akhtyamov A.M. Finiteness of the Spectrum of Boundary Value Problems. Differential Equations. 2019. V. 55, No. 1. Pp. 142–142.
DOI: 10.1134/S0012266119010154

ISSN 2658–5782 14 (2019), 3, 202–207

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.026
DOI: 10.21662/mfs2019.3.026
UDC 621.8

Received: 26.11.2019
Accepted: 24.12.2019

Transfer by a Manipulator with a Three-finger Grasp of a Brittle Cylinder[1]

Golubev Yu.F.[*,**], **Melkumova E.V.**[**]

[*]Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow
[**]M.V. Lomonosov State University, Moscow

We consider the problem of the brittle cylinder grasping by the n fingers of the robot-manipulator. Each finger contacts the cylinder in a single supporting point with Amontons-Coulomb or for two footholds spinning friction. Using numerical simulations and analytically, possible locations of contact points on the cylinder, for which there is a kinetostatics problem solution when the cylinder is moved by three fingers, are received. By the analogy of the equilibrium of a three-legged robot on a cylinder for the problems of transfer by a manipulator with a three-finger grasp of a cylinder or for a robot on a surface which legs suspension points are on a cylinder surface. Two supporting points can be on one diameter in the cylinder base. Or because of friction on the opposite sides of the robot center of mass or giving in the dynamics, it is point C. The analogy of the problem is oscillations in the vicinity of the stable equilibrium one cylinder on another. The cylinder lies on one finger rectangular to it, of the hand of a hu-manoid robot, adheres to the end of the other finger. Similarly holds the glass. Robot can hold the horizontal cylinder by three fingers. Let one of the points is in vertical plane containing cylinder axis and another are in the plane orthogonal to the axis. The supporting points are on the external surface of the lower semi-cylinder and the cylinder center mass is in the footholds triangle. The supporting set is divided into two subsets.

Keywords: three-finger grasp, Amontons-Coulomb friction, three-legged robot

1. A cylinder grasping problem

In this paper, we consider the problem of curved object grasping by the fingers of the robot-manipulator. For example we discussed a two legged humanoid robot with five fingers pair arms or a monkey-robot with twenty arms and legs fingers. The robot can hold the object by one and grasp by two or three fingers. An object grasping problem is equivalent to the problem of the walking robot with n legs. Consider a grasp with m fingers.

The work [1] is devoted to control of the manipulator along communication. The difference our work form another authors speaking about grips is that each finger contacts an object in one foothold. And we speak more not about control, but about static stability during transferring the object by a grip.

There is an analogy of this problem to the problem of walking robot dynamics on one-side constraint. While the general walking robot motion on a plane was analyzed in detail in [2] the case of the dynamics on a curved surface is far more complicated. Model dynamics and control problems was considered in [3]. Equilibrium conditions for a solid on a rough plane was considered in [4]. Walking robot parameters optimization for the motion in tubes was considered in [5]. The special case of a robot with eight legs whose up porting points are restricted to the inner surface of a tube was considered in [6]. In the present work, we consider the more general case of a robot with three arbitrary supporting points on a rough cylinder and on a curved surface.

Let the point O is an origin fixed in absolute space. Suppose that robot arms fingers accomplish the desired motion with respect to the body of the robot.

[1]This work was supported by the Russian Foundation for Basic Researches (grant no. $19-01-00123$ A).

Using general dynamics theorems to describe the cylinder motion, we obtain six different equations for the cylinder dynamics from the momentum and angular momentum theorems [7], [8]. Among them there are three equations of the body translation with point A and another three describe body rotation about point A. For prescribed motion be realized then reaction in m footholds should satisfy following kinetostatic equations [9], [10]:

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\mathbf{R}}_i = -\tilde{\mathbf{\Phi}}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \tilde{\mathbf{r}}_i \times \tilde{\mathbf{R}}_i = -\tilde{\mathbf{M}}, \qquad (1)$$

where $\tilde{\mathbf{R}}_i$ is reaction component, $\tilde{\mathbf{r}}_i$ corresponds to the i-th finger supporting point vector, $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ is the sum of the external active forces plus time derivative of desired momentum, and $\tilde{\mathbf{M}}$ is the sum of external active forces momentum and time derivative of desired angular momentum with respect to the point O. In two vector equations in (1), the former corresponds to the momentum of the object (and is equivalent to three scalar equations when projected onto the basis vectors), while the latter defines the desired change of the angular momentum.

Assuming that $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ is orthogonal to $\tilde{\mathbf{M}}$, we obtain [11] that the system $\{\tilde{\mathbf{\Phi}}, \tilde{\mathbf{M}}\}$ can be also used at the point C

$$\tilde{\mathbf{r}}_C \times \tilde{\mathbf{\Phi}} = \tilde{\mathbf{M}}, \qquad \tilde{\mathbf{r}}_C = -\frac{\tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{\Phi}}}{\tilde{\Phi}^2}, \qquad \tilde{\Phi} = |\tilde{\mathbf{\Phi}}|,$$

where $\tilde{\mathbf{r}}_C$ is the vector $\mathbf{O}C$, and C corresponds to the point at which the resultant of the reactions is acting.

Further problem of reactions distribution $\tilde{\mathbf{R}}_i$ in some fixed point of time is investigated by the proposal that force $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ is acting at the point $\tilde{\mathbf{r}}_C$ and force moment there is zero. Motion equations (1) for finding reactions of fingers prescribed motion can be transformed [12]:

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\mathbf{R}}_i = \tilde{\mathbf{\Phi}}, \quad \sum_{i=1}^{m} \tilde{\mathbf{r}}_i \times \tilde{\mathbf{R}}_i = \tilde{\mathbf{r}}_C \times \tilde{\mathbf{\Phi}}. \qquad (2)$$

For example point C can be the grasping object center of mass.

Assuming that the robot footholds are on the surface of a rough cylinder of radius ρ with a friction coefficient k, we introduce the coordinate system $Oxyz$ such that the axis Ox is directed along the cylinder axis (so that the projection of $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ on the axis Ox is negative – see Fig. 1.), the axis Oz is parallel to the vector $\tilde{\mathbf{\Phi}}$, and the angle between the cylinder axis and the vector $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ is α.

The problem of finding the reaction forces (2) is similar to the foothold reactions distribution problem for walking robot, when the footholds are on the external surface of a rough inclined cylinder where the axis has an angle α with respect to the vector $\tilde{\mathbf{\Phi}}$. It

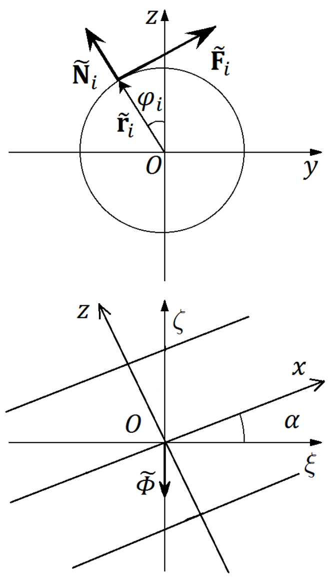


Figure 1. Cylinder

has been considered in [10] the problem of searching of the reactions components along the cylinder axis when $\alpha = 0$.

In the coordinates $Oxyz$ we define $\tilde{\mathbf{R}}_i = (\tilde{R}_i^x, \tilde{R}_i^y, \tilde{R}_i^z)$, $\tilde{\mathbf{r}}_C = (\tilde{x}_C, \tilde{y}_C, \tilde{z}_C)$, and $\tilde{\mathbf{\Phi}} = (-\tilde{\Phi}\sin\alpha, 0, -\tilde{\Phi}\cos\alpha)$, $i = 1, \cdots, m$. In case of a one-sided surface, and the grasp inside the cylinder, we have additional restrictions on normal reactions $\tilde{N}_i$ [14]:

$$\tilde{N}_i = \tilde{\mathbf{R}}_i \cdot \mathbf{e}_\nu^i \geqslant 0, \qquad (3)$$

where $\mathbf{e}_\nu^i$ is an external normal to i-th supporting point on the cylinder, while the tangential components are given by $\tilde{\mathbf{F}}_i = \tilde{\mathbf{R}}_i - \tilde{N}_i \mathbf{e}_\nu^i$.

For the reactions to be in the friction cones (2), we have following inequalities:

$$|\tilde{\mathbf{F}}_i| \leqslant k\tilde{N}_i, \qquad (4)$$

i.e. the tangential reactions $\tilde{\mathbf{F}}_i$ are restricted by Coulomb limiting friction value. When $\tilde{\mathbf{F}}_i$ exceeds this limiting value, the robot legs and arms begin to slide along a surface.

The reaction distribution problem then reduces to the solution of equations (2), and inequalities (3), (4), for reactions limited to the friction cones. The restricted motion can only be realized if the solution of Eqns. (2)-(4) does exist.

The same inequalities are for walking robot on the cylinder [10]. If the grasp is out the cylinder this inequalities (3) have opposite sign.

For example if m is even. And one of each par of the supporting points is on and another is in the thin surface such that we consider them like one geometrical point. Then we need only inequalities (4).

For $\mathbf{r}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i/\rho = (x_i, y_i, z_i)$, in the coordinate: $\mathbf{r}_i = (x_i, -\sin\varphi_i, \cos\varphi_i)$, $\mathbf{e}_i^{\nu} = (0, -\sin\varphi_i, \cos\varphi_i)$, $N_i = \tilde{\mathbf{N}}_i/\tilde{\Phi} = (0, -N_i\sin\varphi_i, N_i\cos\varphi_i)$, where φ_i is the angles between axis Oz and cylinder normal $\mathbf{e}_i^{\nu}$. We define $\mathbf{e}_x$ as the unitary vector in the Ox axis, while $\mathbf{e}_i^{\tau} = (0, \cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$ as the tangential to the cylinder. Then the tangential reaction: $\mathbf{F}_i = (F_i^x, F_i^{yz}\cos\varphi_i, F_i^{yz}\sin\varphi_i)$, where $F_i^x = \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{e}_x$, $F_i^{yz} = \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{e}_i^{\tau}$, $\mathbf{R}_i = \tilde{\mathbf{R}}_i/\tilde{\Phi} = (R_i^x, R_i^y, R_i^z)$, $\mathbf{r}_C = \tilde{\mathbf{r}}_C/\rho = (x_C, y_C, z_C)$.

Let $p = R_1^x - R_2^x$. We further define the coordinate differences, and the supporting points difference of angles of axis Oz are $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, and $s_{21} = \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1$, $c_{21} = \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1$. We then project system (2) onto the axes $Oxyz$. For arbitrary surface we find that the second equation of (2) (corresponding to the moment) has the skew-symmetric matrix with respect to the component R_i^x [10]. These are 2 independent equation, while the third equation corresponds to the restriction of the point C to the plane containing the two footholds. As a result, the system (2) yields 5 independent equation and a restriction.

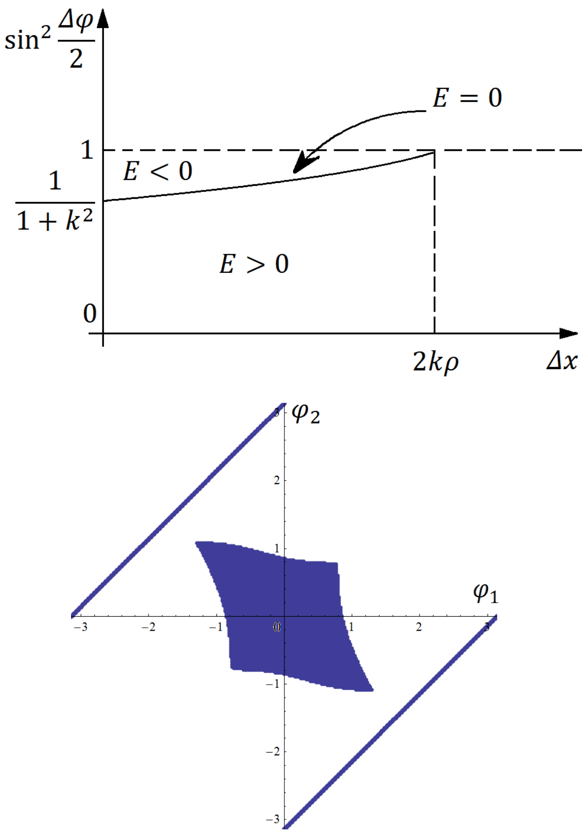


Figure 2. The analytical and the numerical parameter diagrams

2. A Three-finger Grasp

During the robot motion one, two and three supporting points phases are changed. For example, australian lizards - yellow-bellied three-toed skinks (saiphos equalis). First, we consider the one-supporting phase of the grasp. Let $m = 1$, then the motion existing condition is reaction is equal to force $\mathbf{\Phi}$ and supporting point and the point C are on the line along $\mathbf{\Phi}$, while the angle between $\mathbf{\Phi}$ and the normal do not exceed the friction angle.

If the grasp inside the surface then point C is under the surface. In opposite case the grasp is under the surface. Then point C is inside the surface. Or if one finger out the cylinder, the center mass of an object is up the finger. And the angle between the weight and the normal not exceed friction angle.

If m is even. And one of each par of the supporting points is on and another is in the thin surface such that we consider them like one geometrical point. Then it does not matter where the point C is on the line.

Let $n = 2$, and $x_1 \neq x_2$. Then $p = F_2^x - F_1^x$, and from (2):

$$
\begin{aligned}
&F_1^x = (\sin\alpha + p)/2, \qquad F_2^x = (\sin\alpha - p)/2,\\
&N_1 = \frac{-p\sin^2\dfrac{\Delta\varphi}{2} + (x_2 - x_C)\cos\varphi_1\cos\alpha}{\Delta x} + N_1^{\alpha},\\
&N_2 = \frac{-p\sin^2\dfrac{\Delta\varphi}{2} + (x_C - x_1)\cos\varphi_2\cos\alpha}{\Delta x} + N_2^{\alpha},\\
&F_1^{yz} = \frac{-p\sin\Delta\varphi + 2(x_2 - x_C)\sin\varphi_1\cos\alpha}{2\Delta x} + F_1^{(yz)\alpha},\\
&F_2^{yz} = \frac{p\sin\Delta\varphi + 2(x_C - x_1)\sin\varphi_2\cos\alpha}{2\Delta x} + F_2^{(yz)\alpha},\\
&\tan\alpha = \frac{\Delta x(\sin\varphi_2 + y_c) + (x_C - x_2)s_{21}}{y_C c_{21} + z_C s_{21} - \sin\Delta\varphi},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

where N_i^{α} and F_i^{yz} are the functions of x_i, φ_i, y_C and z_C.

The conditions (4) can be displayed in the form

$$
Ep^2 + B_1 p + C_1 \leqslant 0, \qquad Ep^2 + B_2 p + C_2 \leqslant 0, \tag{6}
$$

where

$$
E = (\Delta x)^2 + \sin^2\Delta\varphi - 4k^2\sin^4\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right),
$$

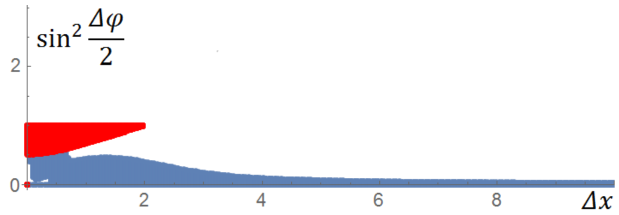


Figure 3. For $\alpha = \pi/4$; $x_2 = -x_1$, $\varphi_2 = -\varphi_1$

B_i, C_i are the functions of x_i, φ_i, x_C, y_C and z_C.

The boundaries between different regimes can be determined analytically. For example, in the case of $E < 0$, the solution exists, and can be obtained analytically [10], as shown in Fig. 2, on the left. Note that in this case it's limited to the range $\Delta x \leqslant 2k\rho$. In contract to this behavior, for $E \geqslant 0$ there is no such restriction and an additional step is required to address the question of the existence of the solution. At the point $(0, 0)$ we find $E = 0$, which means that two footholds are orthogonal to the cylinder axis. Here, two possible solution are either identical, or limited to a single diameter. In the latter case, point C and the reaction have to be in one plane, parallel to force Φ, and the problem has a solution.

For the desired legs or fingers configurations and given point C, the problem can be solved numerically. In Fig. 2, on the right, we present the numerical solution for the example when $x_2 = -x_1 = \rho = k = 1$. Note that in this case $E > 0$.

Specifically, the condition (6) was analyzed in two cases, when $E = 0$ and $E > 0$, and when the solution of the problem does exist, the solutions were shown in the plot.

For $E > 0$, we need to consider two conditions. First is the restriction on the determinants $D \geqslant 0$, while the second is the requirement of a non-empty intersection of the set of points of the intervals between the roots of quadratic equations. From this plot we see that, if two points are on one diameter, then the solution of the reaction distribution problem exists. The two lines in the plot, correspond to $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$ or $\varphi_1 = \varphi_2 - \pi$. The rhombus form represents the requirement on the determinants $D_i \geqslant 0$, while additional conditions further restrict the range [12].

In Fig. 3 we present the results for $E > 0$ and $E \leqslant 0$, when $x_2 = -x_1$, $\varphi_2 = -\varphi_1$ and shows the case of $\alpha = \pi/4$. The figures for $\alpha = 0$ and increased to $\pi/2$ are shown in [13]. Note that when $\alpha = \pi/2$, the solutions exists only for diametrical footholds.

For two-finger robot when E is negative, the solution exists, and obtained analytically [14]. Using numerical simulations we explain the reaction distribution problem existing and build this problem so-

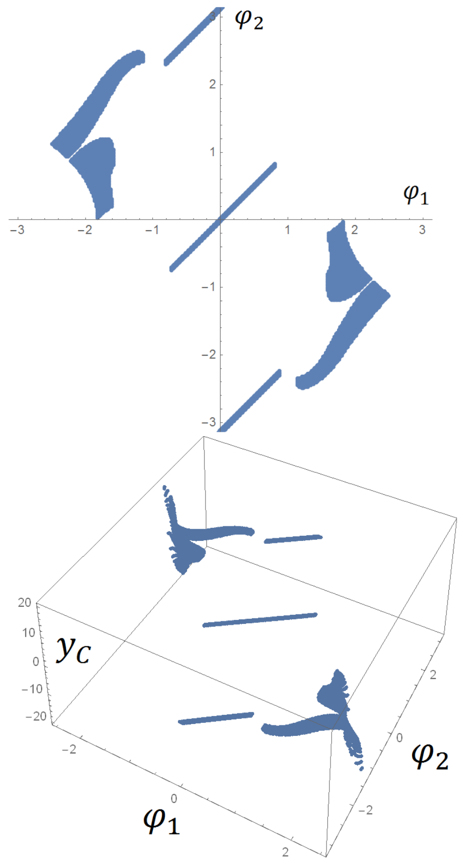


Figure 4. Admissible area for $\alpha = \pi/3$; $\Delta x = 1, 1$.

lution existing fields for given footholds and point C position [15]. For example, for two-foothold phase, we consider symmetric, about point C, along and orthogonal cylinder axis, robot configurations [16]. For first of these configurations examined cases with non-negative E coefficient, for distances between point C and footholds [17]. Reactions distribution problem solution existing fields constructed on the two angles plane, correspond to footholds projections on the cylinder base and three dimensional fields which supplement this plane by point C z-coordinate altitude [18]. When x equals to $1, 1$ for α equals $\pi/3$ in three-dimensional fields observed bundles of separate points, Fig. 4. That means that the point C altitude position more harsh change while changing the angles.

A possible three fingers configuration: one of the fingers is in vertical plane containing cylinder axis and another two are in the plane orthogonal to the axis.

3. Conclusion

A solution of the problem of reaction distribution with respect to supporting points on the cylinder, both for walking robot and its grasp, demonstrates a great variety of cases that must be analyzed individually. Therewith, it turns out that there exist isolated equilibriums, even if support polygon does not degenerate. For example, for a smooth cylinder or surface. Such a specify principally differentiates the problem of reaction distribution on a cylinder or a surface from the problem of reaction distribution on a horizontal plane, two or some planes. For a set of equilibriums to be connected in the case of three supporting points, this provides a means for comfortable quasi stationary motion, it is necessary to select supporting points in a special way, so that one of them be located in the lower or upper element of the smooth cylinder. For rough cylinder this solution exists. If between the surface of the cylinder and legs of walking robot or it fingers, viscous friction arises, then this condition is essential, therewith, given dry friction, it is of lesser importance for algorithm of motion control.

The motion of the walking robot between two horizontal supporting planes has additional possibilities for the distributions of reactions in comparison with the motion on one supporting plane for the cases where a projection of the center of mass of the robot, or part of planes, is beyond the supporting polygon. The proposed method of distribution of reaction allows one to estimate the limitations of these possibilities and to use them profitably.

During the robot motion, one, two and three supporting point phases are changed. And for example the humanoid robot with five arm fingers can hold the object by one and grasp by two or three-fingers. The reaction distribution problem have a solution in following cases. Let we give some examples.

1. One-supporting point phase. So the motion existing condition is reaction is equal to force $\mathbf{\Phi}$ and supporting point and the point C are on the line along $\mathbf{\Phi}$. And the angle between $\mathbf{\Phi}$ and the normal not exceed friction angle.

   1.1 If the grasp inside the surface then point C is under the surface. In opposite case the grasp is under the surface. Then point C is inside the surface.

   1.2 If m is even. And one of each par of the supporting points is on and another is in the thin surface such that we consider them like one geometrical point. Then it does not matter where the point C is on the line.

2. Two-supporting point phases. In case when the grasp is inside the cylinder. The point C and the reactions have to be in the plane parallel to force $\mathbf{\Phi}$.

   2.1 If supporting points are on one diameter.

   2.2 When coefficient $E < 0$. And in some fields with connected set of points, when $E \geqslant 0$. Robot can hold the cylinder by two fingers on one diameter.

3. A robot can hold the horizontal cylinder by three fingers. Let one of the points is in vertical plane containing cylinder axis and another are in the plane orthogonal to the axis. Without friction, the cylinder center of mass has to be in the vertical plane that contain the cylinder axis. The supporting points are on the external surface of the lower semi-cylinder and the center mass of the cylinder is in the footholds triangle. If the first supporting point is in the lower semi-cylinder and two another are on the upper, the center of mass has to be out of the footholds triangle.

4. If m is even. And one of each par of the supporting points is on and another is in the thin surface such that we consider them like one geometrical point. Then it does not matter where is the point C.

So the robot can transfer the cylinder by one, two or three fingers.

References

[1] Lensky, A.V., Lizunov, A.V., Mozhzhevelov, S.B. and etc. Control of the manipulator along communication // Bulletin of the USSR Academy of Sciences. Solid mechanics. 1987. V. 57, No. 5. Pp. 41–49.

[2] Okhotsimski, D.E., Golubev, Yu.F. Mechanics and Motion Control of Automatic Locomotion Apparatus. Moscow. Nauka Publishers. 1984. (in Russian.)

[3] Beletski, V.V. Two-legged Locomotion. Model Dynamics and Control Problems. Moscow. Nauka Publishers. 1984 (in Russian.)

[4] Chernousko, F.L. Equilibrium conditions for a solid on a rough plane. Izvestiya RAN, ser. Solid Mechanics. 1988. No. 6. Pp. 6–17. (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=25761712

[5] Bolotnik N.N., Chernousko F.L. Parameter optimization for a tube-crawling robot . Izvestiya RAN, ser. Solid Mechanics. 1995. No. 6. Pp. 27–41 (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=26050814

[6] Pfeiffer F., Rossmann T., Chernousko F.L., Bolotnik N.N. Optimization of Structural Parameters and Gaits of a Pipe-Crawling Robot. In: Bestle D., Schiehlen W. (eds) IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems. Solid Mechanics and its Applications, vol 43. 1996. Pp. 231–238.
DOI: 10.1007/978-94-009-0153-7_29

[7] Golubev, Yu.F.: The Fundamentals of Theoretical Mechanics. Moscow State University. 2019. 728 p. (in Russian).

[8] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V. Static-Stability Conditions for a Walking Apparatus in Horizontal Cylinder and on Two Planes. Journal of Computer and Systems Sciences International. Robotics. 1999. Vol. 38, No 2. Pp. 278–284 (Translated from Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya. 1999. No 2. Pp. 116–122.
https://elibrary.ru/item.asp?id=13318257

[9] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V. On Stability of Equilibrium Positions for Walking Robot in a Smooth Horizontal Tube. Proc. of the Third International Conference on Climbing and Walking Robots. Madrid, Spain. 2000. Pp. 433–440.

[10] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V.: Equilibrium Problem for a Two-Legged Robot on Rough Horizontal Cylinder Taking into Account the Reaction Components Along the Cylinder Axis, Moscow, Russia: MAKS Press. 2010. 61 p. (in Russian).

[11] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V. Walking Robot Dynamics on a Rough Inclined Cylinder. In 8-th European Solid Mechanics Conference, Book of Abstracts. Graz. 2012. Pp. 1–2.

[12] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V. Prescribed Motion of a Two-legged Walking Robot on a Rough Cylinder. Proc. of the 2016 International Conference ?Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems? (Pyatnitskiy's Conference). Moscow. 2016. Pp. 1–4.
DOI: 10.1109/STAB.2016.7541184

[13] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V. The Existence of Solution for Robot Motion on a Cylinder Pipe. All-Russian Meeting of University Lecturers and Department Heads on Theoretical Mechanics, Robotics and Mechatroinics. 2016. Pp. 30–33. (in Russian).

[14] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V. Footholds Admissible Areas Structure Properties for a Two-legged Walking Robot on an Inclined Cylinder. In the Lomonosov Readings. Mechanics Section. Moscow. 2017. Pp. 64–65. (in Russian).

[15] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V. Footholds Admissible Areas Structure of a Two-legged Walking Robot on an Inclined Cylinder. Abstracts of International Scientific Conference Fundamental and Applied Problems of Mechanics, Dedicated to the 170th Anniversary of a Distinguished Russian Scientist N. E. Zhukovsky. Bauman Moscow State Technical University. 2017. Pp. 83–84. (in Russian).

[16] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V. Two-legged Walking Robot Prescribed Motion on a Rough Cylinder. AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1959. 030009.
DOI: 10.1063/1.5034589

[17] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V. An Analogy of the Equilibrium of a Two-legged Robot on a Cylinder for the Problem of Transfer by a Manipulator With a Two-finger Grasp of a Cylinder. Proceedings of XLVI Summer School-Conf. ?Advanced Problems in Mechanics?. St. Petersburg, Russia. 2018. Pp. 117–124.
http://www.ipme.ru/ipme/conf/APM2018/Proceedings-2018.html

[18] Golubev, Yu.F., Melkumova, E.V. Footholds Admissible Areas Structure of a Two-legged Walking Robot on an Inclined Cylinder. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. V. 468. 012003.
DOI: 10.1088/1757-899X/468/1/012003

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 3, с. 208–213

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.027
DOI: 10.21662/mfs2019.3.027
УДК 532.546, 541.1

Получена: 26.08.2019
Принята: 21.10.2019

Модель течения раствора кислоты в пористом полупространстве

Ильясов А.М.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Для увеличения нефтеотдачи слабопроницаемых карбонатных пластов используют кислотные обработки слабоконцентрированным водным раствором соляной кислоты. При этом могут возникнуть различные режимы растворения породы в зависимости от скорости закачки раствора кислоты в породу — от полного растворения скелета породы сплошным фронтом при малых скоростях закачки до возникновения протяженных одиночных червоточин при больших скоростях закачки. В работе разработана одномерная нестационарная модель течения водного раствора соляной кислоты в пористой карбонатной породе с учетом движения фронта реакции растворения карбонатной породы. Найдены граничные условия, при которых полученная система уравнений сводится к автомодельной системе уравнений пятого порядка. В отличие от автомодельной фильтрации ньютоновской жидкости в полупространстве степень зависимости автомодельной независимой переменной равна $-3/2$, а зависимые переменные (пористость и скорость) фильтрации зависят от показателя степени зависимости проницаемости породы от изменения пористости после кислотной обработки.

Ключевые слова: карбонатная порода, фильтрация водного раствора кислоты, скорость реакции, автомодельная система уравнений

1. Математическая модель

Нередко для увеличения продуктивности добывающей скважины в карбонатных пластах применяются солянокислотные обработки или кислотные гидроразрывы пласта (КГРП), использующие водный раствор соляной кислоты с концентрацией 10–25%. Карбонатные породы состоят из основных минералов: кальцита ($CaCO_3$), доломита ($CaMg(CO_3)_2$), магнезита ($MgCO_3$) и других карбонатов [1]. При проведении кислотных обработок основным процессом, протекающим в карбонатной породе, является ее растворение. При течении водного раствора кислоты в карбонатных коллекторах происходят химические реакции кислоты с указанными минералами вида:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{CaCO_3} + 2\mathrm{HCl} = \mathrm{CaCl_2} + \mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O},\\
\mathrm{CaMg(CO_3)_2} + 2\mathrm{HCl} = \mathrm{CaCl_2} +\\
+ \mathrm{MgCl_2} + 2\mathrm{CO_2} + 2\mathrm{H_2O},\\
\mathrm{MgCO_3} + 2\mathrm{HCl} = \mathrm{MgCl_2} + \mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O}.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

В действительности реакции (1) и возможные другие реакции идут одновременно. В результате этих реакций карбонатов с соляной кислотой образуются хорошо растворимые в воде соли кальция и магния, вода и углекислый газ. Таким образом, можно считать, что в пластовых условиях соли и углекислый газ находятся в растворенном виде, то есть относятся к жидкой фазе.

Влияние химических реагентов на скорость взаимодействия соляной кислоты на карбонатную породу изучалось в работе [2]. Влияние температуры и концентрации соляной кислоты на полноту растворения карбонатной породы исследовалось в работе [3].

В настоящей работе влиянием температурных эффектов на течение раствора соляной кислоты в карбонатной пористой породе пренебрегается. Целью данной работы является разработка одномерной изотермической нестационарной модели течения водного раствора кислоты в пористой карбонатной породе для адекватного моделирования утечки соляной кислоты через стенки трещины при КГРП.

Диффузионными процессами в жидкой фазе в пористом коллекторе пренебрегаем, поскольку всегда характерное время диффузии $t^{(D)}$ много больше характерного времени конвекции t_*, то есть выполняется неравенство

$$t^{(D)} = \frac{l^2}{D} \gg t_*. \tag{2}$$

Действительно, полагая глубину проникновения раствора кислоты в пористую карбонатную породу равной порядка $l = 1$ м [2], коэффициент конвективной диффузии равным порядка $D = 10^{-9}$ м^2/с, а время процесса равным $t_* = 30$ мин $= 1800$ с, получим неравенство 10^9 с $\gg 1800$ с. Таким образом, будем рассматривать изотермическое бездиффузионное приближение процесса течения кислоты в породе.

Кроме того, будем решать задачу в двухфазном приближении и в приближении неподвижного скелета породы [4]. Также будем считать, что жидкая фаза является двухкомпонентной и состоит из воды и кислоты. Переходы вещества из твердой в жидкую фазу происходят только вследствие химических реакций типа (1).

Снабдим нижним индексом «1» зависимые переменные, относящиеся к скелету породы, а нижним индексом «2» — к жидкой фазе в поровом или трещиноватом пространстве. Зависимые переменные, относящиеся к кислоте, будем отмечать нижним индексом «(a)», а относящиеся к воде — нижним индексом «(w)».

Уравнение неразрывности для скелета породы и уравнения неразрывности для каждой компоненты в жидкой фазе имеют вид [4]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = J_{(s)}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_{2(a)}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{2(a)} v)}{\partial x} = J_{(a)}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho_{2(w)}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{2(w)} v)}{\partial x} = J_{(w)}. \tag{5}$$

где ρ_1 — приведенная плотность твердой фазы; $\rho_{2(a)}$ — приведенная плотность кислоты; $\rho_{2(w)}$ — приведенная плотность воды; $J_{(s)}$, $J_{(a)}$ и $J_{(w)}$ — отнесенные к единице объема скорости растворения скелета породы, расход кислоты и образования воды соответственно (скорости реакции по соответствующему веществу); v — скорость течения жидкой фазы; t — время; x — пространственная координата.

Приведенные плотности связаны с коэффициентом пористости m соотношениями

$$\rho_1 = (1-m)\rho_s^0, \quad \rho_2 = m\rho_2^0, \tag{6}$$

где ρ_s^0, ρ_2^0 — соответственно истинные плотности материала скелета породы и водного раствора кислоты.

Введем массовые доли (концентрации) компонент в жидкой фазе

$$\begin{gathered} c_{(a)} = \frac{\rho_{2(a)}}{\rho_2}, \quad c_{(w)} = \frac{\rho_{2(w)}}{\rho_2}, \\ \rho_2 = \rho_{2(a)} + \rho_{2(w)}, \quad c_{(a)} + c_{(w)} = 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Примем, что скорость фильтрации жидкой фазы в карбонатном коллекторе подчиняется закону Дарси

$$W = mv = -\frac{k(m)}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{8}$$

где k, μ — проницаемость породы и вязкость водного раствора кислоты соответственно; p — давление в жидкости.

Изменение проницаемости породы вследствие ее растворения будем учитывать по формуле из работы [5]:

$$k(m) = A_0 k_0 \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\gamma}, \tag{9}$$

где A_0, γ — экспериментальные константы; k_0, m_0 — проницаемость и пористость породы до кислотной обработки.

Поскольку карбонатная порода представляет собой смесь минералов, то скорость химической реакции определяется экспериментально. Несмотря на то, что химические реакции в карбонатах являются гетерогенными реакциями, их скорости описываются законом Гульдберга–Вааге для гомогенных реакций, который часто выполняется и для сложных реакций [6]. Поскольку концентрация скелета породы практически не изменяется и приблизительно равна единице, то из закона Гульдберга–Вааге следует, что эмпирическая скорость реакции определяется выражением

$$J_* = K_h s c_{(a)}^n, \tag{10}$$

где $s = S/V$ — удельная площадь реакции; S, V — площадь реакции и реагирующий объем соответственно; K_h — приведенная константа реакции, имеющая в системе единиц СИ размерность $[K_h]$=кг/(м^{2}с); n — порядок химической реакции кислоты с карбонатной породой, которая может быть дробной, поскольку параллельно или последовательно с образованием неустойчивых продуктов могут идти несколько различных реакций с образованием одного и того же вещества [6].

Предположим, что в карбонатной породе преобладает какой-то один минерал, реакция кислоты с которым происходит по одной из реакций (1). Тогда скорости реакций по соответствующему веществу в уравнениях (3)–(5) будут пропорциональны стехиометрическим коэффициентам в уравнениях (1):

$$J_{(s)} = -\nu_{(s)} J_*, \quad J_{(a)} = -\nu_{(a)} J_*, \quad J_{(w)} = \nu_{(w)} J_*, \tag{11}$$

где $\nu_{(s)}$, $\nu_{(a)}$ и $\nu_{(w)}$ — стехиометрические коэффициенты в реакциях (1). У реагирующих веществ перед стехиометрическими коэффициентами стоит знак «–», а у продуктов реакции — знак «+» [6].

Для простоты введем обозначения

$$c_{(a)} = c, \qquad c_{(w)} = 1 - c. \tag{12}$$

Учитывая, что истинные плотности скелета породы и раствора кислоты практически постоянны $\rho_s^0 = \mathrm{const}_1$, $\rho_2^0 = \mathrm{const}_2$, с учетом замены уравнения (5) суммой уравнений (4), (5) из (3)–(12) следует следующая система, описывающая течение раствора соляной кислоты в пористой породе:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\nu_{(s)} K_h s}{\rho_s^0} c^n, \tag{13}$$

$$\frac{\partial (mc)}{\partial t} - \frac{A_0 k_0}{\mu m_0^\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(m^\gamma c \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\frac{\nu_{(a)} K_h s}{\rho_2^0} c^n, \tag{14}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} - \frac{A_0 k_0}{\mu m_0^\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(m^\gamma \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{(-\nu_{(a)} + \nu_{(w)}) K_h s}{\rho_2^0} c^n, \tag{15}$$

$$W = -\frac{A_0 k_0}{\mu m_0^\gamma} m^\gamma \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{16}$$

$$\frac{dx_{(a)}}{dt} = \frac{W}{m} = -\frac{A_0 k_0 m^{\gamma-1}}{\mu m_0^\gamma} \frac{\partial p}{\partial x}, \ x_{(a)}(0) = 0. \tag{17}$$

Последнее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) определяет траекторию фронта кислоты.

При известных константе K_h и порядке реакции n система уравнений (13)–(15) будет полной, если задана удельная поверхность гетерогенной химической реакции s.

Для эффективной пористой среды из шаров одинакового диаметра $2r$ или для идеальной пористой среды из капиллярных трубок одного диаметра $2r$ получается одно и то же выражение для удельной поверхности s. Действительно, по формуле Козени–Кармана имеем [7]:

$$s = \frac{2m}{r}, \qquad r = \sqrt{\frac{8k}{m}}.$$

Отсюда следует формула

$$s = \frac{m^{3/2}}{(2k)^{1/2}}. \tag{18}$$

Из (13)–(17) и (18) следует система уравнений для течения раствора кислоты в пористой среде:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = A_1 m^{(3-\gamma)/2} c^n, \quad A_1 = \frac{\nu_{(s)} K_h m_0^{\gamma/2}}{\rho_s^0 \sqrt{2k_0}}, \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial (mc)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(m^\gamma c \frac{\partial p}{\partial x} \right) - B_1 m^{(3-\gamma)/2} c^n, \\ B_1 = \frac{\nu_{(a)} K_h m_0^{\gamma/2}}{\rho_2^0 \sqrt{2k_0}}, \quad D_1 = \frac{A_0 k_0}{\mu m_0^\gamma}, \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial m}{\partial t} = D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(m^\gamma \frac{\partial p}{\partial x} \right) - C_1 m^{(3-\gamma)/2} c^n, \\ C_1 = \frac{(\nu_{(a)} - \nu_{(w)}) K_h m_0^{\gamma/2}}{\rho_2^0 \sqrt{2k_0}}, \end{gathered} \tag{21}$$

$$W = -D_1 m^\gamma \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{22}$$

$$\frac{dx_{(a)}}{dt} = \frac{W}{m} = -D_1 m^{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial x}, \ x_{(a)}(0) = 0. \tag{23}$$

2. Автомодельная система уравнений

Рассмотрим полученную систему уравнений и попытаемся найти ее автомодельное представление. Для этого введем следующие представления зависимых и независимых переменных рассматриваемых систем уравнений:

$$m(x,t) = B_* M(\xi) t^s, \quad \xi = \frac{x}{E_* t^r}, \tag{24}$$

$$c(x,t) = C_* C(\xi) t^l, \tag{25}$$

$$p(x,t) = D_* P(\xi) t^q, \tag{26}$$

$$W(x,t) = A_* W(\xi) t^{r_1}. \tag{27}$$

Подставим представления (24)–(27) в систему уравнений (19)–(23), что дает следующие связи для показателей степеней в (24)–(27):

$$s - 1 = nl + (3-\gamma)s/2, \tag{28}$$

$$r_1 = s\gamma - r + q, \tag{29}$$

$$s - 1 = s\gamma - 2r + q, \tag{30}$$

$$l + s - 1 = nl + (3-\gamma)s/2. \tag{31}$$

Система уравнений (28)–(31) остается незамкнутой.

А также дает связи между постоянными величинами «со звездочкой»:

$$C_*^n = B_*^{(\gamma-1)/2}, \tag{32}$$

$$\frac{B_*^\gamma D_*}{E_* A_*} = 1, \tag{33}$$

$$\frac{B_*^{\gamma-1} D_*}{E_*^2} = 1, \tag{34}$$

$$\frac{C_*^{n-1}}{B_*^{(\gamma-1)/2}} = 1. \tag{35}$$

Эта система уравнений также является незамкнутой.

Система уравнений (19)–(21) является системой уравнений четвертого порядка по пространственной переменной, поэтому должно быть поставлено четыре граничных условия. Для коэффициента пористости, согласно (19), граничных условий ставить не нужно, поскольку согласно (19) если известна концентрация кислоты, то пористость породы вычисляется автоматически.

Поскольку в задаче имеется подвижный фронт раствора кислоты, то граничные условия на выходе в данной задаче должны ставиться на фронте раствора кислоты.

Подберем граничные условия для системы (19)–(22) таким образом, чтобы они удовлетворяли условию автомодельности.

На входе примем условие постоянства давления

$$p(0,t) = p_0. \tag{36}$$

Отсюда следует, что

$$q = 0,$$

система уравнений (28)–(31) становится замкнутой и имеет решение:

$$\begin{gathered} l = q = 0, \quad s = 2/(\gamma-1), \\ r = 3/2, \quad r_1 = (\gamma+3)/2(\gamma-1). \end{gathered} \tag{37}$$

Также из (36) следует

$$D_* = p_0,$$

система уравнений (32)–(35) становится замкнутой, а ее решением является

$$B_* = C_* = 1, \quad D_* = p_0, \quad A_* = E_* = p_0^{1/2}. \tag{38}$$

Таким образом, представления (24)–(27) имеют вид:

$$m(x,t) = M(\xi) t^{2/(\gamma-1)}, \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{p_0} t^{3/2}},$$

$$c(x,t) = C(\xi),$$

$$p(x,t) = p_0 P(\xi),$$

$$W(x,t) = \sqrt{p_0} W(\xi) t^{(\gamma+3)/2(\gamma-1)}.$$

Рассмотрим остальные граничные условия, согласующиеся с полученными решениями (37), (38).

Граничное условие для давления на фронте кислоты $x_{(a)}(t)$ также можно взять в виде условия первого рода:

$$p(x_{(a)}(t), t) = p_k.$$

Аналогично, граничные условия для концентрации кислоты на входе и выходе соответственно можно взять в виде:

$$c(0,t) = c_0, \qquad c(x_{(a)}(t), t) = 0.$$

В результате получим следующую автомодельную систему уравнений:

$$\begin{gathered} 2/(\gamma-1) M(\xi) - 3/2\xi \frac{dM(\xi)}{d\xi} = \\ = A_1 C^n(\xi) M^{(3-\gamma)/2}(\xi), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 2/(\gamma-1) C(\xi) M(\xi) - 3/2\xi C(\xi) \frac{dM(\xi)}{d\xi} - \\ - 3/2\xi M(\xi) \frac{dC(\xi)}{d\xi} = D_1 \frac{d}{d\xi} \times \\ \times \left(C(\xi) M^\gamma(\xi) \frac{dP}{d\xi} \right) - B_1 C^n(\xi) M^{(3-\gamma)/2}(\xi), \end{gathered}$$

$$2/(\gamma-1)M(\xi) - 3/2\xi\frac{dM}{d\xi} =$$
$$= D_1\frac{d}{d\xi}\left(M^\gamma(\xi)\frac{dP}{d\xi}\right) - C_1C^n(\xi)M^{(3-\gamma)/2}(\xi)$$

с граничными условиями на входе

$$\xi = 0: \quad P(0) = 1, \quad C(0) = c_0$$

и граничными условиями на выходе

$$\xi = \xi_0: \quad P(\xi_0) = p_k/p_0 = \bar{p}_k, \quad C(\xi_0) = 0.$$

Координата фронта реакции подчиняется уравнению

$$x_{(a)}(t) = \sqrt{p_0}t^{3/2}\xi_0.$$

3. Заключение

Разработана математическая модель течения водного раствора соляной кислоты в пористой карбонатной породе в изотермическом бездиффузионном приближении. Найдены граничные условия, удовлетворяющие условию автомодельности. Полученная система уравнений представлена в автомодельном виде. Полученную автомодельную систему уравнений можно использовать для моделирования утечек раствора соляной кислоты через стенки трещины при КГРП.

Список литературы

[1] Ибрагимов Г.З., Хисамутдинов Н.И. Справочное пособие по применению химических реагентов в добыче нефти. М.: Недра, 1983. 298 с.

[2] Хлебников В.Н. Кинетические закономерности взаимодействия кислотных растворов с карбонатной породой нефтяного месторождения // Вестник казанского химико-технологического института. 2003. С. 282–288.

[3] Хубларян А.Б., Моисеев А.В., Лазарев В.М. Изучение влияния концентрации соляной кислоты при различных температурах на процесс взаимодействия с нефтеносной породой // Успехи в химии и химической технологии. 2008. Т. 22, № 3(83). С. 96–100.
https://elibrary.ru/item.asp?id=20190424

[4] Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.

[5] Labrid J.C. Thermodynamics and Kinetic Aspects of Argillaceous Sandstone Acidizing // SPEJ, april, 1975. Pp. 117–128.
https://www.osti.gov/biblio/6641817

[6] Стромберг А.Г., Семченко Д.П. Физическая химия. М.: Высш. Шк., 2001. 527 с.

[7] Федоров К.М., Вольф А.А., Кадочникова Л.М. Подземная гидромеханика. Учебно-методическое пособие. ТГУ, 2007. 92 с.

ISSN 2658–5782 14 (2019), **3**, 208–213

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.027
DOI: 10.21662/mfs2019.3.027

Received: 26.08.2019
Accepted: 21.10.2019

Model of acid solution flow in a porous half-space

Il'yasov A.M.

Ufa State Aviation Technical University, Ufa

To increase oil recovery of weakly permeable carbonate rock, acid treatments with a weakly concentrated aqueous solution of hydrochloric acid are used. There can be various modes of dissolution of rocks depending on the injection rate of the acid solution in the breed from complete dissolution of the skeleton of the rock with a solid front at low speeds the injection to the emergence of long, single wormhole at high speeds of injection. A one-dimensional unsteady model of the flow of an aqueous hydrochloric acid solution in a porous carbonate rock is developed taking into account the movement of the front of the carbonate rock dissolution reaction. The boundary conditions under which the obtained system of equations is reduced to a self-similar system of equations of the fifth order are found. In contrast to self-similar filtration of a Newtonian fluid in the half space, the degree of dependence of self-similar independent variable is equal to $-3/2$, and the dependent variables are the porosity and rate of filtration depend on the exponent of the dependence of rock permeability from changes in porosity after acid treatment. A one-dimensional non-stationary model of the flow of an aqueous solution of hydrochloric acid in a porous carbonate rock was developed taking into account the movement of the front of the dissolution reaction of carbonate rock. Boundary conditions are found under which the resulting system of equations reduces to a self-similar system of fifth-order equations. Unlike self-similar filtering of Newtonian fluid in half-space, the degree of dependence of the self-similar independent variable is $-3/2$, and the dependent variables (porosity and speed) of filtration depend on the degree of dependence of rock permeability on the change in porosity after acid treatment.

Keywords: carbonate rock, filtration of an aqueous acid solution, reaction rate, self-similar system of equations

References

[1] Ibragimov G.Z., Khisamutdinov N.I. [Handbook on the use of chemicals in oil production] Spravocnoe posobie po primememiyu ximicheskix reagentov v dobyche nefti. M.: Nedra, 1983. P. 298.

[2] Khlebnikov V.N. [Kinetic laws of interaction of acid solutions with carbonate rock of an oil field] Kineticheskie zakonomernosti vzaimodeejstviya kislotnyx rastvorov s karbonatnoj poroodoj neftyanogo mestorozhdeniya. [Herald of Kazan Chemical-tecnology Institute] Vestnik Kazanskogo ximikotexnologicheskogo instituta. 2003. Pp. 282–288.

[3] Khublaryan A.B., Moiseev A.V., Lazarev V.M. [Study of the effect of the concentration of hydrochloric acid at various temperatures on the process of interaction with oil-bearing rock] Izuchenie vliyaniya koncentracii solyanoj kisloty pri razlichnyx temperaturax na process vzaimodejstviya s neftenosnoj porodoj. [Advances in chemistry and chemical technology.] Uspexi v ximii i ximicheskoj texnologii. 2008. V. 22, No 3(83). Pp. 96–100. https://elibrary.ru/item.asp?id=20190424

[4] Nigmatulin R.I. [Fundamentals of the heterogeneous media mechanics] Osnovy mexaniki geterogennyx sred. M.: Nauka, 1978. P. 336.

[5] Labrid J.C. Thermodynamics and Kinetic Aspects of Argillaceous Sandstone Acidizing // SPEJ, april, 1975. Pp. 117–128. https://www.osti.gov/biblio/6641817

[6] Stromberg A.G.? Semchenko D.P. [Physical chemistry] Fizicheskaya ximiya. M.: Vyssh. Shk., 2001. P. 527.

[7] Fedorov K.M., Volf A.A., Kadochnikova L.M. [Underground hydromechanics. Tutorial] Podzemnaya gidromexanika. Uchebnoe posobie. TGU, 2007. P. 92.

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 3, с. 214–217

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.028
DOI: 10.21662/mfs2019.3.028
УДК 534.113

Получена: 12.12.2019
Принята: 23.12.2019

Определение размеров цилиндрического концевого груза стержня

Аитбаева А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В настоящей статье рассматриваются свободные изгибные колебания однородного стержня. Левый конец стержня заделан, а на правом конце сосредоточен цилиндрический груз. В качестве известных акустических данных используются собственные частоты колебания стержня. Целью работы является определение параметров концевого цилиндрического груза стержня (масса, момент инерции, длина и радиус) по собственным частотам его колебаний. Для решения поставленной задачи используется дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. Это уравнение с известными граничными условиями сводится к спектральной задаче. Для нахождения массы и момента инерции груза был применен метод дополнительной неизвестной величины. Суть этого метода состоит в том, что в характеристическом определителе помимо слагаемых, которые содержат только неизвестные коэффициенты краевых условий в «чистом виде», присутствуют также произведения неизвестных коэффициентов. Некоторые из этих произведений предлагается считать новыми дополнительными неизвестными, через которые можно выразить остальные. Было показано, что по трем собственным частотам колебаний стержня можно найти массу и момент инерции груза. С помощью полученных выкладок выведены формулы для нахождения длины и радиуса цилиндрического груза, а также рассмотрены соответствующие примеры нахождения неизвестных параметров.

Ключевые слова: собственные значения, собственные частоты, цилиндрический груз, стержень

1. Введение

Современная жизнь человека неразрывно связана с многочисленными механизмами и устройствами. Поэтому на сегодняшний день становится важным изучение процессов, протекающих в механических системах. Особое значение имеют колебания и вибрации, которые, в силу непредвиденности, могут вызвать погрешности в работе машин, увеличить износ и заметно понизить надежность, возможны также разрушения и аварии. Вот почему важно решать задачи оперативного контроля технических конструкций и механизмов по характеристикам звуковых колебаний. Рассматриваемая в статье задача часто возникает в технических устройствах, поскольку деталями многих механизмов являются стержни с сосредоточенной массой на конце. Такими системами можно считать, в частности, краны и автомобили, автоматические записывающие устройства с трубками, из которых вытекает краска, детали некоторых механизмов виброзащиты. Если конец стержня недоступен для визуального осмотра, а разбор механизма представляет собой дорогостоящую процедуру, то для сохранения надежной работы механизма, возникает потребность в его ранней неразрушающей диагностике, например, акустической, то есть возникает задача определения параметров закрепления конца стержня по характеристикам звуковых колебаний.

Вопросы вычисления собственных частот распределенных механических систем достаточно хорошо изучены [1–4]. Обратные задачи для таких систем стали решаться относительно недавно [5–11]. Так, в работе [5] рассматриваются дискретные и непрерывные системы, с помощью которых моделируются изучаемые объекты. Данная книга посвящена задаче распознавания дефектов колебательных систем по характеру колебаний. В [7, 9] решаются задачи идентификации сосредоточенных масс на стержне и балке по собственным частотам продольных и изгибных колебаний. Работы [8, 11] посвящены задачам идентификации вида и параметров закрепления стержней и балок. В [11] определяются вид и параметры краевого условия одного из концов стержня по минимальному числу собственных частот колебаний. Найдены формулы для определения значений параметров груза, прикрепленного к концу стержня (массы и момента инерции) по трем собственным частотам его колебаний. В настоящей статье рассматривается цилиндрический груз на конце стержня, известны собственные частоты колебаний и требуется найти радиус и длину этого груза.

Исследуемая проблема возникает в связи с задачами неразрушающей диагностики, а также при создании виброзащитных и безопасных для здоровья технических систем.

2. Постановка задачи

Рассматривается однородный стержень, левый конец которого заделан, а на правом конце сосредоточен цилиндрический груз массой m_1 и моментом инерции I_1. Требуется определить размеры этого груза (радиус r_2 и высоту h) по собственным частотам колебаний стержня.

Для решения поставленной задачи используем уравнения свободных изгибных колебаний стержня [3]:

$$EI\frac{\partial^4 U(X,t)}{\partial X^4} + \rho F\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где $U(X,t)$ — прогиб оси стержня; EI — изгибная жесткость стержня; ρ — плотность материала; F — площадь поперечного сечения стержня.

При $t = 0$ должны выполнятся начальные условия: $U(X,0) = f(X)$, $U(x,t) = g(X)$, где $f(X)$, $g(X)$ — функции, определяющие начальное положение оси стержня.

Краевые условия для случая, когда левый конец стержня заделан, а на правом конце сосредоточен груз, имеют вид:

$$\begin{gathered} X = 0 : U(X,t) = 0, \ \frac{\partial U(X,t)}{\partial X} = 0; \\ X = L : EI\frac{\partial^3 U(X,t)}{\partial X^3} = -m\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2}, \\ EI\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2} = -I_1\frac{\partial^3 U(X,t)}{\partial X \partial t^2}. \end{gathered} \tag{2}$$

Введем обозначения $x = X/L$, $u = U/L$, где L — длина стержня, тогда уравнение (1) и краевые условия (2) запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho F L^4}{EI}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \\ x = 0 : u(x,t) = 0, \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \\ x = L : EI\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = -m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \\ EI\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -I_1\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2}. \end{gathered}$$

Обозначим $\rho F L^4/(EI)$ через λ^4. Тогда заменой $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$ поставленная выше задача сводится к следующей спектральной задаче [2]:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} Y_1(y) = y(0) = 0, \quad Y_2(y) = y'(0) = 0; \\ Y_3(y) = y'''(1) - a_1\lambda^4 y(1) = 0, \\ Y_4(y) = y''(1) - a_2\lambda^4 y'(1) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где $a_1 = m/(\rho F L)$, $a_2 = I_1/(\rho F L^3)$.

Требуется по собственным значениям задачи (3), (4) определить размеры (длину h и радиус r_2) концевого цилиндрического груза.

3. Решение задачи

Коэффициенты a_1 и a_2 по трем собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ задачи (3), (4) определяются по формулам [11, с. 20]:

$$a_1 = D_1/D, \ a_2 = D_2/D, \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} f_0(\lambda) = (1 + \cos\lambda\cosh\lambda)/\lambda^4, \\ f_1(\lambda) = (\cos\lambda\sinh\lambda - \sin\lambda\cosh\lambda)/\lambda^3, \\ f_2(\lambda) = -(\sin\lambda\cosh\lambda + \cos\lambda\sinh\lambda)/\lambda, \\ f_3 = \cos\lambda\cosh\lambda - 1, \end{gathered}$$

$$D = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_3(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_3(\lambda_2) \\ f_1(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_3(\lambda_3) \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_0(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_3(\lambda_1) \\ f_0(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_3(\lambda_2) \\ f_0(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_3(\lambda_3) \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_0(\lambda_1) & f_3(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_0(\lambda_2) & f_3(\lambda_2) \\ f_1(\lambda_3) & f_0(\lambda_3) & f_3(\lambda_3) \end{vmatrix}.$$

Верна следующая

Теорема. *Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ являются действительными собственными значениями задачи (3)–(4), причем определитель D отличен от нуля, то задача нахождения коэффициентов a_1 и a_2 по собственным* *значениям является корректной, а ее единственное решение дается формулами (5).*

Выразим массу m_1 и момент инерции I_1 груза через найденные коэффициенты a_1 и a_2:

$$m = a_1 FL\rho, \quad I_1 = a_2 FL^3 \rho. \tag{6}$$

Момент инерции полого толстостенного цилиндра массой m с внешним радиусом r_2 и внутренним радиусом r_1 определяется по формуле:

$$I_1 = \frac{m(r_2^2 + r_1^2)}{2}. \tag{7}$$

Массу концевого груза можно найти следующим образом:

$$m = \rho_1(V_2 - V_1) = \rho_1(\pi h r_2^2 - \pi h r_1^2) = \pi h \rho_1 (r_2^2 - r_1^2), \tag{8}$$

где $(V_2 - V_1)$ — объем полого толстостенного цилиндра; r_1 — радиус стержня (внутренний радиус цилиндра); ρ_1 — плотность материала груза; h — высота цилиндра.

Используя формулы (6)–(8), а также зная площадь поперечного сечения $F = \pi r_1^2$, получим систему уравнений с двумя неизвестными h и r_2:

$$a_1 \rho r_1^2 L = h\rho_1(r_2^2 - r_1^2), \quad 2a_2 L^2 = a_1(r_2^2 + r_1^2).$$

Откуда, учитывая, что радиус не может быть отрицательным, получим формулы для нахождения размеров груза цилиндрической формы (длины и радиуса):

$$h = \frac{a_1^2 r_1^2 \rho L}{\rho_1(2a_2L^2 - 2r_1^2 a_1)}, r_2 = \sqrt{\frac{2a_2L^2 - r_1^2 a_1}{a_1}}. \tag{9}$$

Пример 1. Рассматривается стальной стержень длиной $L = 15$ см и радиусом $r_1 = 0.7$ см. Левый конец стержня заделан, а на правом конце имеется цилиндрический груз. Известны собственные значения: $\lambda_1 = 2.156242$, $\lambda_2 = 5.724958$, $\lambda_3 = 9.465460$. Плотность груза и плотность стержня одинаковы $\rho = \rho_1 = 7,86$ г/см^3. Требуется найти размеры концевого груза: длину и радиус.

Используя формулу (5) по известным собственным значениям найдем коэффициенты a_1 и a_2:

$$a_1 = 0.110190, \quad a_2 = 0.000365.$$

Полученные значения и известные параметры подставим в (9) и найдем радиус r_2 и длину h цилиндрического концевого груза:

$$r_2 = 1.0003796 \approx 1 \text{ см}, \quad h = 0.550444 \approx 0.5 \text{ см}.$$

Пример 2. Имеется стальной стержень длиной $L = 10$ см и радиусом $r_1 = 0.5$ см. Левый конец стержня заделан, а на правом конце имеется цилиндрический груз из серебра (плотность стали $\rho = 7,86$ г/см^3, плотность серебра $\rho_1 = 11,5$ г/см^3). Требуется по собственным значениям $\lambda_1 = 2.663834$, $\lambda_2 = 6.530157$, $\lambda_3 = 9.652572$ найти размеры этого груза: длину и радиус.

Используя формулу (5) по известным собственным значениям найдем коэффициенты a_1 и a_2:

$$a_1 = 0.210693, \quad a_2 = 0.000779.$$

Полученные значения и известные параметры подставим в (9) и найдем радиус r_2 и длину h цилиндрического концевого груза:

$$r_2 = 0.699997 \approx 0.7 \text{ см}, \quad h = 1.7219023 \approx 1.7 \text{ см}.$$

4. Заключение

Показано, что по трем собственным частотам колебаний стержня можно найти массу и момент инерции груза. С помощью полученных выкладок выведены формулы для нахождения длины и радиуса цилиндрического груза, а также рассмотрены соответствующие примеры нахождения неизвестных параметров.

Список литературы

[1] Стрэтт Дж.В. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.

[2] Колатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 504 с.

[3] Вибрации в технике: справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания нелинейных систем / Под редакцией В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

[4] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Частотно-параметрический анализ собственных колебаний неоднородных стержней // ПММ. 2003. Т. 67, вып. 4. С. 588–602. https://elibrary.ru/item.asp?id=17296425

[5] Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.

[6] Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.

[7] Morassi A., Dilena M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse probl. eng. 2002. V. 10, № 3. P. 183–201. DOI: 10.1080/10682760290010378

[8] Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.

[9] Ахтямов А.М., Урманчеев С.Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. XI, № 4. С. 19–24. https://elibrary.ru/item.asp?id=11673127

[10] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.

[11] Аитбаева А.А. Математическое моделирование и идентификация вида и параметров закрепления конца стержня по собственным частотам его колебаний: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Уфим. гос. авиац. университет, Уфа, 2018. 95 с. https://www.ugatu.su/assets/files/documents/dissov/06/2018/AitbaevaAA/Autoref_AitbaevaAA.pdf

ISSN 2658–5782 14 (2019), **3**, 214–217

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.028
DOI: 10.21662/mfs2019.3.028

Received: 12.12.2019
Accepted: 23.12.2019

Determination of the dimensions of the cylindrical weight at the end of the rod

Aitbaeva A.A.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa

This article discusses free transverse vibrations of a homogeneous rod. The left end of the rod is clamped, and a cylindrical weight is concentrated at the right end. The eigenfrequencies of the rod vibration are known. The purpose of this work is to determine the parameters of the end cylindrical weight of the rod (mass, moment of inertia, length and radius) by the natural frequencies of the rod vibrations. We use a partial differential equation derivative of the fourth order to solve this problem. This equation and boundary conditions are reduced to a spectral problem. To find the mass and moment of inertia of the weight, the «Method of an additional unknown» was applied. In the characteristic determinant of the spectral problem, there are terms that contain products of unknown coefficients. The essence of the «Method of an additional unknown» is that some of these products are proposed to be considered new additional unknowns, through which the rest can be expressed. It is shown that the mass and moment of inertia of the weight can be found using the three natural frequencies of the rod vibrations. Formulas for finding the length and radius of a cylindrical weight are obtained, and corresponding examples of finding unknown parameters are considered.

Keywords: eigenvalues, natural frequencies, cylindrical weight, rod

References

[1] Strutt J.W. Teoriya zvuka. V. 1. M.: Gostekhizdat, 1955. P. 504 (in Russian).

[2] Kolatts L. Zadachi na sobstvennyye znacheniya (s tekhnicheskimi prilozheniyami). M.: Nauka, 1968. P. 504 (in Russian).

[3] Vibratsii v tekhnike: spravochnik v 6 tomakh. T. 1. Kolebaniya nelineynykh sistem / Pod redaktsiyey V.V. Bolotina. M.: Mashinostroyeniye, 1978. P. 352 (in Russian).

[4] Akulenko L.D., Nesterov S.V. A frequency-parametric analysis of natural oscillations of non-uniform rods // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2003. V. 67, No. 3. Pp. 525–537. https://elibrary.ru/item.asp?id=28927800

[5] Gladvell G.M.L. Obratnyye zadachi teorii kolebaniy. M.-Izhevsk: NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2008. P. 608 (in Russian).

[6] Yurko V.A. Vvedeniye v teoriyu obratnykh spektral'nykh zadach. M.: Fizmatlit, 2007. P. 384 (in Russian).

[7] Morassi A., Dilena M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse probl. eng. 2002. V. 10, No. 3. P. 183–201. DOI: 10.1080/10682760290010378

[8] Akhtyamov A.M. Teoriya identifikatsii krayevykh usloviy i yeye prilozheniya. M.: Fizmatlit, 2009. P. 272 (in Russian).

[9] Akhtyamov A.M., Urmancheev C.F. Determination of the parameters of a rigid body clamped at an end of a beam from the natural frequencies of vibrations // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2010. V. 4. DOI: 10.1134/S1990478910010011

[10] Vatul'yan A.O. Obratnyye zadachi v mekhanike deformiruyemogo tela. M.: Fizmatlit, 2007. P. 224 (in Russian).

[11] Aitbayeva A.A. Matematicheskoye modelirovaniye i identifikatsiya vida i parametrov zakrepleniya kontsa sterzhnya po sobstvennym chastotam yego kolebaniy: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk: 05.13.18. Ufim. gos. aviats. universitet, Ufa, 2018. P. 95 (in Russian). https://www.ugatu.su/assets/files/documents/dissov/06/2018/AitbaevaAA/Autoref_AitbaevaAA.pdf

го пластического деформирования. Создана методика для прогнозирования оптимальных значений остаточных напряжений в зависимости от условий обработки и параметров инструмента. К данной серии относятся и работы по созданию численного алгоритма расчёта резьбовых соединений при наличии резьбовой вставки с учётом технологических напряжений.

С 1982 года, когда В.С. Жернаков возглавил Отраслевую научно-исследовательскую лабораторию прочности авиационных конструкций Министерства авиационной промышленности СССР, под его руководством получило развитие новое научное направление в области создания эффективных численных и экспериментальных методов механики деформируемых тел для решения задач расчёта на прочность авиационных конструкций в условиях упругопластических деформаций и ползучести, а также для изучения усталостной и длительной прочности элементов конструкций. В последние годы в связи с достижениями материаловедения получили распространение объёмные наноматериалы. Уникальные физические свойства, присущие им, требовали и новых методов расчёта. В частности, на основе разработанной математической модели были установлены закономерности распределения остаточных напряжений в элементах конструкций с концентраторами из наноматериалов. Была решена задача о формировании остаточных напряжений на примере пластин с наноструктурным слоем вокруг отверстия и последующей их разгрузке.

Особо следует отметить, что под руководством В.С. Жернакова решён широкий класс задач о распределении нагрузок по виткам резьбы в условиях пластичности и ползучести с учетом изменения конструктивных, эксплуатационных и температурных факторов. Исследования были проведены с использованием полученного краевого интегрального уравнения и созданного программного обеспечения, соответствующего численным алгоритмам решения рассмотренных задач. Описанная вычислительная технология была применена при расчётах напряжённо-деформированного состояния замков лопаток авиационных двигателей.

В.С. Жернаков является автором свыше 400 научных публикаций. В их числе 66 авторских свидетельств СССР и патентов РФ, а также 7 монографий, 3 из которых имеют гриф Минобразования Российской Федерации.

В.С. Жернаков награжден Знаком ордена св. Александра Невского — медалью «За труды и Отечество» III степени, медалью «Ветеран труда», медалями Федерации космонавтики РФ им. академика В.П. Глушко, академика В.П. Макеева, дипломом им. летчика–космонавта СССР Ю.А. Гагарина, четырьмя серебряными и одной бронзовой медалями ВДНХ СССР, Орденом «За заслуги перед Республикой Башкортостан».

Коллектив журнала «Многофазные системы» от всей души поздравляет с юбилейной датой Владимира Сергеевича Жернакова, внёсшего свой неоценимый вклад в создание Института механики и желает ему прекрасного самочувствия, творческого вдохновения и активности, новых замечательных успехов на благо нашего Отечества!

Основные публикации

[1] Zhernakov V.S., Latysh V.V., Stolyarov V.V., Zharikov A.I., Valiev R.Z. The developing of nanostructured spd ti for structural use // Scripta Materialia. 2001. Vol. 44, No. 8–9. P. 1771–1774.
DOI: 10.1016/S1359-6462(01)00737-0

[2] Zhernakov V.S., Budilov I.N., Raab G.I., Alexandrov I.V., Valiev R.Z. A numerical modelling and investigations of flow stress and grain refinement during equal-channel angular pressing // Scripta Materialia. 2001. Vol. 44, No. 8–9. P. 1771–1774.
DOI: 10.1016/S1359-6462(01)00796-5

[3] Шолом В.Ю., Жернаков В.С., Абрамов А.Н. Методология исследований триботехнических характеристик и выбора смазочных материалов для процессов холодной обработки металлов давлением // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2016. № 4. С. 10–15.
https://elibrary.ru/item.asp?id=25963530

Содержание

Механика жидкости и газа

Механика твердого тела

Робототехника и теория управления

Краткие сообщения

Портрет ученого