



ISSN: 2658-5782

Номер 2

Апрель-Июнь 2019

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](http://mfs.uimech.org)





## Динамика ударных волн и эволюция вихреобразования при взаимодействии сферического воздушного импульса со слоем водной пены<sup>1</sup>

Гайнуллина Э.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе проведено численное исследование процесса взаимодействия мощного воздушного сферического ударно-волнового импульса с защитным барьером из водной пены с начальным объемным содержанием воды 0.2. Толщина пенного слоя выбрана для выполнения условия неотражения волны сжатия от внешней границы пены в рассматриваемые временные интервалы. При изучении динамики волновых течений использовано предположение о разрушении пенной структуры на взвесь микрокапель за фронтом сильной ударной волны. Двухфазная среда описана на основе модели газочапельной смеси, которая включает в себя законы сохранения массы, импульса и энергии каждой фазы в соответствии с однодавленческим, двухскоростным, двухтемпературным приближениями в двумерной осесимметричной постановке. При учете сил межфазного сопротивления использована модель Шиллера–Наумана. Влияние контактного теплообмена на границе между фазами учтено моделью Ранца–Маршалла. Для описания свойств воздуха и воды использованы уравнения состояния Пенга–Робинсона и совершенной жидкости. Численная реализация модели проведена с применением открытого программного комплекса OpenFOAM на основе двухшагового вычислительного алгоритма PIMPLE. Результаты численного исследования задачи представлены в виде пространственных распределений полей давления, скоростей и линий тока. Установлено значительное ослабление интенсивности сферической ударной волны при ее взаимодействии со слоем водной пены. Исследованы причины и динамика образования серии тороидальных вихрей в газовой области за фронтом ударной волны. Подтверждена достоверность полученных результатов сравнением с решениями аналогичной задачи, найденными другим численным методом.

**Ключевые слова:** сферическая ударная волна, ударный импульс, барьер из водной пены, пакет OpenFOAM, численное моделирование, вихревые течения

### 1. Введение

Изучение динамики ударных волн (УВ) в процессе их взаимодействия с водными пенами представляет большую научную и практическую значимость: высокая сжимаемость пенных структур позволяет существенно снизить амплитуду и скорость распространения ударного импульса, что делает возможным применение защитных пенных преград для локализации последствий взрывов вы-

сокой интенсивности. В связи с этим приобретают актуальность исследования по изучению демпфирующих свойств водных пен при динамическом воздействии на основе математического и численного моделирования.

Факторы, влияющие на степень ослабления УВ в водных пенах, проанализированы в теоретических и экспериментальных работах [1–3]. В [4, 5] рассмотрены особенности динамики одномерных плоских УВ в пузырьковых средах и пенных структурах. Демпфирующие свойства водной пены исследовались в работах [6–14]. В [6–8] моделировался сферический взрыв в газе и водной пене в условиях, соответствующих экспериментальным данным [9]. Полученные численные решения имеют удовлетворительное согласование с эксперимен-

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 17–41–020582–р\_а), гранта Республики Башкортостан молодым ученым № 8 ГР и средств государственного бюджета по госзаданию 0246–2019–0052.

том. В [10–13] исследовалась динамика УВ при взаимодействии воздушного сферического импульса давления с барьером из водной пены в двумерном осесимметричном приближении с использованием метода подвижных лагранжевых сеток [10, 11] и пакета OpenFOAM [12–14]. Оценена достоверность полученных решений и выявлены условия возникновения тороидальных вихрей в исследуемой области.

Настоящая работа выполнена с использованием программного комплекса OpenFOAM [15] и является продолжением исследований [11–14]. В отличие от [14], в данной работе свойства газовой фазы описаны уравнением состояния Пенга–Робинсона, учитывающим межмолекулярные взаимодействия в реальном газе, и изучена динамика образования вихревых зон для более длительных временных интервалов.

## 2. Уравнения модели

Предполагается, что за фронтом сильной УВ пена разрушается на монодисперсные микрокапли диаметра  $d_0 = 30$  мкм [16], что позволяет использовать при ее описании модель газожидкостной смеси. Система модельных уравнений двухфазной среды для исследуемой задачи включает законы сохранения массы, импульса и энергии каждой фазы в соответствии с однодавленческим, двухскоростным и двухтемпературным приближениями [17]:

- уравнения неразрывности и импульса фаз:

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i \vec{v}_i) = \\ = -\alpha_i \nabla p + \operatorname{div}(\alpha_i \vec{\tau}_i) + \vec{F}_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее  $\alpha_i$  — объемное содержание;  $\rho_i$  — плотность;  $\vec{v}_i$  — вектор скорости;  $t$  — время;  $p$  — давление;  $i, j = 1, 2$  — обозначения жидкой и газовой фаз;  $\vec{\tau}_i$  — тензор вязких напряжений:

$$\vec{\tau}_i = \mu_i (\nabla \vec{v}_i + \nabla \vec{v}_i^T) - \frac{2}{3} (\mu_i \operatorname{div} \vec{v}_i) I,$$

где  $\mu_i$  — динамическая вязкость;  $I$  — единичный тензор.

Слагаемое  $\vec{F}_i$  определяет плотность межфазных сил в виде суммы сил межфазного сопротивления  $\vec{F}_{i,drag}$  и присоединенных масс  $\vec{F}_{i,vm}$  [17]:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,drag} + \vec{F}_{i,vm},$$

где

$$\vec{F}_{i,drag} = \frac{3}{4} \alpha_2 C_D \frac{\rho_1}{d_0} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) |\vec{v}_i - \vec{v}_j|,$$

$$\vec{F}_{i,vm} = 0.5 \alpha_2 \rho_1 \left( \frac{d_j \vec{v}_j}{dt} - \frac{d_i \vec{v}_i}{dt} \right).$$

Коэффициент  $C_D$  для числа Рейнольдса  $Re = \frac{\rho_1 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| d_0}{\mu_1}$  согласно модели сопротивления Шиллера–Наумана [18] записывается в виде:

$$C_D = \begin{cases} \frac{24(1 + 0.15 Re^{0.687})}{Re}, & Re \leq 1000, \\ 0.44, & Re > 1000; \end{cases}$$

- уравнения энергии фаз

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i (e_i + K_i))}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i (e_i + K_i) \vec{v}_i) = \\ = -p \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_i \vec{v}_i p) + \\ + \operatorname{div}(\alpha_i \gamma_{i,eff} (\nabla h_i)) + K_{ht} (T_j - T_i), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $e_i$  — внутренняя энергия;  $K_i$  — кинетическая энергия;  $h_i$  — энтальпия;  $T_i$  — температура;  $\gamma_{i,eff}$  — эффективная теплопроводность:

$$\gamma_{i,eff} = \frac{c_{p,i}}{c_{V,i}} \gamma_i,$$

в которой  $c_{p,i}$ ,  $c_{V,i}$  — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме;  $\gamma_i$  — теплопроводность.

Для определения коэффициента теплообмена  $K_{ht}$  используется модель Ранца–Маршалла [19]:

$$K_{ht} = \frac{\kappa_1 Nu}{d_0}, \quad Nu = 2 + 0.6 Re^{1/2} Pr^{1/3},$$

где  $\kappa_1$  — теплопроводность воды;  $Nu$ ,  $Pr$  — числа Нуссельта и Прандтля соответственно.

Для уравнения состояния воздуха принята форма Пенга–Робинсона [20]:

$$p = \frac{RT_2}{V_m - b} - \frac{a(T_2)}{V_m(V_m + b) + b(V_m - b)}, \quad (4)$$

в которой

$$\begin{aligned} a = 0.45724 \frac{R^2 T_c^2}{p_c} \lambda(T_r, \omega), \quad b = 0.07780 \frac{RT_c}{p_c}, \\ \lambda = (1 + \theta(1 - T_r^{0.5}))^2, \quad T_r = \frac{T_2}{T_c}, \\ \theta = 0.37464 + 1.54226\omega - 0.26992\omega^2, \end{aligned}$$

где  $T_c$ ,  $p_c$  — критические значения температуры и давления для воздуха;  $V_m$  — молярный объем;  $R$  —

универсальная газовая постоянная;  $\omega$  — ацентрический фактор.

Свойства воды описываются уравнением состояния совершенной жидкости:

$$\rho_1 = p\psi_1 + \rho_{10}, \quad (5)$$

где  $\rho_{10}$ ,  $\psi_1 = m_1/(RT_1)$  — плотность при нормальных условиях и сжимаемость воды соответственно;  $m_1$  — молярная масса воды.

### 3. Постановка задачи и анализ результатов

Рассматриваемая цилиндрическая область радиуса  $y = 3.4$  м и длины  $x = 1.4$  м с условиями симметрии на оси  $Ox$  и плоскости  $x = 0$  заполнена газом ( $0 \leq y \leq 3.4$  м,  $0 \leq x < 1$  м) и содержит слой водной пены толщиной  $0.4$  м ( $0 \leq y \leq 3.4$  м,  $1 \leq x \leq 1.4$  м) с начальным объемным водосодержанием  $\alpha_{10} = 0.2$ . Толщина пенного слоя выбрана для выполнения условия неотражения волны сжатия от внешней границы пены  $x = 1.4$  м в рассматриваемые временные интервалы. Начальный импульс давления, как и в [11–14], имеет вид:

$$p(x, y) = p_0 + \Delta p e^{-(x^2+y^2)/a^2}, \quad (6)$$

где  $\Delta p = 100$  МПа,  $p_0 = 0.1$  МПа,  $a = 0.15$  м.

Граница области, образованной сферой радиуса  $0.1$  м с центром в точке симметрии  $(0, 0, 0)$ , соответствует граничному условию жесткой стенки с целью изоляции центра взрыва для минимизации неустойчивости в численных расчетах.

Численное решение уравнений (1)–(5) проведено с использованием пакета OpenFOAM на основе алгоритма PIMPLE [15]. На первом этапе расчетов производится выбор временного шага в зависимости от числа Куранта. Затем следует второй этап — предиктор, в котором решаются уравнения неразрывности (1), импульса (2) и энергии (3). На этапе корректора уточняются величины давления и компонент скоростей. Циклы предиктора и корректора выполняются до тех пор, пока не достигнута заранее заданная точность решения.

Для тестирования предложенной модели газокапельной смеси, полученной с использованием пакета OpenFOAM, были проведены расчеты воздействия сферического ударного импульса на водную пену для условий экспериментов [9]. В этом исследовании производился сферический взрыв заряда взрывчатого вещества в сухой водной пене с начальным объемным водосодержанием  $\alpha_{10} = 0.0083$ . В [14] дан сравнительный анализ расчетов по используемой в настоящей работе модели с экспериментальными данными [9], результатами

экспериментов по взрывам в пене [21], обобщенными в аналитической форме, показано их удовлетворительное согласование.

Численное решение задачи о взаимодействии воздушного ударного импульса с барьером из водной пены представлено на рис. 1 и 2 в виде полей давления, скоростей и линий тока в указанные моменты времени. Слой водной пены обозначен зеленым цветом. Максимальная амплитуда импульса давления (6), изначально равная  $100$  МПа, в силу сферичности УВ снижается с течением времени и при подходе к границе пенного слоя (при  $t = 0.5$  мс) составляет  $\approx 1$  МПа. Число Маха  $M$ , характеризующее распределение скоростей на начальной стадии распространения ударного импульса ( $t = 0.1$  мс), оценивается величиной  $M = 3.5$ , которая уменьшается до  $M = 1.5$  при воздействии УВ на пенный слой ( $t = 0.5$  мс). В процессе взаимодействия воздушной УВ с водной пеной происходит сжатие пены до  $\alpha_1 = 0.3$  ( $t = 3$  мс), что приводит к значительному снижению скорости распространения УВ. За счет диссипативных процессов у границы пенного слоя происходит падение амплитуды импульса давления к моменту времени  $t = 5$  мс до  $0.16$  МПа (рис. 1).

Основной причиной формирования вихревых структур за фронтом УВ является искривление линий тока за счет развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова [22, 23], возникающей в результате изгиба границы газ–пена при ее взаимодействии со сферической УВ.

Вблизи оси симметрии  $Ox$ , начиная с  $t = 1.2$  мс формируется область низких давлений, которая расширяется с течением времени. Искривление линий тока в этой зоне приводит к возникновению вихревых зон за фронтом УВ, которые, учитывая осесимметричность задачи, имеют тороидальную форму. Визуализация расчетов вихревых структур представлена на рис. 2. На фрагменте, соответствующем времени  $t = 2.5$  мс, показан сформированный вихрь 1, момент возникновения которого фиксируется при  $t = 2.1$  мс. Вихрь вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_1 \approx 1400$  рад/с и расположен вблизи оси симметрии  $Ox$ , что согласуется с расчетами, выполненными методом подвижных лагранжевых сеток [11]. Здесь же показан сформированный в момент времени  $t = 2.5$  мс тороидальный вихрь 2, имеющий угловую скорость  $\omega_2 \approx 600$  рад/с, направленную противоположно вихрю 1. К моменту времени  $t = 3$  мс вихрь 2 расширяется и вблизи пенного слоя рождается новый вихрь 3, вращающийся против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_3 \approx 250$  рад/с.

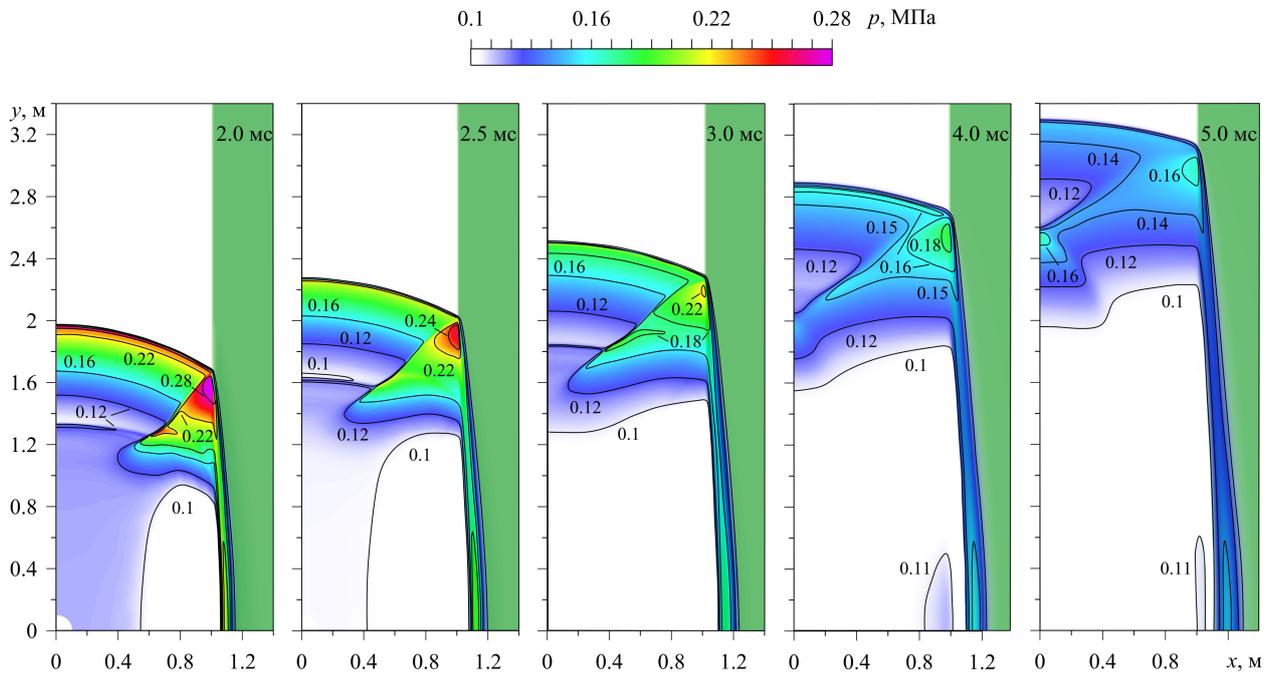


Рис. 1. Распределение полей давления при взаимодействии сферической ударной волны в газе с пенным барьером в моменты времени  $t = 2, 2.5, 3, 4$  и  $5$  мс соответственно. Слой водной пены обозначен зеленым цветом

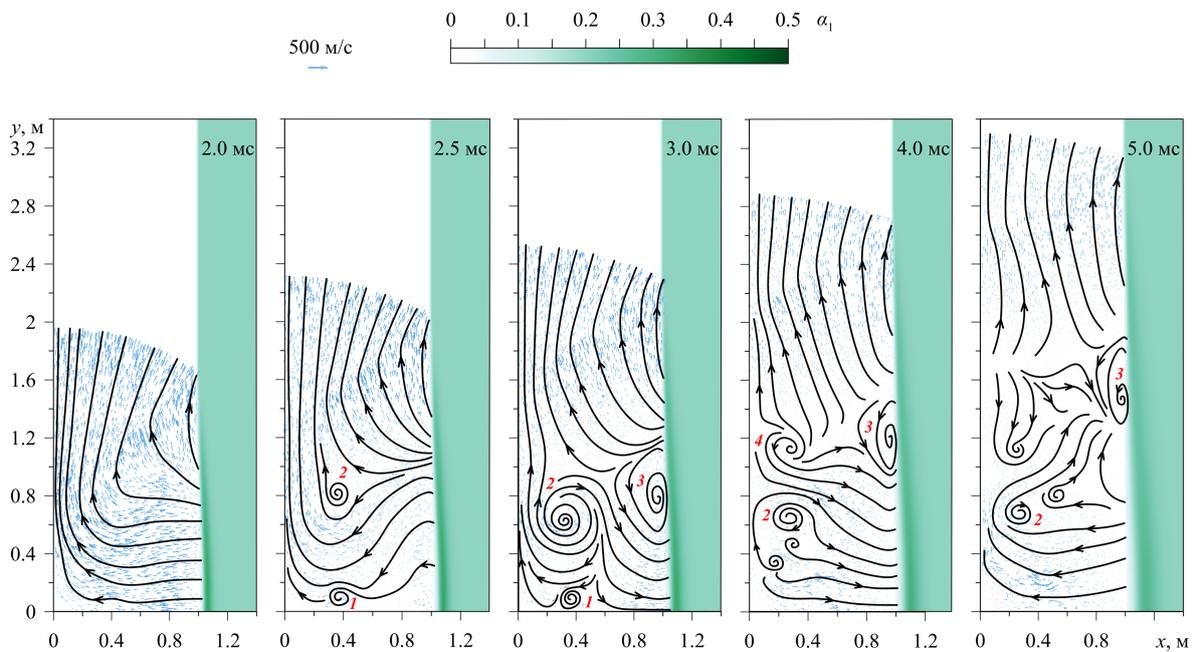


Рис. 2. Динамика полей скоростей, линий тока и эволюция основных вихревых зон (1–4) при взаимодействии сферической ударной волны в газе с пенным барьером в моменты времени  $t = 2, 2.5, 3, 4$  и  $5$  мс соответственно. Объемное водосодержание в пене показано спектром зеленого цвета

Дальнейшее развитие процесса приводит к турбулизации потока за фронтом УВ, что сопровождается возникновением серии небольших вихрей. К моменту времени  $t = 4$  мс вихрь 1 вырождается, а 2 и 3 — ослабевают. При  $t = 4$  мс формируется новый вихрь 4, вращающийся против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_4 \approx 400$  рад/с, который исчезает через 0.5 мс. На стадии завершения исследуемого процесса ( $t = 5$  мс) область интенсивного вихревого течения смещается вверх в направлении движения фронта УВ (сравним моменты времени  $t = 4$  мс и  $t = 5$  мс). При этом вихри 2 и 3 сохраняют устойчивую структуру.

Начиная с  $t = 4$  мс, вблизи оси симметрии  $Ox$ , наблюдаются слабые волны давления, меняющие свое направление в процессе переотражения от пенного слоя и плоскости симметрии  $x = 0$  (сравним фрагменты рис. 2 при  $t = 4$  и 5 мс). Значения скоростей и давлений в этой зоне не превышают по амплитуде 100 м/с и 0.11 МПа соответственно, вихреобразование здесь не происходит.

#### 4. Заключение

Проведено численное моделирование процесса взаимодействия воздушного сферического ударного импульса с барьером из водной пены, являющееся продолжением исследований, выполненных в [11–14]. В работе использована модель газожидкостной смеси, учитывающая силы межфазного взаимодействия и теплообменные процессы на контактной межфазной поверхности. Для описания свойств воздуха и воды применяются уравнения состояния Пенга–Робинсона и совершенной жидкости. Численное решение поставленной задачи проведено в двумерном осесимметричном приближении с применением пакета OpenFOAM. Подтверждена достоверность полученных решений сравнением с решениями аналогичной задачи другими численными методами [11] и экспериментальными данными [9]. Анализ результатов численных исследований показал, что увеличение объемного водосодержания в пенном слое при его уплотнении под воздействием ударного импульса приводит к снижению скорости фронта УВ и блокирует ее прохождение вглубь пены. Проведен детальный анализ причин возникновения, развития серии тороидальных вихрей и турбулизации потока в газовой области за фронтом УВ.

Автор работы выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.–м.н. Раисе Хакимовне Болотновой за ценные советы и помощь в постановке и решении задачи.

#### Список литературы

- [1] Britan A., Shapiro H., Liverts M., Chinnayya A., Hadjadj A., Ben-Dor G. Macro-mechanical modelling of blast wave mitigation in foams. Part I: review of available experiments and models // Shock Waves. 2013. Vol. 23, No. 1. P. 5–23. DOI: 10.1007/s00193-012-0417-48
- [2] Британ А.Б., Васильев Е.И., Куликовский В.А. Моделирование процесса ослабления ударной волны экраном из пены // ФГВ. 1994. № 3. С. 135–142. <https://www.sibran.ru/upload/iblock/fb5/fb5e3e5ec365fbcaa2604b935524bf8c.pdf>
- [3] Васильев Е.И., Митичкин С.Ю., Тестов В.Г., Хайбо Ху. Динамика давления при ударном нагружении газожидкостных пен // ЖТФ. 1998. Т. 68, № 7. С. 19–23. [http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/ioffe/ztf/1998/07/ztf\\_t68v07\\_04.pdf](http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/ioffe/ztf/1998/07/ztf_t68v07_04.pdf)
- [4] Болотнова Р.Х., Галимзянов М.Н., Агишева У.О. Моделирование процессов взаимодействия сильных ударных волн в газожидкостных смесях // Известия ВУЗов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2011. № 2. С. 3–14. [https://izvuz\\_fm.pnzgu.ru/files/izvuz\\_fm.pnzgu.ru/1211.pdf](https://izvuz_fm.pnzgu.ru/files/izvuz_fm.pnzgu.ru/1211.pdf)
- [5] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Topolnikov A.S., Buzina V.A., Agisheva U.O. Nonlinear Effects In Bubbly Liquid With Shock Waves // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2012. Vol. 6, No. 8. P. 1095–1102. <https://waset.org/publications/14192/nonlinear-effects-in-bubbly-liquid-with-shock-waves>
- [6] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Численное моделирование сферического взрыва в пене // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 60–65. DOI: 10.21662/uim2016.1.009
- [7] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Исследование демпфирующих свойств водной пены под воздействием сферической ударной волны // Известия ВУЗов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2. С. 108–121. DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-9
- [8] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Влияние теплообменных процессов на снижение интенсивности сферического взрыва в водной пене // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 468–477. DOI: 10.1134/S0032823519030020
- [9] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // Shock Waves. 2013. Vol. 23, No. 1 P. 39–53. DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0
- [10] Болотнова Р.Х., Агишева У.О. Пространственное моделирование динамики газожидкостной пены на подвижных лагранжевых сетках в условиях ударно-волнового воздействия // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2014. № 3. С. 427–440. [http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom\\_2014/pdf/v15r138.pdf](http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2014/pdf/v15r138.pdf)
- [11] Агишева У.О., Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Коробчинская В.А. Особенности вихреобразования при воздействии импульса давления на газовую область, ограниченную пенным слоем // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 47–55. DOI: 10.1134/S0015462816060053
- [12] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Исследование осесимметричных волновых течений при взаимодействии сферического ударного импульса с барьером из водной пены // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 238–243. DOI: 10.21662/uim2017.2.036

- [13] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Особенности воздействия сферического импульса давления на границу газа с водной пеной // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 3. С. 364–372.  
DOI: [10.20537/vm180307](https://doi.org/10.20537/vm180307)
- [14] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Wave dynamics and vortex formation under the impact of a spherical impulse on the boundary between gas and aqueous foam // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1268. 012015.  
DOI: [10.1088/1742-6596/1268/1/012015](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1268/1/012015)
- [15] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox.  
<http://www.openfoam.com>
- [16] Ждан С.А. Численное моделирование взрыва заряда ВВ в пене // ФГВ. 1990. Т. 26, № 2. С. 103–110.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=30555610>
- [17] Zeno Tacconi. Feasibility analysis of a two-fluid solver for cavitation and interface capturing as implemented in OpenFOAM // Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Energetica, Politecnico di Milano. 2018. 134 p.  
<https://www.politesi.polimi.it/handle/10589/139684>
- [18] Schiller L., Naumann Z. A Drag Coefficient Correlation // Z. Ver. Deutsch. Ing. 1935. Vol. 77. P. 40–65.
- [19] Ranz W.E., Marshall W.R. Evaporation from Drops // Chem. Eng. Prog. 1952. Vol. 48, No. 22. P. 141–146.  
<http://dns2.asia.edu.tw/~ysho/YSHO-English/1000%20CE/PDF/Che%20Eng%20Pro48,%20141.pdf>
- [20] Peng D.Y., Robinson D.B. A new two-constant equation of state // Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals. 1976. Vol. 15. P. 59–64.  
DOI: [10.1021/i160057a011](https://doi.org/10.1021/i160057a011)
- [21] Hartman W., Boughton B., Larsen M. Blast mitigation capabilities of aqueous foam // Technical Report. SAND2006-0533. Sandia: Sandia National Laboratories. 2006. 98 p.  
<https://prod-ng.sandia.gov/techlib-noauth/access-control.cgi/2006/060533.pdf>
- [22] Meshkov E.E. Instability of the interface of two gases accelerated by a shock wave // Fluid Dynamics. 1969. Vol. 4, No. 5. P. 101–104.  
DOI: [10.1007/BF01015969](https://doi.org/10.1007/BF01015969)
- [23] Richtmyer R.D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // Commun. Pure Appl. Math. 1960. Vol. 13. P. 297–319.  
DOI: [10.1002/cpa.3160130207](https://doi.org/10.1002/cpa.3160130207)



## Shock waves dynamics and evolution of vortex formation during the interaction of spherical air pulse with aqueous foam layer

Gainullina E.F.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

The numerical study of the powerful air spherical shock-wave pulse interaction with the protective aqueous foam barrier with the initial liquid volume fraction of 0.2 is carried out in this paper. The foam layer thickness is selected to satisfy the condition of the non-reflection of compression wave from the foam external boundary at the considered time intervals. In studying the wave flows dynamics, we used the assumption of the foam structure destruction into the microdrops suspension behind the strong shock wave front. The two-phase medium is described on the basis of the gas-droplet mixture model, which includes the laws of conservation of mass, momentum and energy for each phase in accordance with the single-pressure, two-speed, two-temperature approximations in a two-dimensional axisymmetric formulation. The Schiller–Naumann model is used for taking into account the interfacial drag forces. The contact heat transfer influence at the interface between the phases is taken into account by the Ranz–Marshall model. To describe the properties of air and water, the Peng–Robinson and perfect fluid equations of state are used. The numerical implementation of the model is carried out using the OpenFOAM open-source software with the two-step PIMPLE algorithm. The numerical study results are presented as spatial distributions of pressure fields, velocities and streamlines. The significant attenuation of the spherical shock wave intensity during its interaction with the aqueous foam layer has been established. The causes and dynamics of the toroidal vortices series formation in the gas region behind the shock front are investigated. The results reliability is confirmed by comparison with the solutions of the similar problem, found by another numerical method.

**Keywords:** spherical shock wave, shock impulse, aqueous foam barrier, OpenFOAM package, numerical modeling, vortex flows

### References

- [1] Britan A., Shapiro H., Liverts M., Chinnayya A., Hadjadj A., Ben-Dor G. Macro-mechanical modelling of blast wave mitigation in foams. Part I: review of available experiments and models // *Shock Waves*. 2013. V. 23, No. 1. Pp. 5–23. DOI: 10.1007/s00193-012-0417-48
- [2] Britan A.B., Vasil'ev E.I., Kulikovskii V.A. Modeling the process of shock-wave attenuation by a foam screen // *Combust. Explos. Shock Waves*. 1994. V. 30, Issue 3. Pp. 389–396. DOI: 10.1007/BF00789435
- [3] Vasil'ev E.I., Mitichkin S.Yu., Testov V.G., Hu Haibo. Numerical simulation and experimental research on the effect of synergism on the propagation of shock waves in a gas-liquid foam // *Technical Physics*. 1997. V. 42, No. 11. Pp. 1241–1248. DOI: 10.1134/1.1258855
- [4] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Agisheva U.O. [Simulation of a strong shock wave interaction process in gas liquid mixtures] [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011. No. 2. Pp. 3–14 (in Russian). [https://izvuz\\_fm.npznzgu.ru/files/izvuz\\_fm.npznzgu.ru/1211.pdf](https://izvuz_fm.npznzgu.ru/files/izvuz_fm.npznzgu.ru/1211.pdf)
- [5] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Topolnikov A.S., Buzina V.A., Agisheva U.O. Nonlinear Effects In Bubbly Liquid With Shock Waves // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2012. V. 6, No. 8. Pp. 1095–1102. <https://waset.org/publications/14192/nonlinear-effects-in-bubbly-liquid-with-shock-waves>
- [6] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. [The numerical modeling of spherical explosion in the foam] [Proceedings of the Mavlutov Institute of Mechanics]. 2016. V. 11, No. 1. Pp. 60–65 (in Russian). DOI: 10.21662/uim2016.1.009
- [7] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. [A research of damping properties of aqueous foam under the impact of spherical shock waves] [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017. No. 2. Pp. 108–121 (in Russian). DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-9

- [8] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Influence of Heat-exchange Processes on Decreasing an Intensity of a Spherical Explosion in Aqueous Foam // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54, Suppl. 7. Pp. S71–S78.  
DOI: [10.1134/S0015462819070024](https://doi.org/10.1134/S0015462819070024)
- [9] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // *Shock Waves*. 2013. V. 23, No. 1. Pp. 39–53.  
DOI: [10.1007/s00193-012-0400-0](https://doi.org/10.1007/s00193-012-0400-0)
- [10] Bolotnova R.Kh., Agisheva U.O. [Spatial modeling of water foam dynamics with moving Lagrangian grids under shock wave impact] [Numerical methods and Programming]. 2014. No. 3. Pp. 427–440 (in Russian).  
[http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom\\_2014/pdf/v15r138.pdf](http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2014/pdf/v15r138.pdf)
- [11] Agisheva U.O., Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F., Korobchinskaya V.A. Features of Vortex Formation under the Impact of a Pressure Pulse on a Gas Region Bounded by the Foam Layer // *Fluid Dynamics*. 2016. V. 51, No. 6. P. 757–766.  
DOI: [10.1134/S0015462816060053](https://doi.org/10.1134/S0015462816060053)
- [12] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. [Investigation of axisymmetric wave flows under interaction of a spherical impact pulse with a barrier of aqueous foam] [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics]. 2017. V. 12, No. 2. Pp. 238–243 (in Russian).  
DOI: [10.21662/uim2017.2.036](https://doi.org/10.21662/uim2017.2.036)
- [13] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Features of the impact of spherical shock impulse on the boundary of gas with aqueous foam [The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science]. 2018. V. 28, No. 3. Pp. 364–372 (in Russian).  
DOI: [10.20537/vm180307](https://doi.org/10.20537/vm180307)
- [14] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Wave dynamics and vortex formation under the impact of a spherical impulse on the boundary between gas and aqueous foam // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. Vol. 1268. 012015.  
DOI: [10.1088/1742-6596/1268/1/012015](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1268/1/012015)
- [15] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox.  
<http://www.openfoam.com>
- [16] Zhdan S.A. Numerical modeling of the explosion of a high explosive (HE) charge in foam // *Combust., Explos., Shock Waves*. 1990. V. 26, No. 2. Pp. 221–227.  
DOI: [10.1007/BF00742416](https://doi.org/10.1007/BF00742416)
- [17] Zeno Tacconi. Feasibility analysis of a two-fluid solver for cavitation and interface capturing as implemented in OpenFOAM // Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Energetica, Politecnico di Milano. 2018. 134 p.  
<https://www.politesi.polimi.it/handle/10589/139684>
- [18] Schiller L., Naumann Z. A Drag Coefficient Correlation // *Z. Ver. Deutsch. Ing.* 1935. V. 77. Pp. 40–65.
- [19] Ranz W.E., Marshall W.R. Evaporation from Drops // *Chem. Eng. Prog.* 1952. V. 48, No. 22. Pp. 141–146.  
<http://dns2.asia.edu.tw/~ysho/YSH0-English/1000%20CE/PDF/Che%20Eng%20Pro48,%20141.pdf>
- [20] Peng D.Y., Robinson D.B. A new two-constant equation of state // *Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals*. 1976. V. 15. Pp. 59–64.  
DOI: [10.1021/i160057a011](https://doi.org/10.1021/i160057a011)
- [21] Hartman W., Boughton B., Larsen M. Blast mitigation capabilities of aqueous foam // Technical Report. SAND2006-0533. Sandia: Sandia National Laboratories. 2006. 98 p.  
<https://prod-ng.sandia.gov/techlib-noauth/access-control.cgi/2006/060533.pdf>
- [22] Meshkov E.E. Instability of the interface of two gases accelerated by a shock wave // *Fluid Dynamics*. 1969. V. 4, No. 5. Pp. 101–104.  
DOI: [10.1007/BF01015969](https://doi.org/10.1007/BF01015969)
- [23] Richtmyer R.D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // *Commun. Pure Appl. Math.* 1960. V. 13. Pp. 297–319.  
DOI: [10.1002/cpa.3160130207](https://doi.org/10.1002/cpa.3160130207)



## Нестационарные характеристики процесса истечения газа в жидкость<sup>1</sup>

Алексеев М.В.\* , Вожаков И.С.\*\*,\* , Лежнин С.И.\*\*,\*

\*Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск

\*\*Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Проведено численное моделирование процесса истечения газа, находящегося под давлением, в частично заполненную жидкостью закрытую емкость. Для сравнительного теоретического анализа использована асимптотическая модель с допущениями об адиабатичности процесса истечения газа и идеальности жидкости при осцилляторном одномерном движении жидкого столба. При этом движение столба жидкости и эволюция давления в газе определяются уравнением динамики и балансом энтальпии. Численное моделирование проведено в пакете OpenFOAM с использованием метода объемов жидкости (VOF-метод) и стандартной  $k - \epsilon$  модели турбулентности. Получена эволюция полей объемного газосодержания, скорости, давления при истечении газа из камеры высокого давления в замкнутый заполненный жидкостью канал при наличии «подушки газа» на верхнем торце канала. Показано, что динамика пульсаций в газовой полости, возникающей при истечении газа в закрытую область, существенно зависит от физических свойств жидкости в объеме, особенно плотности. Численное моделирование показало, что инжекция газа в воду происходит в виде струйного истечения газа, а при истечении в жидкий свинец наблюдается формирование газового снаряда у дна канала. Получено удовлетворительное согласование численного расчета и расчета по асимптотической модели для пульсаций давлений в газовом снаряде в жидком свинце. Для воды результаты расчета по асимптотической модели дают существенное отличие от результатов численного расчета. Во всех случаях скорости движения среды, полученные с помощью численного моделирования и с использованием асимптотической модели, различаются на порядок и более.

**Ключевые слова:** истечения газа, камера высокого давления, OpenFOAM, инжекция газа в воду, инжекция газа в жидкий свинец

### 1. Введение

В настоящей работе рассматривается осесимметричная нестационарная задача истечения газа через трубку в замкнутую цилиндрическую область, заполненную жидкостью. Ранее моделирование процесса истечения двухфазного теплоносителя без фазового перехода было проведено в работе [1–3] в рамках двухскоростной модели [4], с помощью авторской модификации пакета про-

грамм LCPFCT [5], а также с использованием пакета OpenFoam [6] в односкоростном приближении двухфазной сжимаемой среды методом переноса объемной доли (VOF) [7].

В работе [8] проводилось сравнение результатов численного расчета и простой асимптотической модели, описывающей пульсации среднего давления в канале на больших «неволновых» временах. Согласно модели при больших расходах газа, поступающего в заполненный жидкостью канал, образуется газовая полость (снаряд), которая занимает все сечение канала. Сравнение показало неплохое соответствие на первых пульсациях. Целью настоящей работы является изучение поведения полевых величин (скорости, давления) на малых временах (порядка одного периода асимп-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственный контракт III.22.7.3, АААА-А18-118051690120-2).

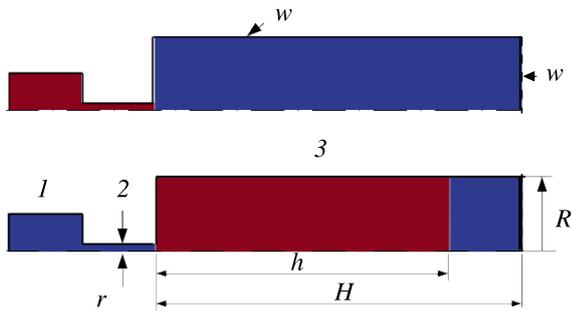


Рис. 1. Расчетная область: 1 — ресивер с воздухом под высоким давлением, 2 — инжектор, 3 — рабочий объем,  $w$  — условие типа стенки,  $h$  — уровень жидкости,  $H$  — высота рабочего объема,  $R$  — радиус рабочего канала,  $r$  — радиус инжекторной трубки

тотических пульсаций) с помощью численного моделирования с использованием пакета OpenFOAM истечения газа из камеры высокого давления (ресивера) в замкнутый заполненный жидкостью канал при наличии «подушки газа» на верхнем торце канала (рис. 1).

Так, при расчете классической газодинамической задачи истечения закритического газа [9, 10] в открытую область с газом при малом давлении формируется нестационарная структура скачков давления в ней. В нашем случае нестационарная газодинамическая структура скачков давления формируется внутри замкнутой газовой полости, возникающей при оттеснении жидкости во внешнем объеме [11].

## 2. Методика расчета

В верхней части рис. 1 показано начальное распределение давления (красный цвет — область высокого давления, синий цвет — область низкого давления), в нижней части — начальное распределение объемного содержания жидкости (красный цвет — область, заполненная жидкостью, синий — область, заполненная газом). В качестве модельных жидкостей рассматривались вода и свинец, в качестве газа — воздух. Реализация осесимметричной задачи на трехмерном решателе «compressibleInterFoam» в OpenFOAM выполнена с помощью расчетной области в виде сектора с малым углом. Методика расчета детально описана в предыдущих работах авторов, например [3, 12]. Внутренний радиус трубы  $R$  составлял 0.1 м (диаметр  $D = 0.2$  м), длина трубы  $H = 0.5$  м. Уровень жидкости равен  $h = 0.4$  м. Остальная часть канала была заполнена воздухом. Давление в канале  $20 \cdot 10^5$  Па. Воздух подавался через инжектор из ресивера с давлением  $180 \cdot 10^5$  Па. Длина инжекторной трубки составляла 0.1 м, ее радиус  $r = 0.01$  м

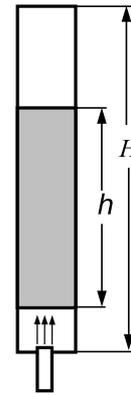


Рис. 2. Схема для асимптотической модели на больших временах

(диаметр  $d = 0.02$  м). Начальная температура воздуха и жидкого свинца [13] равнялась 650 К, начальная температура воды — 373 К.

## 3. Асимптотическая квазистационарная модель пульсаций

Как отмечалось выше, в работе [8] рассматривалась квазистационарная модель для данной задачи (рис. 2). Согласно этой модели в заполненном жидкостью канале образуется газовая полость (снаряд), которая занимает все сечение канала. В результате инжекции газа и инерции жидкого столба возникают осцилляции давления в снаряде  $p_G$  [8]. При этом у верхней закрытой части трубы имеется газовая подушка. Дополнительные допущения:

- газ ведет себя адиабатически;
- вязкостью жидкости при осцилляторном движении жидкого столба пренебрегаем.

В рамках модельных предположений движение столба жидкости и эволюция давления в снаряде  $p_G$  определяются уравнением динамики и баланса энтальпии:

$$\rho_L h \frac{d^2 l_G}{dt^2} = p_G - p_{ATM} \left( \frac{H - h}{H - h - l_G} \right)^\gamma - \rho_L g h, \quad (1)$$

$$\frac{dp_G}{dt} = -\gamma \frac{p_G}{l_G} \frac{dl_G}{dt} + \frac{\gamma}{l_G} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d^2}{D^2} j_G, \quad (2)$$

где  $p_{ATM}$  — начальное давление газа в верхней «подушке»;  $p_G$  — давление в газовой снаряде;  $l_G$  — длина газового снаряда;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\rho_L$  — плотность жидкости. Газ в верхней подушке ведет себя также адиабатически. Удельный расход газа  $j_G$  из насадка при выполнении условия записания потока считался постоянным, в противном

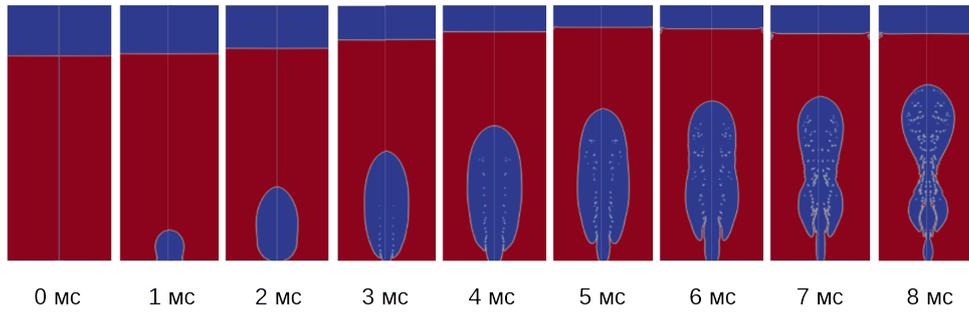


Рис. 3. Эволюция объемного газосодержания для инъекции воздуха в закрытый объем с водой (первый период колебаний)

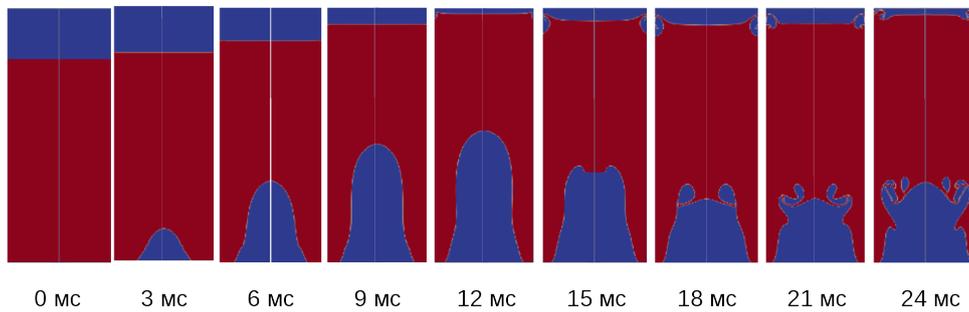


Рис. 4. Эволюция объемного газосодержания для инъекции воздуха в закрытый объем с жидким свинцом (первый период колебаний)

случае — по уравнению Бернулли для сжимаемой среды [8]. Газ идеальный (и совершенный) с показателем адиабаты  $\gamma$  (то есть, удельная энтальпия газа  $C_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$ ).

Можно ожидать, что модель будет приближенно, но качественно верно, описывать поведение давления в канале на «неволновых временах» ( $t > L/c$ , где  $L$  — характерный размер;  $c$  — характерная скорость звука) [8]. Более точно, при  $t > \max(2D/c_G, 2H/c_L)$ , где  $c_G$  — скорость звука в газе;  $c_L$  — скорость звука в жидкости. Для выбранных расчетных параметров (п. 2) это примерно соответствует временам 1 мс и более.

#### 4. Результаты расчета

Расчет показал, что характер пульсаций в газовой полости, возникающих при истечении газа в закрытую область, существенно зависит от физических свойств жидкости в объеме. Для воды (рис. 3) в начальный момент времени отмечается образование газового снаряда. Рост газового снаряда происходит в вертикальном направлении, вытесняя жидкость и сжимая газовый объем в верхней области. В момент времени 5 мс (рис. 3) сжатие газового объема прекращается и далее следует фаза

расширения. Движение жидкости формирует сжатие газового снаряда в его центральной части в радиальном направлении (8 мс). У жидкого свинца и воды кинематические вязкости близки, плотности различаются на порядок. Из-за этого динамика пульсаций газового снаряда в жидком свинце существенно отличается (рис. 4). Рост газового снаряда происходит как в радиальном, так и в вертикальном направлении. При этом рост снаряда вдоль торцевой стенки выше, из-за этого форма газового снаряда приобретает «колоколообразный» вид. Вытеснение жидкости сжатием верхнего газового объема заканчивается через 12 мс (рис. 4). Далее происходит возвратное движение жидкости и сжатие снаряда. На верхней границе образуется кумулятивная струя, которая при движении вниз разбивается от встречной струи газа внутри снаряда, а межфазная граница снаряда становится неустойчивой, приводя к отделению мелких пузырей от снаряда и возникновению струй и капель внутри снаряда.

На рис. 5 и 6 представлены эволюции давления от времени для воды и свинца соответственно. Линия 1 — расчет давления на срезе насадка, линия 2 — расчет давления на расстоянии 0.05 м от насадка, линия 3 — расчет по асимптотической модели на расстоянии 0.05 м, линия 4 — уровень критиче-

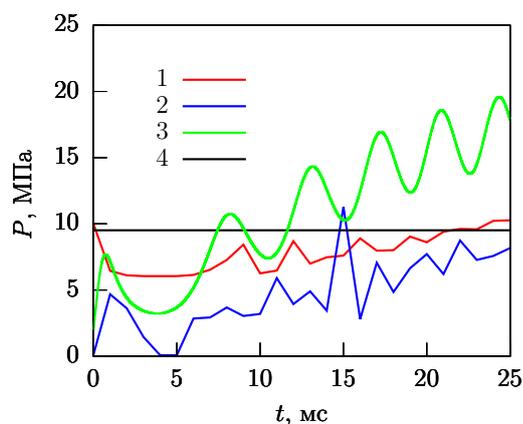


Рис. 5. Пульсации давления при инжекции в воду: 1 — на выходе из инжектора газа (отверстия насадка), 2 — на расстоянии 0.05 м, 3 — асимптотическая модель на расстоянии 0.05 м, 4 — значение критического давления

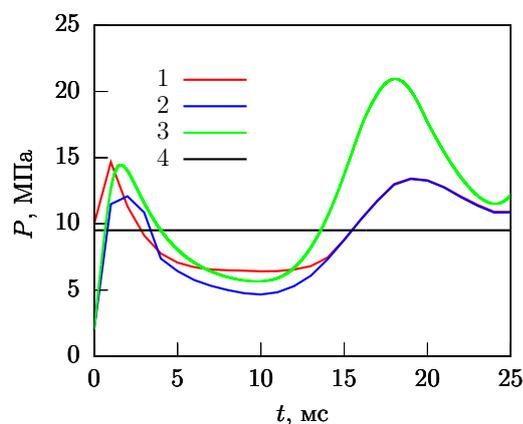


Рис. 6. Пульсации давления при инжекции в жидкий свинец: 1 — на выходе из инжектора газа (отверстия насадка), 2 — на расстоянии 0.05 м, 3 — асимптотическая модель на расстоянии 0.05 м, 4 — значение критического давления

ского давления для заданных начальных условий.

Численный расчет (рис. 5) давления при инжекции газа в воду показывает существенную пространственную неоднородность по давлению в газовой полости. Сильное различие расчетных значений давления в близких точках связано с тем, что при инжекции в воду формируется струя газа, которая проходит через столб жидкости. При этом внутри газового снаряда формируется нестационарная газодинамическая структура скачков давления [11]. При истечении газа в воду «на первой пульсации» давление около насадка всегда ниже критического давления (линия 4), что характеризует возможное запирание потока.

При численном расчете инжекции газа в свинец (рис. 6) струйного истечения газа не наблюдается. Расчет давления при первой пульсации снаряда хорошо согласуется с давлением, полученным по асимптотической модели, поскольку из-за малых скоростей в газе неоднородность по давлению снижается, а асимптотическая модель подразумевает полную однородность по давлению в газовой полости. Асимптотическая модель также более консервативна на больших временах по амплитуде давления, чем численная модель. Это связано с тем, что в полной модели учитывается дополнительная диссипация «энергии осциллятора» из-за деформации межфазной границы и реальной неоднородности движения. Консервативность асимптотической модели позволяет использовать ее для оценок амплитуд давления сверху.

На рис. 7 и 8 представлены зависимости пульсаций скорости от времени для воды и свинца соот-

ветственно. Линия 1 — численный расчет скорости на срезе насадка, линия 2 — на расстоянии 0.05 м от насадка, линия 3 — расчет по асимптотической модели на расстоянии 0.05 м.

Скорости движения среды, полученные с помощью численного моделирования и при использовании асимптотической модели, как и следовало ожидать, существенно отличаются. Скорость газа в асимптотической модели отражает усредненную скорость по сечению рабочего участка на расстоянии 0.05 м. В численном расчете приведены локальные скорости среды на срезе насадка и на расстоянии 0.05 м.

## 5. Заключение

В работе исследованы эволюции полей объемного газосодержания и поведение полевых величин (скорости, давления) на малых временах (порядка одного периода асимптотических пульсаций) при истечении газа из камеры высокого давления (ресивера) в замкнутый, заполненный жидкостью канал, при наличии «подушки газа» на верхнем торце канала. Численное моделирование проводилось с использованием пакета OpenFOAM.

Выявлено, что при инжекции газа в воду возникает струйное истечение газа, а при истечении в жидкий свинец происходит формирование газового снаряда у дна канала. В отличие от воды получено удовлетворительное согласование численного расчета и расчета по асимптотической модели для пульсаций давлений в газовом снаряде в жидком свинце.

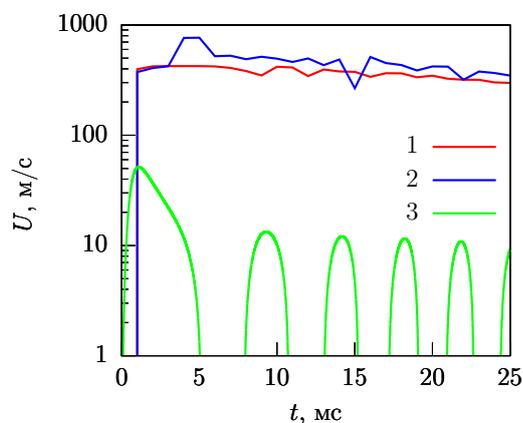


Рис. 7. Пульсации скорости при инъекции в воду: 1 — на выходе из инжектора газа (отверстия насадка), 2 — на расстоянии 0.05 м, 3 — асимптотическая модель на расстоянии 0.05 м

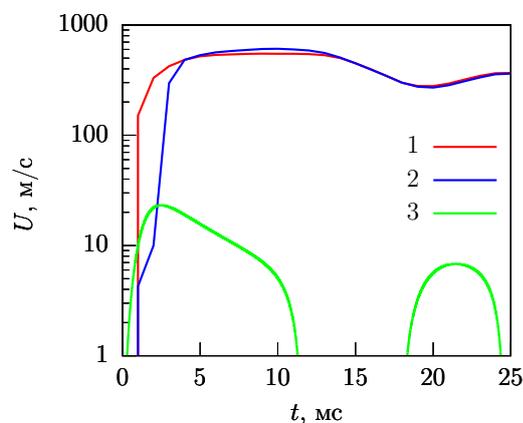


Рис. 8. Пульсации скорости при инъекции в жидкий свинец: 1 — на выходе из инжектора газа (отверстия насадка), 2 — на расстоянии 0.05 м, 3 — асимптотическая модель на расстоянии 0.05 м

## Список литературы

- [1] Вожаков И.С., Лежнин С.И., Алексеев М.В., Богомолов А.Р., Прибатурин Н.А. Моделирование истечения газа в среду с высокой плотностью // Вест. Кузбасс. госунивер. 2016. № 5. С. 86–92. <https://journals.kuzstu.ru/article/3120.pdf>
- [2] Алексеев М. В., Вожаков И. С., Лежнин С. И., Прибатурин Н.А., Влияние межфазного трения на характеристики истечения двухфазной смеси в среду с высокой плотностью // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Т. 2, № 3. С. 49–62. DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-3-49-62
- [3] Lezhnin S.I., Alekseev M.V., Vozhakov I.S., Pribaturin N.A. Simulating gas (vapor) outflow into a liquid // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1105, № 1. PP. 012081. IOP Publishing DOI: 10.1088/1742-6596/1105/1/012081
- [4] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 360 с.
- [5] Boris J.P., Landsberg A.M., Oran E.S., Garder J.H. LCPFCT - Flux-Corrected Transport Algorithm for Solving Generalized Continuity Equations. NRL/MR/6410-93-7192 <https://pdfs.semanticscholar.org/250a/7bd3e46de18e0af13d43011956f31a0880af.pdf>
- [6] The OpenFOAM Foundation. Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox. 2019. openfoam.org. <https://cfdirect.openfoam/user-guide/>
- [7] Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // Journal of Computational Physics. 1992. Vol. 100. P. 335–354. DOI: 10.1016/0021-9991(92)90240-Y
- [8] Алексеев М.В., Вожаков И.С., Лежнин С.И. Пульсации давления при инъекции газа в заполненный жидкостью закрытый объем при больших перепадах давления // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 5 С. 833–836.
- [9] Болотнова Р.Х. Исследование динамики формирования полой струи при истечении пара из сверхкритического состояния // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 73–78. DOI: 10.21662/mfs2018.4.011
- [10] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Особенности формирования полой струи водяного пара сверхкритических параметров состояния, истекающего через тонкое сопло // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 5. С. 783–789. <https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=174876>
- [11] Алексеев М.В., Вожаков И.С., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А. Трехмерное моделирование инъекции газа в открытую, заполненную жидкостью трубную область // Тезисы Докладов XXXV Сибирского теплофизического семинара, посвященного 75-летию д.т.н., профессора В.И. Терехова. Новосибирск. 2019 г. С. 104. [http://www.itp.nsc.ru/conferences/sts35/files/STS35\\_abstracts.pdf](http://www.itp.nsc.ru/conferences/sts35/files/STS35_abstracts.pdf)
- [12] Alekseev M.V., Vozhakov I.S., Lobanov P.D., Svetonosov A.I., and Mohan V.K., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A. Numerical simulation of pulsed gas-to-liquid injection modes using open source CFD software package OpenFoam // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1105. № 1. P=012085., IOP Publishing DOI: 10.1088/1742-6596/1105/1/012085
- [13] Савченко И.В., Лежнин С.И., Мосунова Н.А. Рекомендации по значениям и расчетным соотношениям для теплофизических и кинетических свойств жидкого свинца // Теплоэнергетика. 2015. № 6. С. 51–54. DOI: 10.1134/S0040363615060077



## Non-stationary process characteristics of the gas outflow into a liquid

Alekseev M.V.\*, Vozhakov I.S.\*\*,\*\*, Lezhnin S.I.\*\*,\*\*

\*Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

\*\*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

A numerical simulation of the process of the outflow of gas under pressure into a closed container partially filled with liquid was carried out. For comparative theoretical analysis, an asymptotic model was used with assumptions about the adiabaticity of the gas outflow process and the ideality of the liquid during the oscillatory one-dimensional motion of the liquid column. In this case, the motion of the liquid column and the evolution of pressure in the gas are determined by the equation of dynamics and the balance of enthalpy. Numerical simulation was performed in the OpenFOAM package using the fluid volume method (VOF method) and the standard k-ε turbulence model. The evolution of the fields of volumetric gas content, velocity, and pressure during the flow of gas from the high-pressure chamber into a closed channel filled with liquid in the presence of a "gas blanket" at the upper end of the channel is obtained. It was shown that the dynamics of pulsations in the gas cavity that occurs when the gas flows into the closed region substantially depends on the physical properties of the liquid in the volume, especially the density. Numerical modeling showed that the injection of gas into water occurs in the form of a jet outflow of gas, and for the outflow into liquid lead, a gas slug is formed at the bottom of the channel. Satisfactory agreement was obtained between the numerical calculation and the calculation according to the asymptotic model for pressure pulsations in a gas projectile in liquid lead. For water, the results of calculations using the asymptotic model give a significant difference from the results of numerical calculations. In all cases, the velocity of the medium obtained by numerical simulation and when using the asymptotic model differ by an order of magnitude or more.

**Keywords:** gas outflow, high pressure chamber, OpenFOAM, gas injection into water, gas injection into liquid lead

### References

- [1] Vozhakov I.S., Lezhnin S.I., Alekseev M.V., Bogomolov A.R., Pribaturin N.A. Gas outflow modeling into the high density environment // Vestnik of Kuzbass State Technical University. 2016. № 5. C. 86–92. (in Russian)  
<https://journals.kuzstu.ru/article/3120.pdf>
- [2] Alekseev M.V., Vozhakov I.S., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A., The effect of interphase friction on the two-phase mixture outflowing characteristics into a high density medium // Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy. 2016. T. 2, № 3. C. 49–62. (in Russian)  
DOI: 10.21684/2411-7978-2016-2-3-49-62
- [3] Lezhnin S.I., Alekseev M.V., Vozhakov I.S., Pribaturin N.A. Simulating gas (vapor) outflow into a liquid // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1105, № 1. PP. 012081.  
IOP Publishing  
DOI: 10.1088/1742-6596/1105/1/012081
- [4] Nigmatulin R.I. Dynamics of Multiphase Media: v. 1. Hemisphere Publ. Corp New York, United States, 1990. 507 p.
- [5] Boris J.P., Landsberg A.M., Oran E.S., Garder J.H. LCPFCT - Flux-Corrected Transport Algorithm for Solving Generalized Continuity Equations. NRL/MR/6410-93-7192  
<https://pdfs.semanticscholar.org/250a/7bd3e46de18e0af13d43011956f31a0880af.pdf>
- [6] The OpenFOAM Foundation. Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox. 2019. openfoam.org.  
<https://cfd.direct/openfoam/user-guide/>
- [7] Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // Journal of Computational Physics. 1992. Vol. 100. P. 335–54.  
DOI: 10.1016/0021-9991(92)90240-Y
- [8] Alekseev M.V., Vozhakov I.S., Lezhnin S.I. Pressure pulsations while gas injection into a liquid- filled closed vessel at high pressure drop // Thermophysics and Aeromechanics. 2019. Vol. 26, № 5 (in press).
- [9] Bolotnova R.Kh. Study the dynamics of hollow jet formation under vaporoutflow from the supercritical state // Multiphase Systems. 2018. V. 13, № 4. P. 73–78  
DOI: 10.21662/mfs2018.4.011

- [10] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Supercritical steam outflow through a thin nozzle: forming a hollow jet // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2018. № 5. P. 751–757.  
DOI: [10.1134/S0869864318050116](https://doi.org/10.1134/S0869864318050116)
- [11] Alekseev M.V., Vozhakov I.S., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A. [Three-Dimensional modeling of gas injection into an open, liquid-filled pipe region] *Trehmernoje modelirovanie inzhetskii gaza v otkrytuju, zapolnennuju zhidkost'ju trubnuju oblast'* // [Abstracts of the XXXV Siberian Thermophysical Seminar dedicated to the 75th anniversary of doctor of technical Sciences, Professor V.I. Terekhov.] *Tezisy Dokladov XXXV Sibirskogo Teplofizicheskogo Seminara, posvjashhjonnyj 75-letiju d.t.n., professora V.I. Terehova*. 27–29 August 2019, Novosibirsk, Russia, P. 104. (in Russian)  
[http://www.itp.nsc.ru/conferences/sts35/files/STS35\\_abstracts.pdf](http://www.itp.nsc.ru/conferences/sts35/files/STS35_abstracts.pdf)
- [12] Alekseev M.V., Vozhakov I.S., Lobanov P.D., Svetonosov A.I., and Mohan V.K., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A. Numerical simulation of pulsed gas-to-liquid injection modes using open source CFD software package OpenFoam // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 1105, № 1. P. 012085.  
<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1105/1/012085/pdf>  
DOI: [10.1088/1742-6596/1105/1/012085](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1105/1/012085)
- [13] Lezhnin S.I., Mosunova N.A., Savchenko I.V. Recommendations on adopting the values and correlations for calculating the thermophysical and kinetic properties of liquid lead // *Thermal Engineering*. 2015. Vol. 62, № 6. P. 434–437.  
DOI: [10.1134/S0040363615060077](https://doi.org/10.1134/S0040363615060077)



## Исследование влияния граничных условий при численном решении модели вихревой трубы<sup>1</sup>

Минибаев М.Р.<sup>\*,\*\*</sup>, Михайленко К.И.<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

<sup>\*\*</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследуется применимость различных граничных условий при вычислительном моделировании вихревой трубы Ранка–Хилша. Сделан обзор состояния мировых исследований по вопросу влияния геометрии и различных термодинамических параметров на эффективность работы трубы. Приводится обоснование возможности введения дополнительных расчетных областей при отодвигании границ для исследования влияния граничных условий при моделировании задач газовой динамики. Для моделирования динамики газа в вихревой трубе записана математическая модель, которая включает в себя систему уравнений Навье–Стокса, описывающую динамику сжимаемого вязкого флюида, замыкаемая уравнением состояния идеального газа. Рассматриваются существующие методы расчета турбулентных течений. Описана применимость различных полуэмпирических моделей турбулентности для моделирования вихревой трубы. Аргументирована возможность применения выбранной  $k-\varepsilon$  модели и приведено ее описание. Рассмотрены характерные для модели вихревой трубы граничные условия, также показаны граничные условия наиболее сочетающиеся при моделировании задач газовой динамики. Представлена сетка, учитывающая области образующиеся при удалении границ. Решение проводится по алгоритму sonicFoam в пакете OpenFOAM. Используются утилиты постпроцессора при подготовке модели к вычислениям на высокопроизводительном кластере и утилиты для осреднения полученных физических величин. Приведены результаты моделирования для разных комбинаций граничных условий и моделей с удаленными границами. Проведено сравнение полученных результатов. Показано, что геометрические размеры оказывают существенное влияние на работу вихревой трубы. Правильный выбор граничных условий позволяет получить значения физических величин, наиболее близких к известным экспериментальным. Отодвигание границ от непосредственных выходов предоставляет возможность точнее оценить возникающие эффекты вблизи реальных границ вихревой трубы, особенно влияющие на величину эффекта Ранка–Хилша.

**Ключевые слова:** вихревая труба, граничные условия, вычислительный эксперимент, турбулентность, OpenFOAM

### 1. Введение

Вихревая труба представляет собой устройство, которое разделяет поток газа, поступающий тангенциально со стороны одного из торцов трубы, на два закрученных потока низкого давления с температурами выше и ниже исходной. Вихревая труба не имеет движущихся частей и, как правило,

состоит из круглой трубы с соплами, дросселем и клапанами. Газ высокого давления поступает в вихревую трубу по касательной через сопла, что увеличивает угловую скорость и, следовательно, производит эффект вихря. Далее газ покидает устройство через два выхода: горячий, расположенный по внешнему радиусу на дальнем конце, и холодный, образующий сопло по оси канала вблизи завихрителя. Описанная конструкция вихревой трубы носит название противоточной. Таким образом, газ разделяется на два слоя. Газ ближе к оси имеет низкую температуру и выходит через холодный выход, а газ на периферии трубы имеет высокую темпера-

<sup>1</sup>Работа выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию на 2019–2022 годы (№246-2019-00520).

туру и покидает устройство через горячий выход.

Разница температур, вызванная вихревым потоком, впервые была обнаружена французским инженером Жоржем Ранком в 1931 году [1] в процессе совершенствования циклонных труб для очистки газов от пыли. Позднее немецкий физик Рудольф Хилш [2] опубликовал исследования по улучшению конструкции вихревой трубы. Впоследствии такие вихревые трубы стали называть вихревыми трубами Ранка–Хилша.

Вихревая труба имеет следующие преимущества по сравнению с обычными охлаждающими устройствами: простота конструкции, отсутствие движущихся частей, работа без электричества и химикатов, маленький размер и легкий вес, низкая стоимость, не требует обслуживания, мгновенный выход на рабочий режим, долговечность (из-за нержавеющей стали), регулируемая температура [3, 4]. Но низкая тепловая эффективность является одним из основных сдерживающих факторов в широком применении вихревых труб. Кроме указанного недостатка, следует отметить повышенную шумность и вопрос доступности сжатого газа, которые также могут ограничивать применение. Поэтому, когда компактность, надежность и более низкая стоимость оборудования являются основными факторами, а высокая эффективность работы менее важна, вихревая труба становится хорошим устройством для нагрева или охлаждения газа, очищения и осушения газа, разделения газовых смесей, нанесения ДНК, сжижения природного газа и для других целей [5–7].

Благодаря простоте устройства и его надежности вихревые трубы имеют широкое применение во многих отраслях промышленности. Вихревые трубы используются в качестве холодильных установок в пищевой промышленности [8], для осушения и сепарации газа в нефтяной промышленности [9], для контроля среды обитания при исследовании подводных сред [10], для нагрева и охлаждения химических веществ [11] и т.д.

Основной физический механизм процессов, определяющих охлаждение газа в вихревой трубе, до сих пор не был полностью изучен. Продолжаются исследования возникающего эффекта и попытки объяснения этого явления. Так, в работах [12, 13] приводятся обзоры существующих моделей вихревых труб и их конструкций. Описываются существующие теории и приводятся новые подходы к объяснению эффекта Ранка–Хилша.

Также необходимо выделить большое количество экспериментальных исследований в направлении конструкции и размеров вихревой трубы. В работе [14] приводятся результаты исследования

эффективности охлаждения вихревой трубы с учетом числа сопловых отверстий. Авторы статьи [15] предлагают более детальное рассмотрение геометрических параметров трубы, таких, как длина трубы, диаметр и внутренний угол сужения, а также их влияние на эффективность работы трубы. В [16] показано влияние величины давления подаваемого газа на получаемую разницу температур и возможное засорение входного сопла. Таким образом, существуют экспериментальные исследования, предлагающие характерные параметры трубы и свойства подаваемого газа.

В задачах газовой динамики используют удаление расчетной границы на значительное расстояние для того, чтобы исключить непосредственное влияние граничных условий на получаемые результаты. В настоящей работе предлагается исследовать модель трубы, в которой граничные условия вынесены относительно выходов из трубы, и оценить параметры потока для сравнения с существующими моделями.

## 2. Математическая модель

Работа вихревой трубы описывается турбулентной моделью движения газа, которая задается следующей системой уравнений:

- Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U}) = 0; \quad (1)$$

- Уравнение сохранения импульсов

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} \times \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \boldsymbol{\tau}; \quad (2)$$

- Уравнение сохранения полной энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} E) = -\nabla p \mathbf{U} + \nabla(\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{U}); \quad (3)$$

- Система уравнений замыкается уравнением состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon. \quad (4)$$

В записи системы (1)–(4) использованы стандартные обозначения:  $\mathbf{U}$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $E = \varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{U}|^2$  — удельная полная энергия;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор вязких напряжений, элементы которого вычисляются по формуле:

$$\tau_{ij} = (\mu_t + \mu) \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right],$$

где  $\mu_t$  — турбулентная вязкость определяемая выбранной моделью турбулентности;  $v_i$  —  $i$ -я компонента вектора скорости  $\mathbf{U}$ ;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

## 2.1. Модель турбулентности

При характерных скоростях воздушного потока в канале вихревой трубы неизбежно возникает турбулентность. В настоящее время существуют три направления при расчете турбулентных течений: решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds Averaged Navier–Stokes, RANS), прямое численное моделирование турбулентности (Direct Numerical Simulation, DNS) и моделирование крупных вихрей (Large-Eddy Simulation, LES) [17].

Перспективным методом расчета сложных турбулентных течений является прямое численное моделирование турбулентности. Этим методом осуществляется решение полных нестационарных уравнений Навье–Стокса без каких-либо дополнительных приближений эмпирического характера. В работах [18, 19] авторы показали хорошую применимость указанного метода для решения задачи вычислительного моделирования вихревой трубы. Однако, в этих же работах отмечено, что для вычислений с достаточной точностью необходимо использовать конечно-разностную сетку с большим количеством узлов ( $N > 10^7$ ). Таким образом, возникает потребность в значительных вычислительных ресурсах и использовании многопроцессорной вычислительной системы. С одной стороны, в работе [20] показано, что максимальная производительность параллельного алгоритма для решения подобных задач может иметь линейную зависимость от числа процессоров при применении алгоритма конвейеризации. Также стоит упомянуть возможность использования для численного моделирования подобных задач метода быстрых мультиполей (FMM) и переноса вычислений на высокопроизводительные видеокарты [21]. С другой стороны, оба представленных подхода обладают существенным недостатком, связанным с разработкой отдельного приложения для каждой новой конфигурации задачи.

В статьях [22, 23] была исследована применимость различных полуэмпирических моделей турбулентности для моделирования вихревой трубы. В этих работах использовались следующие модели:  $k - \varepsilon$ ,  $(k - \varepsilon)$  Realizable,  $(k - \varepsilon)$  RNG, SST, SAS–SST и одна однопараметрическая полуэмпирическая модель ZeroEqu. Анализ интегральных характеристик вихревой трубы показывает, что коэффициент изэнтропической энергоэффективности (ИЕЕС) имеет похожие значения для всех моделей турбулентности, рассматриваемых в настоящей статье. Самая адекватная модель турбулентности показывает значение ИЕЕС  $\eta_s = 0.24$ . Экспериментальное значение этого коэффициента составляет около

$\eta_s = 0.36$ . Визуализация внутренней структуры возникающего вихревого потока показала, что  $k - \varepsilon$ ,  $(k - \varepsilon)$  Realizable,  $(k - \varepsilon)$  RNG и модель турбулентности SST предсказывают очень похожую структуру потока. В то же время модель турбулентности SAS–SST показывает структуру вихревого потока, сильно отличающуюся от всех других используемых моделей турбулентности. Это можно объяснить тем, что эта модель частично учитывает нестационарность турбулентности. И только модель турбулентности SAS–SST показала существование крупномасштабных вторичных вихревых структур в вычислительной области. Наличие таких вихревых структур подтверждается различными экспериментальными исследованиями [13, 14]. Профили гидродинамических и термодинамических характеристик микроструктуры потока, получаемые в результате математического моделирования винтового течения, возникающего в проточной части двухконтурной вихревой трубы, количественно и качественно отличаются от экспериментальных данных. Аналогичное несоответствие имело место между расчетными и экспериментальными значениями холодильного коэффициента. Таким образом, для дальнейшего использования описанной в статье [22] математической модели винтового потока, возникающего в вихревой трубе, необходима ее существенная модификация.

В рамках решаемой задачи большой интерес представляли термодинамические характеристики на границах выходов. Поэтому для регулярных вычислений принято решение использовать широко известную  $k - \varepsilon$  модель, которая представлена двумя уравнениями.

- Уравнение турбулентной кинетической энергии

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) - \frac{2}{3} \rho (\nabla \cdot u) k - \rho \varepsilon; \quad (5)$$

- Уравнение диссипации турбулентной энергии

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) - \frac{2}{3} C_1 \rho (\nabla \cdot u) \varepsilon - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (6)$$

где  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_1 = 1.44$ ,  $C_2 = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1$  и  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ .

Из этих уравнений определяется турбулентная вязкость.

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (7)$$

## 2.2. Граничные условия

Для наиболее полного моделирования естественной работы вихревой трубы были выбраны следующие граничные условия. На границе входа

подается газ температурой 300 К и повышенного давления 3–4 атм. На выходе — давление в 1 атм. Для температуры и скорости задаются условия протекания. На стенках трубы задается условие проскальзывания.

В ходе работы были также исследованы и другие граничные условия. Использовались граничные условия, наиболее сочетающиеся при моделировании задач газовой динамики в OpenFOAM. В документации [24] для систем давление–скорость описаны наилучшие сочетания граничных условий. Так, для сжимаемых потоков предлагается несколько вариантов пар. Наибольший интерес представляли граничные условия с отличной и очень хорошей стабильностью (excellent и very good stability). Для случая пары excellent на входе задается постоянный массовый расход, а на выходе — фиксированное значение давления. Для второго сочетания (very good) на входе и выходе задается граничное условие totalPressure.

Граничное условие totalPressure устанавливает статическое давление на границе на основе пересчета заданного общего давления путем вычитания динамического давления из общего давления

$$p_p = p_0 - \frac{1}{2} \rho |u|^2.$$

### 3. Разностная сетка

При построении разностной сетки для моделирования динамики газа вихревой трубы необходимо следовать следующим правилам [25]: структурированная (упорядоченная) сетка позволяет точнее аппроксимировать производные; использование структурированной сетки приводит к ускорению вычислительного процесса при фиксированном числе узловых точек; структурированная сетка уменьшает необходимый для расчетов объем оперативной памяти компьютера, упрощает процесс пространственной декомпозиции расчетной области при распараллеливании вычислений; ортогонализированная структурированная сетка снижает вычислительную погрешность.

В работе [25] была предложена сетка для аналогичной модели, отвечающая всем вышеизложенным правилам. В этой статье описано построение ортогонализированной структурированной вычислительной сетки с гексагональными ячейками для метода контрольного объема, описывающей цилиндрическую область.

Для полной проверки влияния граничных условий на модель вихревой трубы была построена разностная сетка, в которой границы на выходах из вихревой трубы были отодвинуты на «бесконечное» расстояние. При этом образовались дополнитель-

ные расчетные области. Поскольку образованные дополнительные области также имеют цилиндрическую форму, расчетная сетка в них была смоделирована по аналогии с сеткой в канале трубы.

Таким образом, была подготовлена ортогонализированная сетка как в канале, так и в дополнительных областях с соизмеримыми размерами конечно-объемных ячеек. Общий вид построенной вычислительной сетки представлен на рис. 1. На рис. 2 представлено сечение трубы с дополнительными областями в горизонтальном направлении, то есть вдоль трубы.

### 4. Вычислительный алгоритм

Для моделирования эффекта вихревой трубы использовалась платформа OpenFOAM, имеющая возможность пользовательского задания систем уравнений. В качестве решателя OpenFOAM применялся sonicFoam, предназначенный для моделирования задач до- и сверхзвукового ламинарного или турбулентного сжимаемого потока. SonicFoam построен на основе алгоритма вычисления давления (pressure-based). В методе pressure-based уравнения сохранения решаются для исходных переменных ( $\rho, U, e$ ), плотность находится из уравнения состояния, а давление — из уравнения связи давления со скоростью. SonicFoam реализует алгоритм PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) [26], отличающийся двухшаговым корректором, а в качестве зависимых переменных использующий давление и скорость.

Последовательный расчет для вычислительной сетки с большим количеством ячеек занимает продолжительное время, в связи с этим было принято решение проводить вычисления на высокопроизводительном кластере. Для этого была использована функция утилиты препроцессора decomposePar, с помощью которой проводилась декомпозиция расчетной области для параллельного счета. После завершения расчета полученные результаты объединялись с помощью функции утилиты постпроцессора reconstructPar.

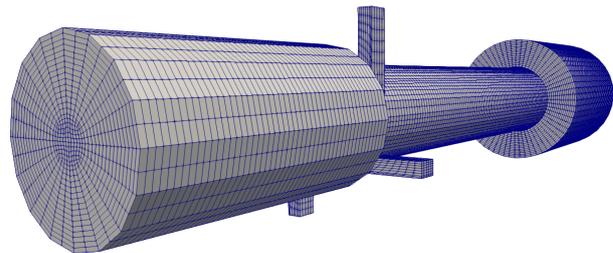


Рис. 1. Общий вид расчетной сетки

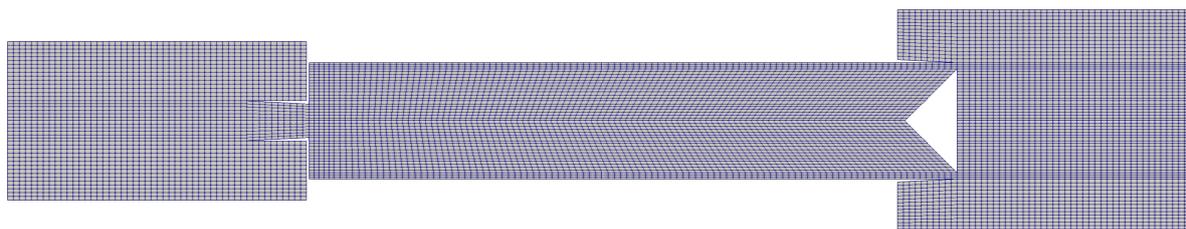


Рис. 2. Схема конечно-разностной сетки в продольном сечении трубы

При обработке и сравнении полученных результатов находились средние значения в заданных областях, сечениях и поверхностях в разные моменты времени выделенных физических величин моделируемого газа: давления, температуры и величины скорости. Для этого была использована функция утилиты постпроцессора *surfacescut*, позволяющая получить значения физических величин на границах моделируемой области и на требуемых сечениях в каждый полученный момент времени.

Следующим шагом выбранные значения осреднялись по заданным сечениям и площадям, а затем находилось среднее значение по времени за указанный период.

Для визуализации полученных результатов использовалось свободное программное обеспечение *ParaView*.

## 5. Некоторые результаты

В качестве рассматриваемой модели предлагается вихревая труба схематически показанная на рис. 3. Авторами работы [27] предложены некоторые оптимальные геометрические характеристики, использованные в представленном исследовании.

Приняты следующие размеры трубы:  $L = 26$  см;  $D = 2.35$  см;  $d = 0.45$  см;  $h = 0.26$  см;  $p = 1$  см;  $q = 0.69$  см;  $m = 4.7$  см;  $\ell = 2.5$  см и  $\alpha = 3^\circ$ .

В ходе работы использовались три вида граничных условий со следующими значениями:

- статическое давление на границах — на входе 3 атм, на выходе 1 атм (fixed value);
- условие *totalPressure* по давлению, где в качестве общего давления  $p_0$  выбраны также 3 атм на входе и 1 атм на выходе (very good);
- массовый расход на входе 0.153 кг/с и *totalPressure* на выходе с общим давлением 1 атм (excellent).

При обработке результатов осреднение по областям производилось тремя способами: осреднение всех значений по полному сечению; осреднение значений по сечению, ограниченному заданной зоной и осреднение по области, состоящей из ячеек, не лежащих на одной плоскости. Для ограничения сечений были созданы две зоны. Первая зона соответствует площади холодного выхода, вторая —

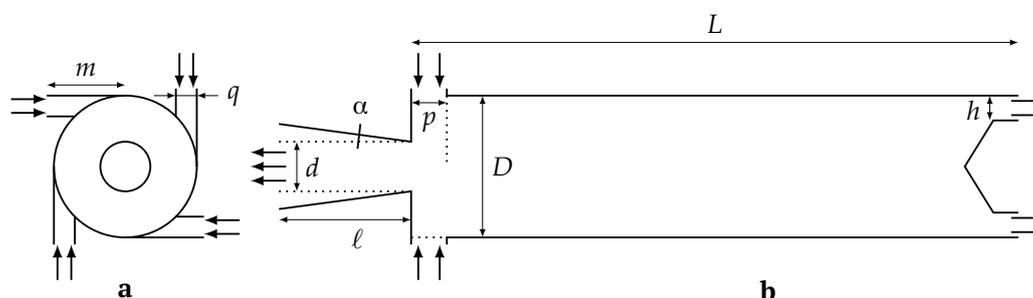


Рис. 3. Схема изучаемой противоточной вихревой трубы: а) вид с торца со стороны холодного выхода и завихрителей; б) разрез вдоль оси трубы. Обозначения:  $L$  — длина трубы;  $D$  — диаметр трубы;  $p, m, q$  — высота, длина и ширина канала завихрителя;  $c$  — диаметр сопла холодного выхода;  $h$  — размер горячего выхода (разность внешнего и внутреннего радиусов);  $\ell$  — длина сопла холодного выхода;  $\alpha$  — угол расширения сопла холодного выхода

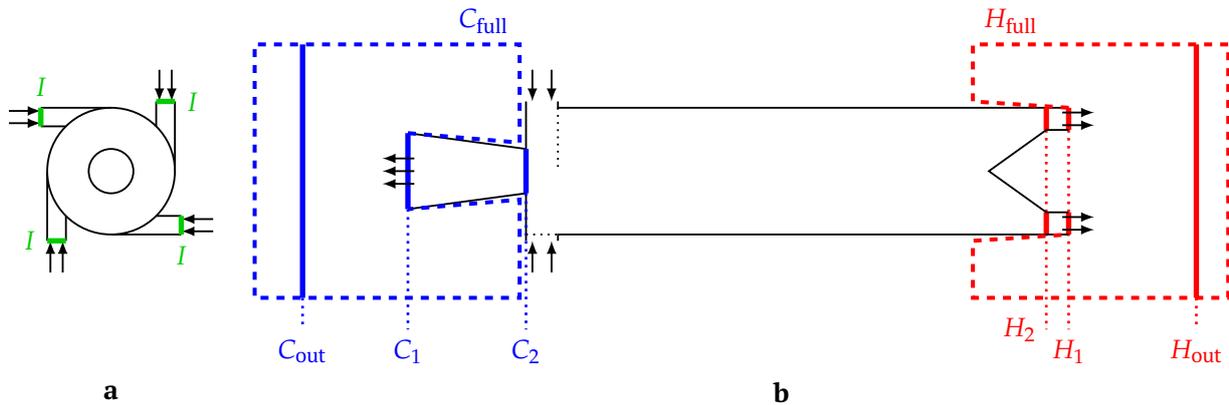


Рис. 4. Схема вихревой трубы с обозначением областей и сечений, по которым осреднялись значения

площади горячего. Далее полученные значения по областям и сечениям осреднялись по времени с 0.095 до 0.1 с. Таким образом, для моделей осреднялись значения в следующих областях (рис. 4):

1. область  $I$ , включающая в себя значения на сечениях завихрителей, через которые подается газ;
2. зона  $C_1$  на границе холодного сопла;
3. зона  $C_2$  внутри трубы в начале холодного сопла;
4. зона  $H_1$  на границе горячего сопла;
5. зона  $H_2$  внутри трубы у края горячего выхода;
6. сечение  $C_{out}$  удаленное от края холодного сопла;
7. область  $C_{full}$ ;
8. сечение  $H_{out}$  удаленное от края горячего выхода;
9. область  $H_{full}$ .

Для верификационных моделей без отодвигания границ измерения проводились лишь по первым пяти описанным геометрическим областям.

Для всех моделей, кроме модели с граничными условиями типа excellent с удаленными границами, успешно произведен расчет до момента времени 0.1 с. Для этих моделей было получено стабилизировавшееся распределение температур (рис. 5), где на холодном выходе наблюдается зона пониженной температуры, а на горячем — повышенной. В то же время для всех моделей внутри трубы образуются два вихря, как показано на рис. 6, с температурами выше и ниже начальной температуры. Наличие этих вихрей подтверждается в большинстве экспериментальных работ.

Для модели с областями и граничными условиями типа excellent расчет завершается ошибкой. Было выявлено, что остановка расчета связана с возникновением в некоторых областях отрицательной температуры. Такой эффект, судя по полученным распределениям поля скорости, вызван обратным потоком через область горячего выхода.

В табл. 1 представлены осредненные результаты расчета модели с удаленными границами и

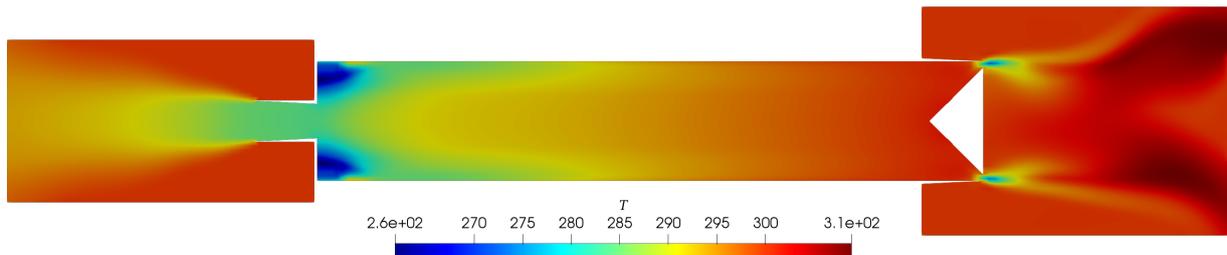


Рис. 5. Распределение температуры в трубе с удаленными границами в момент времени 0.1 с

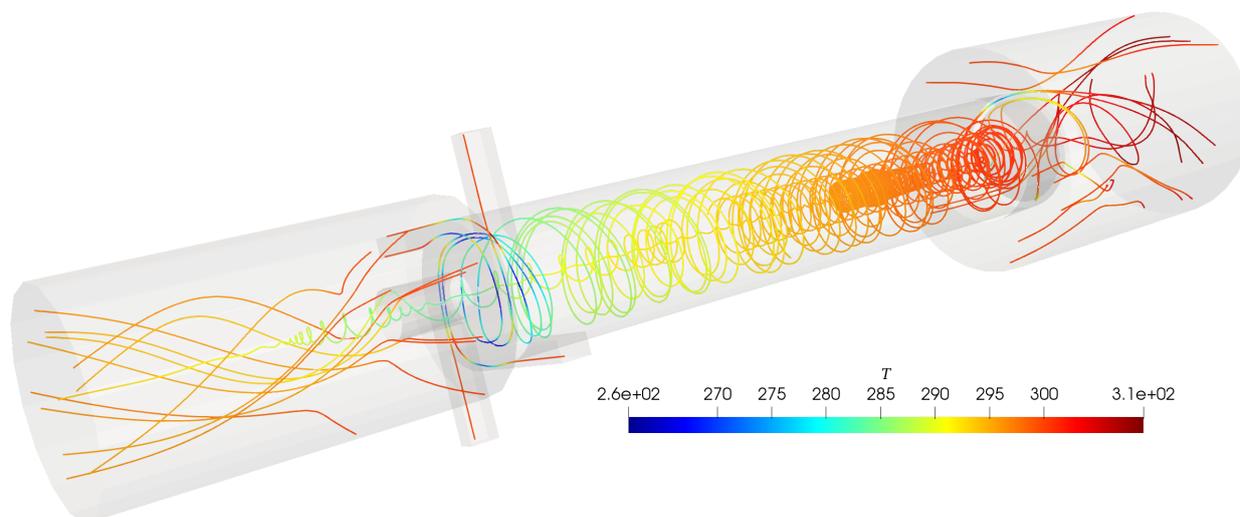


Рис. 6. Внутренний и внешний вихри в трубе с отдаленными границами; цветом показана температура воздуха

граничными условиями типа *very good*. В качестве столбцов таблицы выбраны следующие физические величины: температура  $T$ ; давление  $p$ ; проекция скорости на вектор нормали к границе  $U_{\perp}$ ; массовый расход газа  $Q$ . Строки таблицы описывают определенные выше области и сечения. В первую очередь необходимо отметить, что полученные значения для областей, в которых определены граничные условия, соответствуют задаваемым значениям. Градиент давления на входе и выходах из трубы обеспечивает работу вихревой трубы. Наименьшая температуры получена в областях  $C_2$  и  $C_1$ , так как через эти сечения проходит охлажденный поток газа.

В связи с тем, что часть поверхностей, образующих разнесенные границы, имеют цилиндриче-

скую форму, вычисление нормальных составляющих скоростей для них сопряжено со значительными трудностями и в настоящей работе не выполнялось. Для векторных физических величин оценивались абсолютные значения.

В то же время на горячем выходе в области  $H_1$  отмечена низкая температура. Такой эффект объясняется особенностями геометрии вихревой трубы. В области горячего сопла возникает большой расход газа с высокой скоростью и при повышенном давлении. При этом, по-видимому, происходит перераспределение полной энергии в пользу кинетической составляющей. В результате происходит локальное охлаждение газа. В тоже время после истечения газа из трубы происходит его расширение и повышение температуры, которое и наблюдается в виде горячих струй на рис. 5 и может быть измерено в соответствующем сечении  $H_{out}$ .

Области  $C_{full}$  и  $H_{full}$  имеют температуру, равную начальному полю температуры в трубе. Это связано с тем, что в процессе работы вихревой трубы истекающие струи из сопел увлекают за собой окружающий их газ. А поскольку на границах областей заданы условия протекания, внутрь созданных областей поступает газ начальной температуры 300 К. Это явление хорошо отображено на рис. 7, на котором представлены вектора поля скорости в плоскости сечения вдоль расчетной области. В дополнительных внешних областях вектора скорости в направлении течения струй направлены внутрь ортогонально границе созданных областей. То есть втекает газ, который при осреднении по всей границе влияет на значение средней температуры.

Таблица 1. Значения физических величин для модели с удаленными границами и граничными условиями типа *very good*.

	$T$ , К	$p$ , Па	$U_{\perp}$ , м/с	$Q$ , кг/с
$I$	300	245730	195,2	0,153
$C_{full}$	300	99999	—	0,0062
$C_{out}$	298	99979	4,3	0,0021
$C_1$	285	99213	20	0,0034
$C_2$	282	99348	33	0,0057
$H_{full}$	300	99768	—	0,146
$H_{out}$	305	99222	43,3	0,0345
$H_1$	286	140876	175	0,1053
$H_2$	298	153119	139	0,0869

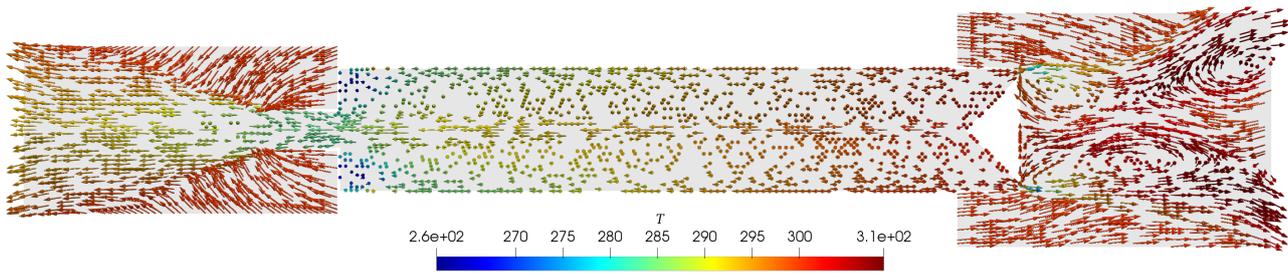


Рис. 7. Поле скоростей в продольном сечении канала; направление и длина вектора задают направление и величину скорости; цветом показана температура воздуха

Также необходимо заметить, что полученный суммарный расход на входе в трубу равен суммарному расходу на выходах из трубы, несмотря на то, что при задании граничных условий массовый расход явно не определялся на границах. Данный результат еще раз подтверждает консервативность численного метода и позволяет судить о качестве полученных результатов.

Для моделей без удаления границ с граничными условиями *very good*, *fixed value*, *excellent* были получены результаты, которые представлены в табл. 2, 3, 4 соответственно. Аналогично табл. 1 в качестве столбцов выбраны соответствующие физические величины, а строки отражают значения по сечениям и областям. Результаты представленного моделирования оказались очень похожими между собой, но все же имеют некоторые отличия, которые следует отметить. Несмотря на то, что для модели с граничными условиями типа *excellent* задаваемый массовый расход определялся по вычисленному массовому расходу модели с граничными условиями типа *very good*, наилучшее разделение на два вихря разных температур внутри трубы было получено для модели с граничными условиями типа *excellent*, что подтверждается наименьшей температурой в области  $C_2$  и наибольшей температурой в области  $H_2$  для всех трех моделей. То есть граничные условия *excellent* для моделей без удаления границ наилучшим образом предсказывают наличие внутри трубы градиента температур, что наиболее приближено к реальной модели вихревой трубы. В остальном значения для моделей с разными граничными условиями очень похожи, то есть нет других принципиальных отличий связанных с возникновением каких-либо эффектов при использовании одного из трех видов граничных условий.

Распределения температуры для всех трех моделей без дополнительных внешних областей имеют схожие результаты, аналогичные показанным на рис. 8.

Таблица 2. Значения физических величин для модели с граничными условиями типа *very good*.

	$T$ , К	$p$ , Па	$U_{\perp}$ , м/с	$Q$ , кг/с
$I$	300	245730	195,2	0,153
$C_1$	300	99999	61	0,0062
$C_2$	282	99867	93	0,0161
$H_1$	300	99768	271	0,146
$H_2$	309	167149	99	0,0653

Таблица 3. Значения физических величин для модели с граничными условиями *fixed value*.

	$T$ , К	$p$ , Па	$U_{\perp}$ , м/с	$Q$ , кг/с
$I$	300	245730	195,2	0,153
$C_1$	300	99999	46	0,0062
$C_2$	286	99915	74	0,0126
$H_1$	300	99768	268	0,146
$H_2$	315	162765	101	0,0636

Таблица 4. Значения физических величин для модели с граничными условиями *fixed value*.

	$T$ , К	$p$ , Па	$U_{\perp}$ , м/с	$Q$ , кг/с
$I$	300	245730	195,2	0,153
$C_1$	300	99999	76	0,0062
$C_2$	280	100251	108	0,0189
$H_1$	300	99768	290	0,146
$H_2$	317	175321	92	0,0621

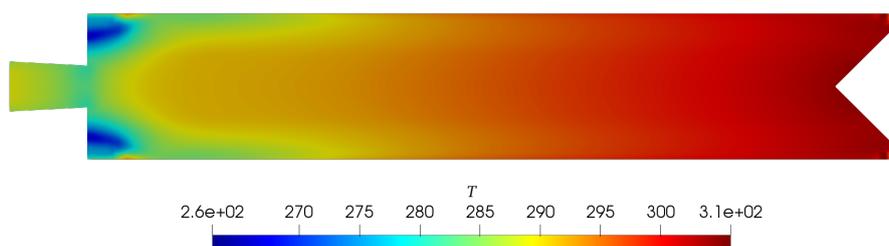


Рис. 8. Распределение температуры для модели без удаления границ

Сравним результаты для модели с удаленными границами и граничными условиями типа *very good* с моделями без удаления. Поскольку для моделей без удаления границ были получены примерно одинаковые результаты, далее будем использовать для сравнения только модель с граничными условиями *very good*. Таким образом, у сравниваемых моделей одинаковые граничные условия, но заданы они в разных местах: в одном случае на реальном выходе из канала трубы; а в другом — удаленно от них.

Отметим основные сходства моделей. Во-первых суммарные расходы для входов и выходов у обеих моделей совпадают, несмотря на то, что выходы расположены в разных местах. Во-вторых образуются зоны пониженной температуры в области горячего сопла, от сечения  $H_2$  до  $H_1$  происходит охлаждение для обеих моделей.

Отметим различие физических величин на реальных выходах и внутри трубы вблизи этих выходов. Так, для модели без внешней области в сечении  $S_1$  холодного сопла средняя температура составляет 300 К, а для модели с удаленными границами в той же области — 285 К, и вычисленный массовый расход оказывается в два раза меньше. В области  $S_2$  значения температур совпадают, но наблюдаются абсолютно разные нормальные скорости и расходы. На горячем выходе для модели без удаления границ средняя температура в области  $H_1$  составляет 300 К, в  $H_2$  — 309 К, а для модели с удаленными границами: 286 К и 305 К соответственно. Расходы и скорости также различны. То есть для модели без дополнительных внешних областей на горячем выходе измеренная средняя температура в целом выше, но она также имеет тенденцию к снижению при приближении непосредственно к выходу из расчетной области, как уже было отмечено выше. В результате для модели без удаления границ невозможно оценить эффективность работы трубы, так как на реальных границах температуры совпадают и равны температуре входящего газа. В то же время, для модели с удаленными граничными условиями явно видны потоки разных

температур. Это объясняется тем, что при задании граничных условий непосредственно на границе выхода, граничные условия оказывают влияние на модель и, соответственно, на значения физических величин внутри трубы.

Таким образом, модель с удаленными границами позволяет более детально понять и увидеть эффекты, возникающие возле реальных границ работающей вихревой трубы.

## 6. Заключение

Таким образом в ходе работы было показано, что при математическом моделировании процессов температурного разделения в канале трубы Ранка–Хилша необходимо с большой осторожностью подходить к выбору граничных условий. Это связано с тем, что любые граничные условия неизбежно оказывают влияние на результат внутри расчетной области.

В работе продемонстрировано, что введение дополнительных областей возле горячего и холодного выходов из вихревой трубы (отодвигание границы «на бесконечность») приводит к изменению среднего значения основных физических величин непосредственно на выходах и вблизи них внутри канала трубы.

Представленные результаты позволяют сделать вывод о необходимости использования в моделях вихревой трубы рассмотренных выше дополнительных областей на горячем и холодном выходах, несмотря на значительный рост затрачиваемых машинных ресурсов.

С другой стороны, если следовать максимальному сокращению расчетной сетки и не вводить дополнительных областей на выходе, полученные результаты приводят к выводу, что выбор граничных условий ограничен не только сходимостью численного решения, но и определенной допустимостью их. Указанная допустимость граничных условий диктуется как экспериментальными данными, так и результатами, полученными в «больших» вычислениях, проведенных в рамках представленной работы. Таким образом, более правильными

граничными условиями для ограниченной сетки следует считать те, в которых на входе задается постоянный массовый расход подаваемого газа, а на выходе поддерживается постоянное значение давления.

Дальнейшая работа предполагает поиск таких граничных условий, которые позволят приблизить границу расчетной области к выходам из вихревой трубы без внесения большой погрешности в результат.

## Список литературы

- [1] Ranque G.J. Experiments on expansion a vortex with Simultaneous Exhaust of hot air and cold air // *J. Phys. Radium*. 1933. V. 4. Pp. 112–114 (in French).
- [2] Hilsch R. The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as Cooling Process // *Review of Scientific Instruments*. 1947. V. 18. Pp. 108–113.  
DOI: 10.1063/1.1740893
- [3] Khodorkov L., Poshernev N.V., Zhidkov M.A. The vortex tube – a universal device for heating, cooling, cleaning, and drying gases and separating gas mixtures // *Chemical and Petroleum Engineering*. 2003. V. 39, No. 7–8. Pp. 409–415.  
DOI: 10.1023/A:1026336813155
- [4] Exair.com. Vortex Tubes.  
URL: <http://www.exair.com/index.php/products/vortex-tubes-and-spot-cooling-products/vortex-tubes/vt.html>  
(дата обращения: 17.05.2019).
- [5] Ebmeier R., Whitney S., Alugupally S., Nelson M., Padhye N., Gogos G., Viljoen H.J. Ranque–Hilsch Vortex Tube Thermocycler for DNA Amplification // *Instrumentation Science & Technology*. 2004. V. 32. Pp. 567–570.  
DOI: 10.1081/CI-200029810
- [6] Boucher R.F., Tippetts J.R. Vortex-tube-driven thermo-electricity // *In Sixth triennial international symposium on Fluid Control, Measurement and Visualization*, 6th, Sherbrooke, Canada. 2000. Paper 50.
- [7] Westley R. A Bibliography and Survey of The Vortex Tube. The College of Aeronautics. 1957. P. 38.
- [8] Vortex Tubes, CNC Coolers, Cool Tool and Compressed Air Products.  
URL: <https://arizonavortex.com/vortex-tubes/>  
(дата обращения: 27.12.2018)
- [9] Ахметов Ю.М., Жернаков В.С., Целищев А.В. Исследование процесса сепарации газожидкостного потока в вихревой трубе // *Вестник УГАТУ*. 2011. Т. 15, № 4(44). С. 120–126.  
<http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/812>
- [10] Baz A., Gilheany J., Kalvitas A. Feasibility of vortex tube assisted environmental control of an underwater research habitat // *Ocean Eng.* 1987. V. 15, No. 1. Pp. 34–54.  
DOI: 10.1016/0029-8018(88)90018-2
- [11] Bruno T.J. Laboratory applications of the vortex tube // *Journal of Chemical Education*. 1987. V. 64. Pp. 987–988.  
DOI: 10.1021/ed064p987
- [12] Гуцол А.Ф. Эффект Ранка // *Успехи физических наук*. 1997. Т. 167, № 6. С. 665–687.  
DOI: 10.1070/PU1997v040n06ABEH000248
- [13] Eiamsa-Ard S., Promvong P. Review of Ranque–Hilsch effects on vortex tubes // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2008. V. 1. Pp. 1822–1842.  
DOI: 10.1016/j.rser.2007.03.006
- [14] Attalla M., Ahmed H., Ahmed M.S., El-Wafa A.A. An experimental study of nozzle number on Ranque–Hilsch counter-flow vortex tube // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2017. V. 82. Pp. 381–389.  
DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2016.11.034
- [15] Hamdan M.O., Al-Omari S.-A., Oweimer A.S. Experimental study of vortex tube energy separation under different tube design // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2018. V. 91. Pp. 306–311.  
DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2017.10.034
- [16] Majidi D., Alighardashi H., Farhadi F. Best vortex tube cascade for highest thermal separation // *International Journal of Refrigeration*. 2017. V. 85. Pp. 282–291.  
DOI: 10.1016/j.ijrefrig.2017.10.006
- [17] Волков К.Н., Емельянов В.Н., Зазимко В.А. Турбулентные струи – статистические модели и моделирование крупных вихрей. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2014. 360 с.
- [18] Марьин Д.Ф., Михайленко К.И., Хазиев Л.Х. Прямое численное моделирование эффекта Ранка // *Параллельные вычислительные технологии (PaVT'2011): труды международной научной конференции (Москва, 28 марта – 1 апреля 2011 г.)*. Челябинск: Издательский центр ЮрГУ. 2011. С. 539–547.  
<http://omega.sp.susu.ru/books/conference/PaVT2011/short/197.pdf>
- [19] Марьин Д.Ф., Михайленко К.И. Численное исследование механизма возникновения эффекта Ранка–Хилша в канале вихревой трубы // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. № 4–3. С. 977.
- [20] Газизов Р.К., Лукашук С.Ю., Михайленко К.И. Разработка параллельных алгоритмов решения задач механики сплошной среды на основе принципа пространственной декомпозиции // *Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета*. 2003. Т. 4, № 1. С. 100–107.
- [21] Moiseeva E., Mikhaylenko C., Malyshev V., Maryin D., Gumerov N. FMM/GPU accelerated molecular dynamics simulation of phase transitions in water-nitrogen-metal systems // *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings, IMECE 2012*. 2012. Pp. 883–892.  
<https://www.tib.eu/en/search/id/BLCP:CN084513203/IMECE2012-86246-FMM-GPU-Accelerated-Molecular-Dynamics/>
- [22] Носков А.С., Ловцов А.В., Хаит А.В. Моделирование газового потока в двухконтурной вихревой трубе Ранка–Хилша // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. Т. 5, № 3. С. 313–321.  
DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.3.37
- [23] Khaite A., Noskov A., Alekhin V., Antipin A. Numerical simulation and visualization of air flow in Rnque–Hilsch vortex tube // *Proceedings of the 13th International Conference on Construction Applications of Virtual Reality*, 30-31 October 2013, London, UK. 2013. Pp. 638–648.  
DOI: 10.13140/RG.2.1.2916.2089
- [24] Common Combinations Pressure-velocity systems. URL: <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-bcs-common-combinations.html>  
(дата обращения: 27.05.2019).
- [25] Михайленко К.И. К моделированию вихревой трубы: подготовка гексагональной сетки для вычислительных экспериментов в среде OpenFOAM // *Труды Института механики им. Р.Р.Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 1. С. 112–118.  
DOI: 10.21662/uim2016.1.017
- [26] Jang D.S., Jetli R., Acharya S. Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC algorithms for the treatment of the pressure-velocity coupling in steady flow problems // *Numer. Heat Transfer Appl.* 1986. V. 10. Pp. 209–228.  
DOI: 10.1080/10407788608913517
- [27] Борисоглебский И.К., Метусова М.В., Михайленко К.И. Зависимость эффекта Ранка–Хилша от геометрии холодного выхода // *Многофазные системы*. 2018. Т. 13, № 3. С. 52–58.  
DOI: 10.21662/mfs2018.3.008



## Investigation of the influence of boundary conditions in the numerical solution of a vortex tube model

Minibaev M.R.<sup>\*,\*\*</sup>, Mikhaylenko C.I.<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

<sup>\*\*</sup>Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC of RAS, Ufa, Russia

The applicability of various boundary conditions in the computational simulation of a Ranque–Hilsch vortex tube is investigated. A review of existing works on the effect of geometry and various thermodynamic parameters on the efficiency of the pipe is made. The substantiation of the possibility of introducing additional computational domains when moving the boundaries to study the influence of boundary conditions when modeling gas dynamics problems is given. To simulate the dynamics of a gas in a vortex tube, a mathematical model is written that includes the Navier–Stokes system of equations describing a compressible viscous fluid, which is closed by the equation of state of an ideal gas. Existing methods for calculating turbulent flows are considered. The applicability of various semi-empirical models of turbulence for modeling a vortex tube is described. The possibility of using the selected  $k - \epsilon$  model and its description is argued. The boundary conditions characteristic of the vortex tube model are described, and the boundary conditions most combined in the simulation of gas dynamics problems are also shown. Presents a grid that takes into account the area formed by the removal of boundaries. The solution is based on the sonicFoam algorithm in the OpenFOAM package. Utilities of the postprocessor are used when preparing the model for calculations on a high-performance cluster and utilities for averaging the obtained physical quantities. The simulation results for different combinations of boundary conditions and models with remote boundaries are given. Comparison of the results obtained. It is shown that the geometrical dimensions have a strong influence on the operation of the pipe; the correct choice of boundary conditions makes it possible to obtain the values of physical quantities that are closest to the known experimental ones. Moving the boundaries away from direct exits provides an opportunity to more accurately estimate the effects that arise near the real boundaries of the vortex tube, especially affecting the magnitude of the Ranque–Hilsch effect.

**Keywords:** vortex tube, boundary conditions, CFD, turbunec, OpenFOAM

### References

- [1] Ranque G.J. Experiments on expansion a vortex with Simultaneous Exhaust of hot air and cold air // *J. Phys. Radium*. 1933. V. 4. Pp. 112–114 (in French).
- [2] Hilsch R. The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as Cooling Process // *Review of Scientific Instruments*. 1947. V. 18. Pp. 108–113.  
DOI: 10.1063/1.1740893
- [3] Khodorkov L., Poshernev N.V., Zhidkov M.A. The vortex tube – a universal device for heating, cooling, cleaning, and drying gases and separating gas mixtures // *Chemical and Petroleum Engineering*. 2003. V. 39, No. 7–8. Pp. 409–415.  
DOI: 10.1023/A:1026336813155
- [4] Exair.com. Vortex Tubes.  
URL: <http://www.exair.com/index.php/products/vortex-tubes-and-spot-cooling-products/vortex-tubes/vt.html>  
(Accessed date: 17.05.2019).
- [5] Ebmeier R., Whitney S., Alugupally S., Nelson M., Padhye N., Gogos G., Viljoen H.J. Ranque–Hilsch Vortex Tube Thermocycler for DNA Amplification // *Instrumentation Science & Technology*. 2004. V. 32. Pp. 567–570.  
DOI: 10.1081/CI-200029810
- [6] Boucher R.F., Tippetts J.R. Vortex-tube-driven thermoelectricity // In *Sixth triennial international symposium on Fluid Control, Measurement and Visualization*, 6th, Sherbrooke, Canada. 2000. Paper 50.

- [7] Westley R. A Bibliography and Survey of The Vortex Tube. The College of Aeronautics. 1957. P. 38.
- [8] Vortex Tubes, CNC Coolers, Cool Tool and Compressed Air Products. URL: <https://arizonavortex.com/vortex-tubes/> (accessed 27 December 2017)
- [9] Akhmetov Yu.M., Zhernakov V.S., Tselishev A.V. [Investigation of the process of separation of gas-liquid flow in a vortex tube] Issledovanie processa separacii gazozhidkostnogo potoka v vixrevoj trube // [USATU Bulletin] Vestnik UGATU. 2011. V. 15, No. 4(44). Pp. 120–126 (in Russian). <http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/812>
- [10] Baz A., Gilheany J., Kalvitas A. Feasibility of vortex tube assisted environmental control of an underwater research habitat // Ocean Eng. 1987. V. 15, No. 1. Pp. 34–54. DOI: 10.1016/0029-8018(88)90018-2
- [11] Bruno T.J. Laboratory applications of the vortex tube // Journal of Chemical Education. 1987. V. 64. Pp. 987–988. DOI: 10.1021/ed064p987
- [12] Gutsol A.F. The Ranque effect // Physics-Uspekhi. 1997. V. 40. Pp. 639–658. DOI: 10.1070/PU1997v040n06ABEH000248
- [13] Eiamsa-Ard S., Promvong P. Review of Ranque-Hilsch effects on vortex tubes // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2008. V. 1. Pp. 1822–1842. DOI: 10.1016/j.rser.2007.03.006
- [14] Attalla M., Ahmed H., Ahmed M.S., El-Wafa A.A. An experimental study of nozzle number on Ranque–Hilsch counter-flow vortex tube // Experimental Thermal and Fluid Science. 2017. V. 82. Pp. 381–389. DOI: 10.1016/j.exptthermflusci.2016.11.034
- [15] Hamdan M.O., Al-Omari S.-A., Oweimer A.S. Experimental study of vortex tube energy separation under different tube design // Experimental Thermal and Fluid Science. 2018. V. 91. Pp. 306–311. DOI: 10.1016/j.exptthermflusci.2017.10.034
- [16] Majidi D., Alighardashi H., Farhadi F. Best vortex tube cascade for highest thermal separation // International Journal of Refrigeration. 2017. V. 85. Pp. 282–291. DOI: 10.1016/j.ijrefrig.2017.10.006
- [17] Volkov K.N., Emel'yanov V.N., Zazimko V.A. [Turbulent jets – statistical models and modeling of large eddies] Turbulentnye strui – statisticheskie modeli i modelirovanie krupnykh vixrej. M: FIZMATLIT. 2014. P. 360 (in Russian).
- [18] Marin D.F., Mikhaylenko C.I., Khaziev L.Kh. [Direct numerical simulation of Rankque effect] Pryamoe chislennoe modelirovanie e'ffekta Ranka // Parallel numerical techniques: proceedings of international conference PaVT'2011. Pp. 539–547 (in Russian). <http://omega.sp.susu.ru/books/conference/PaVT2011/short/197.pdf>
- [19] Marin D.F., Mikhaylenko C.I. [Numerical investigation of the mechanism of the Ranque-Hilsch effect in the vortex tube channel] Chislennoe issledovanie mexanizma voznikoveniya e'ffekta Ranka–Xilsha v kanale vixrevoj truby // Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. 2011. No. 4–3. P. 977 (in Russian).
- [20] Gazizov R.K., Lukashuk S.Yu., Mikhaylenko C.I. [Development of parallel technique based on the principle of spatial decomposition for solving problems of continuum mechanics]. Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviacionnogo nexnucheskogo universiteta [Ufa state aviation technical university Bulletin]. 2013. V. 4, No. 1. Pp. 100–107 (in Russian)
- [21] Moiseeva E., Mikhaylenko C., Malyshev V., Maryin D., Gumerov N. FMM/GPU accelerated molecular dynamics simulation of phase transitions in water-nitrogen-metal systems // ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings, IMECE 2012. 2012. Pp. 883–892. <https://www.tib.eu/en/search/id/BLCP:CN084513203/IMECE2012-86246-FMM-GPU-Accelerated-Molecular-Dynamics/>
- [22] Noskov A.S., Lovtsov A.V., Khait A.V. Simulation of gas flow in double-circuit Ranque–Hilsch vortex tube // Computational Continuum Mechanics. 2012, V. 5, No 3. Pp. 313–321 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.3.37
- [23] Khait A., Noskov A., Alekhin V., Antipin A. Numerical simulation and visualization of air flow in Rnque–Hilsch vortex tube // Proceedings of the 13th International Conference on Construction Applications of Virtual Reality, 30-31 October 2013, London, UK. 2013. Pp. 638–648. DOI: 10.13140/RG.2.1.2916.2089
- [24] Common Combinations Pressure-velocity systems. URL: <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-bcs-common-combinations.html> (accessed: 27.05.2019).
- [25] Mikhaylenko C.I. Simulation of the vortex tube: design of a hexagonal mesh for computational experiments in OpenFOAM // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. 2016. V. 11, No. 1. Pp. 112–118 (in Russian). DOI: 10.21662/uim2016.1.017
- [26] Jang D.S., Jetli R., Acharya S. Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC algorithms for the treatment of the pressure-velocity coupling in steady flow problems // Numer. Heat Transfer Appl. 1986. V. 10. Pp. 209–228. DOI: 10.1080/10407788608913517
- [27] Borisoglebskiy I.K., Metusova M.V., Mikhaylenko C.I. The dependence of the Ranque–Hilsch effect on the cold outlet geometry // Multiphase Systems. 2018. V. 13, No. 3. Pp. 52–58 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2018.3.008



## Элементы теории вынужденного перемешивания нефтей в резервуарах<sup>1</sup>

Шагапов В.Ш.\* , Галиакбарова Э.В.\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

Для подготовки к транспортировке на нефтепромыслах смешивают легкие и тяжелые нефти с помощью струйных смесителей, представляющих собой устройства с инжектированием, которые устанавливаются в приемораздаточном патрубке внутри резервуара. В работе рассмотрена простейшая технологическая схема перемешивания. Представлены основные уравнения, описывающие процессы смешения легкой и тяжелой нефтей в смесителе, в котором поток легкой нефти является рабочим потоком, а поток исходной в резервуаре тяжелой нефти – инжектируемым потоком. Получено характеристическое уравнение смесителя. Представлена система уравнений, описывающая траекторию осевой линии струи, изменения состава нефти и средней скорости вдоль струи. Рассмотрен пример смесителя, используемого на практике в резервуаре типа РВС 2000. На основе характеристического уравнения по известным значениям перепада давления рабочего и инжектируемого потоков, а также по соотношению сечений рабочего сопла и выходного сечения камеры смешения найден коэффициент инжекции смесителя. Представлены расчетные графики характеристик турбулентной затопленной струи в нефтепромысловом резервуаре хранения нефти. Из графиков следует: 1) происходит полное выравнивание концентраций инжектируемой смеси нефти и тяжелой нефти, находящейся в резервуаре; 2) скорость струи снижается на расстоянии порядка нескольких метров до значения, превышающего минимальную промышленную скорость известную из практики ликвидации донных отложений. Основная роль смесителя при перемешивании нефтей заключается в том, что за счет инжекции тяжелой нефти из резервуара образуются принудительные циркуляционные потоки, исключающие образование застойных зон, выпадение в осадок твердых малоподвижных отложений.

**Ключевые слова:** струйный смеситель, характеристическое уравнение, затопленная струя

### 1. Введение

Большинство месторождений России находится на поздней стадии разработки, поэтому добываемая из них нефть — низкого качества с большим содержанием солей, кислот, асфальто-смолистых веществ, различных примесей [1]. В процессе сбора и хранения таких нефтей в вертикальных резервуарах происходит выпадение осадков (механические

примеси, кристаллы парафины, песок, глина и т.д.) в виде твердых веществ — нефтешламов. Состав нефтешламов определяется качеством хранимой нефти. Средний уровень отложений нефтешламов составляет 6–18% от рабочего объема вертикальных резервуаров (типа РВС). Отметим, что годовые потери нефти за счет образования донных отложений в резервуарах составляют несколько процентов от добытого объема нефти [2]. Существующие методы очистки резервуаров от отложений на практике представляют собой не только трудоемкую и опасную работу, но также создают дополнительную экологическую нагрузку при хранении этих отложений. В то же время, доставка таких нефтей на нефтеперерабатывающие заводы при соответ-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Академии наук Республики Башкортостан (гражданско-правовой договор на выполнение научно-исследовательской работы № 0301200057819000040\_104987).

ствующей обработке может дать значительную долю полезного продукта. Поэтому перемешивание тяжелых нефтей с более легкими при их подготовке к транспортировке является актуальной проблемой. Разработаны устройства с инжектированием (струйные смесители) [3–8], позволяющие на практике эффективно проводить перемешивание нефтей в емкостях [9–12].

Задачи газожидкостного течения в различных технических устройствах рассмотрены в ряде работ, например, в работах [13, 14].

В настоящей работе представлена теоретическая модель циркуляционного перемешивания нефтей в емкостях с использованием данных опытно-промышленных испытаний струйных смесителей.

## 2. Перемешивание в струйном смесителе: допущения, основные уравнения

Рассмотрим вертикальный резервуар хранения нефти, оборудованный входным узлом в виде струйного смесителя [3–8] (рис. 1). Смеситель состоит из следующих конструктивных элементов: участок между сечениями 0–2 — рабочая камера, 1 — сечение инжектируемого потока, участок 3–4 — камера смешения.

Предполагается введение во входной патрубке смесителя нефти более легкой, чем нефть, первоначально заполняющая резервуар (тяжелая нефть). В смесителе поток закачиваемой легкой нефти является рабочим потоком, а поток исходной тяжелой нефти в резервуаре — инжектируемым потоком. Обозначим верхними индексами ( $i$ ) параметры инжектируемого потока нефти, ( $a$ ) — параметры рабочего потока нефти. В силу того, что плотности легкой и тяжелой нефтей составляют примерно  $\rho^{(a)} = 840 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho^{(i)} = 910 \text{ кг/м}^3$ , то относительная разница между плотностями таких жидкостей не более 10% ( $(\rho^{(i)} - \rho^{(a)})/\rho^{(i)} \leq 10^{-1}$ ), поэтому для расчетных характеристик смесителя будем пренебрегать этой разницей ( $\rho^{(a)} \approx \rho^{(i)} = \rho$ ).

На рис. 1 смеситель расположен на глубине  $h^{(i)}$  под свободной поверхностью, поэтому статическое давление равно  $p^{(i)} = p_a + \rho g h^{(i)}$ .

Запишем основные уравнения, описывающие динамические процессы при взаимодействии жидкостей в рабочей камере смесителя:

$$\begin{aligned} S_0^{(a)} w_0^{(a)} &= S_2^{(a)} w_2^{(a)}, \\ p_0^{(a)} + \rho \frac{w_0^{(a)2}}{2} &= p_2^{(a)} + \rho \frac{w_2^{(a)2}}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $S$  — площадь сечения;  $w$  — скорость смеси;

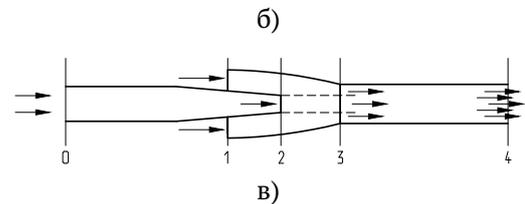
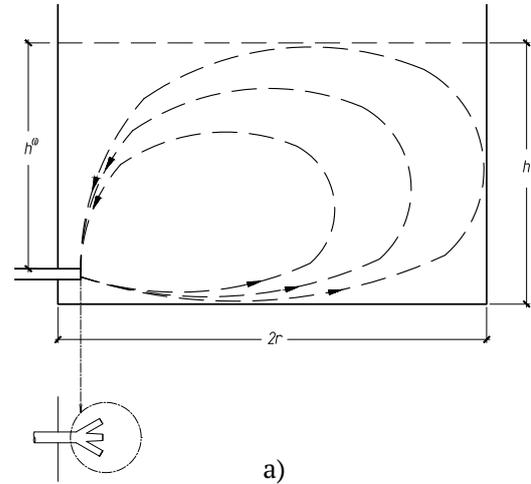


Рис. 1. Струйный смеситель в резервуаре: а) макет работы смесителя; б) монтаж в резервуаре РВС; в) схема смесителя с одним инжекционным устройством

на начальном участке 1–3 камеры смешения:

$$\begin{aligned} S_1^{(i)} w_1^{(i)} &= S_3^{(i)} w_3^{(i)}, \\ p_1^{(i)} + \rho \frac{w_1^{(i)2}}{2} &= p_3^{(i)} + \rho \frac{w_3^{(i)2}}{2}; \end{aligned} \quad (2)$$

в цилиндрической части (3–4) камеры смешения:

$$\begin{aligned} M_2^{(a)} w_2^{(a)} + M_3^{(i)} w_3^{(i)} - (M_2^{(a)} + M_3^{(i)}) w_4^{(i)} &= \\ = (p_4^{(i)} - p_2^{(a)}) S_2^{(a)} + (p_4^{(i)} - p_2^{(i)}) S_1^{(i)} & \\ (M_2^{(a)} = \rho S_2^{(a)} w_2^{(a)}, \quad M_3^{(i)} = \rho S_1^{(i)} w_1^{(i)}, & \\ M_2^{(a)} + M_3^{(i)} = \rho S_4^{(i)} w_4^{(i)}, & \end{aligned} \quad (3)$$

где  $M$  — массовый расход смеси.

После несложных преобразований уравнений (1)–(3) получено уравнение характеристик смесителя

$$\frac{\Delta p^{(i)}}{\Delta p^{(a)}} = 2\varphi_2^{(a)^2} \left( \frac{1}{n-1} + \left( \frac{k}{n-1} \right)^2 - \frac{(1+k)^2}{n(n-1)} \right), \quad (4)$$

где  $\Delta p^{(a)} = p_0^{(a)} - p_2^{(a)}$  – перепад давления, создаваемый рабочим потоком;  $\Delta p^{(i)} = p_4^{(i)} - p_2^{(i)}$  – перепад давления, создаваемый инжектируемым потоком;  $k = M^{(i)} / M^{(a)}$  – коэффициент инжекции;  $n = S_4^{(i)} / S_2^{(a)}$  – соотношение сечений;  $\varphi_2^{(a)} = 0.95$  – коэффициент скорости по [15].

Коэффициент полезного действия смесителя определяется как доля мощности, потребляемая им на инжекцию

$$\eta = \frac{M^{(i)} \Delta p^{(i)}}{M^{(a)} (\Delta p^{(a)} - \Delta p^{(i)})} = \frac{k \frac{\Delta p^{(i)}}{\Delta p^{(a)}}}{\left( 1 - \frac{\Delta p^{(i)}}{\Delta p^{(a)}} \right)}. \quad (5)$$

### 3. Перемешивание в резервуаре: допущения, основные уравнения

Струя нефти (смесь исходной тяжелой и закачиваемой легкой), поступающая из смесителя в резервуар, перемешивается с окружающей ее тяжелой нефтью и, за счет сил плавучести, происходит подъем осевой линии более легкой струи вверх. Используя гипотезы и аналитические формулы из [16, 17], запишем уравнения, описывающие процесс перемешивания, а также определим траекторию осевой линии струи. Примем зависимость текущего радиуса  $R$  струи от длины  $l$  в соответствии с теорией турбулентных струй [17]:

$$R(l) = 0.22l. \quad (6)$$

Уравнения сохранения масс и импульсов для смеси нефтей в струе следующие:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dl} &= J \quad (M = \rho S w, \quad S = \pi R^2), \\ \frac{d}{dl}(M w P) &= 0, \quad \frac{d}{dl}(M w Q) = (\rho^{(i)} - \rho) S g \\ \left( P = \frac{dx}{dl} = \cos \theta, \quad Q = \frac{dy}{dl} = \sin \theta, \right. \\ &\left. P^2 + Q^2 = 1 \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\rho$  – средняя плотность для сечения струи с координатой  $l$ ;  $J$  – интенсивность поступления нефти в струю через ее границу отнесенная на единицу длины по оси струи;  $\theta$  – угол наклона между касательной к траектории оси струи и осью  $x$ .

На начальном этапе процесса инжекции плотность смешенной нефти равна

$$\rho = \frac{(1+k)\rho^{(i)}}{\rho^{(i)}/\rho^{(a)} + k}, \quad (8)$$

где  $k$  – текущее значение коэффициента инжекции в струе, зависящее от  $l$ .

Для определения состава смеси нефтей можно ввести массовую концентрацию инжектируемой нефти  $c$ , связанную с плотностью смеси следующим выражением:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{c}{\rho^{(i)}} + \frac{(1-c)}{\rho^{(a)}}. \quad (9)$$

При этом  $k$  и  $c$  будут связаны как  $c = k / (1+k)$ .

Для интенсивности  $J$ , согласно решению [18] для радиального потенциального течения внешней жидкости в струю примем выражение

$$J = \pi R \sin(\alpha/2) \rho^{(i)} w, \quad (\sin(\alpha/2) = 0.22). \quad (10)$$

Запишем начальные условия для системы уравнений (6)–(10):

$$\begin{aligned} l &= l^{(l)}, \quad R^{(l)} = 0.22l^{(l)}, \\ k &= k^{(l)}, \quad w = w^{(l)}, \quad x = y = 0, \\ P &= \cos \theta_0^{(l)}, \quad Q = \sin \theta_0^{(l)}, \\ \rho &= \rho^{(l)}, \quad M = M^{(l)} = \rho^{(l)} S^{(l)} w^{(l)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\theta_0^{(l)}$  – угол наклона оси струи от горизонтального направления на выходе из смесителя.

Система уравнений (6)–(10) с начальными условиями (11) представляет собой задачу Коши для функций  $x(l)$ ,  $y(l)$ , определяющих траекторию оси струи, а также для  $k(l)$ ,  $w(l)$  (тем самым и  $c(l)$ ,  $M(l)$ ), описывающих закон изменения состава смеси, средней скорости вдоль струи.

### 4. Пример расчета смесителя

Рассмотрим пример смесителя, используемого в резервуаре типа РВС 2000 [9–12] для смешения легкой нефти (рабочая жидкость) с тяжелой нефтью (инжектируемая жидкость). Геометрические характеристики резервуара РВС 2000 следующие:  $h = 10$  м,  $r \approx 7.5$  м.

На входе в смеситель давление и массовый расход рабочей жидкости равны  $p_0^{(a)} = 3.6 \cdot 10^5$  Па и  $M^{(a)} = 80$  кг/с. Соотношение сечений для смесителя конструкции, представленной на рис. 1, равно  $n = S_4^{(i)} / S_2^{(a)} \approx 7.2$ .

В сечениях «0» и «2» скорости рабочей жидкости найдены по объемному расходу с учетом (1) и равны  $w_0^{(a)} \approx 1.4$  м/с и  $w_2^{(a)} \approx 26$  м/с.

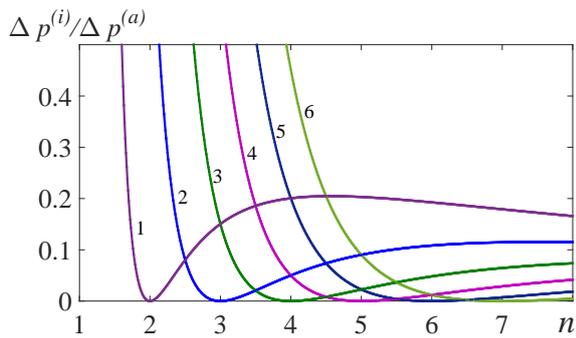


Рис. 2. Зависимость относительного перепада давления  $\Delta p^{(i)}/\Delta p^{(a)}$ , создаваемого струйным смесителем, от соотношения сечений  $n = S_4^{(i)}/S_2^{(a)}$ : кривые 1–6 соответствуют коэффициенту инжекции  $k = \overline{1,6}$

Перепад давления, создаваемый рабочей жидкостью, равен  $\Delta p^{(a)} \simeq 2.6 \cdot 10^5$  Па.

Из характеристического уравнения (4) найдена зависимость относительного перепада давления  $\Delta p^{(i)}/\Delta p^{(a)}$  от величины относительной площади  $n$  (рис. 2). По известному значению относительного перепада давления смесителя равного  $\Delta p^{(i)}/\Delta p^{(a)} \simeq 0.04$  и соотношения сечений равного  $n \simeq 7.2$  по графикам рис. 2 можем определить коэффициент инжекции, который равен  $k = 4$ . По формуле (5) посчитан коэффициент полезного действия  $\eta \simeq 0.2$ .

Плотность смешанной жидкости на начальном этапе инжекции при  $k = 4$  ( $\rho^{(i)} = 910$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho^{(a)} = 840$  кг/м<sup>3</sup>) по формуле (8) равна  $\rho^{(c)} = 895$  кг/м<sup>3</sup>.

Скорость смешанной жидкости на выходе из смесителя в резервуар (сечение «4» рис. 1(в)) равна  $w_4^{(i)} \simeq 10$  м/с.

На рис. 3 представлены траектории осевой линии и структура струи по результатам численного интегрирования системы уравнений (6)–(10) при начальных условиях (11). Для величин параметров, определяющих выходное сечение струи, скорости и состава смеси приняты следующие значения:  $R^{(l)} \simeq 10$  см,  $\theta_0^{(l)} = 0$ ,  $w^{(l)} = 10$  м/с,  $k^{(l)} = 4$ . Из рисунка следует, что искривление траектории из-за сил плавучести незначительно. В турбулентной струе, истекающей из смесителя, происходит полное выравнивание концентраций инжектируемой смеси нефти с концентрацией тяжелой нефти, находящейся в резервуаре. Особо следует отметить, что скорость струи снижается на расстоянии примерно семи метров до значения, превышающего минимальную промышленную скорость, препятствующую выпадению твердых отложений в осадок и

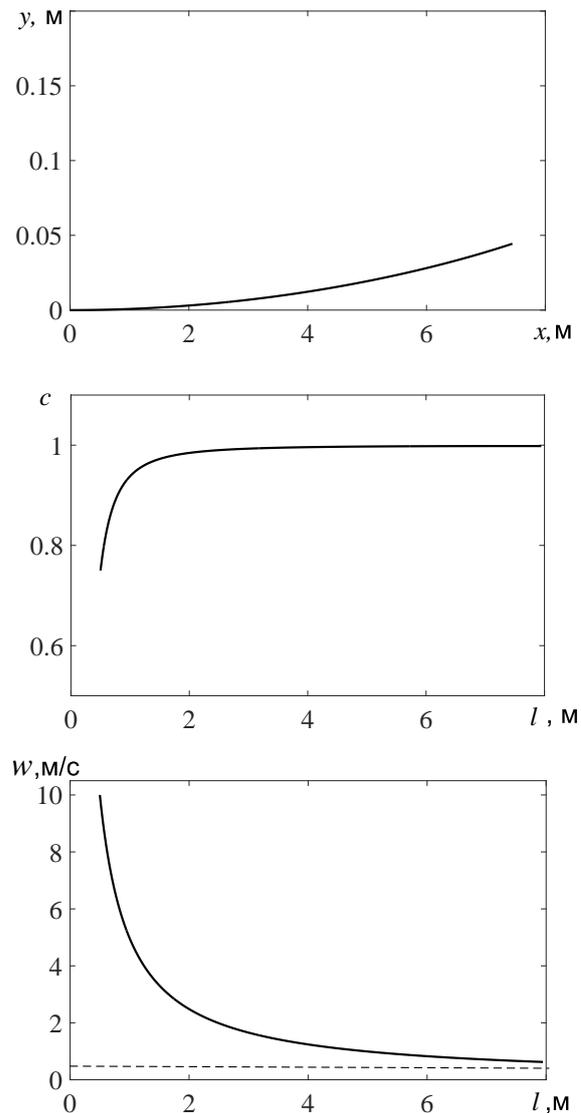


Рис. 3. Траектории и структура турбулентной струи, выходящей из струйного смесителя в резервуар (пример в п. 4). Пунктирная линия соответствует минимальной промышленной скорости (пояснения в тексте)

равную 0.2 м/с (известно из практики ликвидации донных отложений [1, 2]).

## 5. Заключение

Для уменьшения осадконакопления в резервуарах хранения нефти на промыслах, куда поступают тяжелая и легкая нефти, необходимо установить во входной узел резервуара струйный смеситель (устройство с инжектированием). В этом случае смешение происходит в рабочей зоне смесителя и в резервуаре при взаимодействии турбу-

лентных струй с окружающей жидкостью. Также за счет инжекции жидкости из емкости образуются вынужденные циркуляционные потоки, разрушающие застойные зоны. Скорость турбулентной затопленной струи, достигающей противоположной стенки емкости, должна быть не меньше значения минимальной промышленной скорости равной 0.2 м/с, известной из практики борьбы с донными отложениями в резервуарах хранения нефти.

## Список литературы

- [1] Коршунов Е.С., Едигаров С.Г. Промысловый транспорт нефти и газа. М.: Недра, 1975. 296 с.
- [2] Кононов О.В., Мастобаев Б.Н., Галиакбаров В.Ф. Анализ и классификация существующих способов борьбы с отложениями в нефтяных емкостях. Уфа: Реактив, 2010. 40 с.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19613136>
- [3] Галиакбаров В.Ф., Салихова Ю.Р., Галиакбаров М.Ф., Галиакбаров И.М. Устройство для перемешивания жидкостей в резервуарах. Патент на изобретение 2189852 РФ, В01F 5/04. Оpubл. 27.09.2002. Бюл. № 27.  
<http://www.fzeepatent.ru/patents/2189852>
- [4] Галиакбаров В.Ф., Галиакбарова Э.В., Яхин Б.А. Смеситель для резервуаров. Патент на полезную модель № 161351 РФ, В01F 5/00. Оpubл. 20.04.2016. Бюл. № 11.  
<https://www1.fips.ru/Archive/PAT/2016FULL/2016.04.20/DOC/RUNWU1/000/000/000/161/351/DOCUMENT.PDF>
- [5] Галиакбаров В.Ф., Галиакбарова Э.В., Яхин Б.А. Струйный смеситель для резервуаров. Патент на изобретение № 2594023 РФ, В01F 5/00. Оpubл. 10.08.2016. Бюл. № 22.  
<https://www1.fips.ru/Archive/PAT/2016FULL/2016.08.10/DOC/RUNWC1/000/000/002/594/023/DOCCLAIM.PDF>
- [6] Галиакбарова Э.В., Галиакбаров В.Ф. Смеситель для резервуаров. Патент на полезную модель № 174231 РФ, В01F 5/00. Оpubл. 09.10.2017. Бюл. № 28.  
<https://new.fips.ru/publication-web/publications/document?type=doc&tab=IZPM&id=276159E7-6B71-4D96-8077-7810A7DBA5D0>
- [7] Галиакбарова Э.В., Галиакбаров В.Ф. Смеситель для резервуаров. Патент на полезную модель № 176188 РФ, В01F 5/00. Оpubл. 11.01.2018. Бюл. № 2.  
<https://new.fips.ru/publication-web/publications/document?type=doc&tab=IZPM&id=C8AD7E44-4283-4191-B06C-3C86FA1C5F44>
- [8] Галиакбарова Э.В., Галиакбаров В.Ф. Смеситель для резервуаров. Патент на полезную модель № 185847 РФ, В01F 5/00. Оpubл. 19.12.2018. Бюл. № 35.  
<https://new.fips.ru/publication-web/publications/document?type=doc&tab=IZPM&id=9052FDEB-A374-4137-875B-1D4705D0B9F3>
- [9] Галиакбарова Э.В., Валявин Г.Г., Галиакбаров В.Ф. Внедрение усовершенствованного струйного гидравлического смесителя для поддержания пожарной безопасности и эффективной работы резервуарных парков // Нефтегазовое дело. 2014. Т. 12, № 5. С. 151–161.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=22459745>
- [10] Галиакбарова Э.В., Бахтизин Р.Н., Галиакбаров В.Ф., Надршин А.С. Безопасное и энергетически эффективное исключение осадконакопления при хранении нефти в резервуарных емкостях // Нефтегазовое дело. 2015. Т. 13, № 4. С. 140–46.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=25838012>
- [11] Галиакбарова Э.В., Бахтизин Р.Н., Галиакбаров В.Ф. Использование струйных гидравлических смесителей для интенсификации процессов подготовки нефти к переработке // Нефтегазовое дело. 2016. Т. 14, № 1. С. 145–149.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=27203032>
- [12] Галиакбарова Э.В., Бахтизин Р.Н., Галиакбаров В.Ф., Сухарев К.В. Энергетически эффективное снижение количества донных отложений при хранении нефти в резервуарных емкостях // Нефтегазовое дело. 2016. Т. 14, № 2. С. 114–119.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=27216418>
- [13] Насибулаев И.Ш., Насибулаева Э.Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66.  
DOI: 10.21662/uim2017.1.009
- [14] Кильдибаева С.Р., Гималтдинов И.К. Теоретическая модель накопления углеводородов в куполе с учетом гидратообразования, лимитирующегося теплообменом // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2019. Т. 330, № 2. С. 167–174.  
DOI: 10.18799/24131830/2019/2/117
- [15] Соколов Е.Я., Зингер Н.М. Струйные аппараты. Москва: Энергоатомиздат, 1989. 352 с.
- [16] Шагапов В.Ш., Гудкова О.С. Распространение парогазокапельных струй в атмосфере // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37, № 3. С. 313–321.
- [17] Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. М.: Наука. 1984. 720 с.
- [18] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Физматлит. Т. 6. 2001. 736 с.



## Elements of the theory of forced mixing of oils in tanks

Shagapov V.Sh. \*, Galiakbarova E.V.\*\*

\*Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

\*\*Ufa State Petroleum Technological University, Ufa

To prepare for transportation at the fields, light and heavy oils are mixed with the help of jet mixers, which are injection devices that are installed in the receiving and distributing nozzle inside the tank. The work considers the simplest technological mixing scheme. The basic equations are presented that describe the processes of mixing light and heavy oils in a mixer, in which the light oil stream is the working stream, and the source stream in the heavy oil tank is the injected stream. The characteristic equation of the mixer is obtained. A system of equations is presented that describes the trajectory of the center line of the jet, changes in oil composition and average velocity along the jet. An example of a mixer, which is used in practice in a reservoir of the PBC 2000 type, is considered. Based on the characteristic equation for the known pressure drop of the working and injected flows, as well as the ratio of the sections of the working nozzle and the output section of the mixing chamber, the mixer injection coefficient is found. The calculated graphs of the characteristics of a turbulent flooded jet in an oil field oil storage tank are presented. From the graphs it follows: 1) there is a complete alignment of the concentration of the injected oil mixture with the concentration of heavy oil in the tank; 2) the speed of the jet decreases at a distance of the order of several meters to a value exceeding the minimum fishing speed known from the practice of liquidating bottom sediments. The main role of the mixer when mixing oils is that due to the injection of heavy oil from the reservoir, forced circulation flows are formed that exclude the formation of stagnant zones and the precipitation of solid inactive deposits.

**Keywords:** jet mixer, characteristic equation, flooded stream

### References

- [1] Korshunov E.S., Edigarov S.G. Oil and gas field transport. M.: Nedra. 1975. 296 p. (in Russian)
- [2] Kononov O.V., Mastobaev B.N., Galiakbarov V.F. Analysis and classification of existing methods of dealing with sediment in oil tanks. Ufa: Reagent. 2010. 40 p. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19613136>
- [3] Galiakbarov V.F., Salikhova Yu.R., Galiakbarov M.F., Galiakbarov I.M. A device for mixing liquids in tanks. Patent 2189852 of the Russian Federation, B01F 5/04. Publ. 09/27/2002. Bull. No 27.  
<http://www.freepatent.ru/patents/2189852>
- [4] Galiakbarov V.F., Galiakbarova E.V., Yahin B.A. The mixer for tanks. Patent 161351 of the Russian Federation, B01F 5/00. Publ. 04/20/2016. Bull. No 11.  
<https://www1.fips.ru/Archive/PAT/2016FULL/2016.04.20/DOC/RUNWU1/000/000/000/161/351/DOCUMENT.PDF>
- [5] Galiakbarov V.F., Galiakbarova E.V., Yahin B.A. Jet mixer for tanks. Patent 2594023 of the Russian Federation, B01F 5/00. Publ. 08/10/2016. Bull. No 22.  
<https://www1.fips.ru/Archive/PAT/2016FULL/2016.08.10/DOC/RUNWC1/000/000/002/594/023/DOCCLAIM.PDF>
- [6] Galiakbarova E.V., Galiakbarov V.F. The mixer for tanks. Patent 174231 of the Russian Federation, B01F 5/00. Publ. 10/09/2017. Bull. No 28.  
<https://new.fips.ru/publication-web/publications/document?type=doc&tab=IZPM&id=276159E7-6B71-4D96-8077-7810A7DBA5D0>
- [7] Galiakbarova E.V., Galiakbarov V.F. The mixer for tanks. Patent 176188 of the Russian Federation, B01F 5/00. Publ. 01/11/2018. Bull. No 2.  
<https://new.fips.ru/publication-web/publications/document?type=doc&tab=IZPM&id=C8AD7E44-4283-4191-B06C-3C86FA1C5F44>
- [8] Galiakbarova E.V., Galiakbarov V.F. The mixer for tanks. Patent 185847 of the Russian Federation, B01F 5/00. Publ. 12/19/2018. Bull. No 35.  
<https://new.fips.ru/publication-web/publications/document?type=doc&tab=IZPM&id=9052FDEB-A374-4137-875B-1D4705D0B9F3>
- [9] Galiakbarova E.V., Valyavin G.G., Galiakbarov V.F. Introduction of an improved jet hydraulic mixer for maintaining fire safety and effective work tank farm // Oil and gas business. 2014. V. 12, No 5. Pp. 151–161. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=22459745>
- [10] Galiakbarova E.V., Bakhtizin R.N., Galiakbarov V.F., Nadrshin A.S. Safe and energy-efficient accumulation of deposits when storing oil in tanks // Oil and gas business. 2015. V. 13, No 4. Pp.140–146. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=25838012>

- [11] Galiakbarova E.V., Bakhtizin R.N. Galiakbarov V.F. Use jet hydraulic mixer for intensification of the process preparation of oil to processing // Oil and gas business. 2016. V. 14, No 1. Pp. 145–149. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=27203032>
- [12] Galiakbarova E.V., Bakhtizin R.N. Galiakbarov V.F., Sukharev K.V. Energetically effective sea floor sediments quantity reduction at oil storage in tanks // Oil and gas business. 2016. V. 14, No 2. Pp. 114–119. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=27216418>
- [13] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. Fluid flow through the hydraulic resistance with a dynamically variable geometry // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. 2017. 12(1). 59–66. (in Russian)  
DOI: 10.21662/uim2017.1.009
- [14] Kildibaeva S.R., Gimaltdinov I.K. Theoretical model for hydrocarbon accumulation in a dome taking into account condensation, limited by heat transfer // Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering. 2019. V. 330, No 2. Pp. 167–174. (in Russian)  
DOI: 10.18799/24131830/2019/2/117
- [15] Sokolov E.Ya., Singer N.M. Inkjet apparatus. M.: Energoatomizdat. 1989. 352 p. (in Russian)
- [16] Shagapov V.Sh., Gudkova O.S. Spread of vapor-gas-droplet plumes in the atmosphere // Izvestiya. Atmospheric and oceanic physics. 2001. V. 37, No. 3. Pp. 290–297.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=13377069>
- [17] Abramovich G.N. Theory of turbulent jets. M.: Science. 1984. 720 p. (in Russian)
- [18] Landau L.D., Lifshits E.M. Theoretical physics. Hydrodynamics. M.: Fizmatlit. T. 6. 2001. 736 p. (in Russian)



## Моделирование процесса ослабления сферического взрыва применением водной пены<sup>1</sup>

Болотнова Р.Х.\* , Гайнуллина Э.Ф.\* , Нурисламова Э.А.\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Башкирский государственный университет, Уфа

Представлена двухфазная модель динамического поведения сухой водной пены под воздействием сильной ударной волны в предположении, что пенная структура при ударном нагружении разрушается на взвесь монудисперсных микрокапель с формированием газокапельной смеси. Система уравнений модели водной пены включает законы сохранения массы, импульса и энергии каждой фазы в соответствии с однодавленческим, двухскоростным, двухтемпературным приближениями в трехмерной постановке с учетом сил межфазного сопротивления Шиллера–Наумана и межфазного контактного теплообмена Ранца–Маршалла. Термодинамические свойства воздуха и воды, составляющих газокапельную смесь, описаны уравнениями состояния Пенга–Робинсона и Ми–Грюнайзена. Наличие неравномерного по высоте процесса синерезиса водной пены, обусловленного гравитационными силами, учитывалось заданием распределения объемного содержания воды в пене. Дополнительный учет процесса синерезиса контролировался при расчете интенсивности сил межфазного сопротивления по модели Шиллера–Наумана введением параметра, зависящего от распределения по пространству начального водосодержания пены. Сферический взрыв моделировался в форме ударно-волнового импульса, энергия которого совпадала с энергией заряда взрывчатого вещества, используемого в экспериментах. Численное решение поставленной задачи реализовано с использованием открытого программного комплекса OpenFOAM на основе двухшагового вычислительного алгоритма PIMPLE. Численное решение задачи, полученное на основе предложенной модели газокапельной смеси, удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными по сферическому взрыву в водной пене. Дан анализ динамики сферической ударной волны при ее прохождении сквозь водную пену. Исследованы причины значительного снижения амплитуды и скорости распространения ударных волн в изучаемой среде.

**Ключевые слова:** сферическая ударная волна, водная пена, пакет OpenFOAM, численное моделирование

### 1. Введение

Изучение демпфирующих свойств водных пен при динамическом воздействии на основе математического и численного моделирования при согласовании с данными экспериментальных исследований представляет большую научную и практическую значимость, поскольку существен-

ное снижение интенсивности и скорости распространения ударного импульса позволяет использовать водную пену в качестве мобильного средства шумоподавления и защиты от взрывов высокой интенсивности.

Демпфирующие свойства пузырьковых сред и структур из водной пены исследовались в работах [1–11]. В [1, 2] рассмотрены особенности динамики одномерных плоских ударных волн (УВ) в пузырьковых средах и газожидкостных смесях. В [3–5] моделировался сферический взрыв в газе и водной пене в одномерном приближении с использованием метода сквозного счета с учетом псевдовязкости Неймана–Рихтмайера в условиях, соответствующих экспериментальным данным [6].

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 17–41–020582-р\_а), гранта Республики Башкортостан молодым ученым № 8 ГР и средств государственного бюджета по госзаданию 0246–2019–0052.

В [7–10] изучалось взаимодействие воздушного сферического импульса давления с барьером из водной пены в двумерном осесимметричном приближении с использованием метода подвижных лагранжевых сеток [7, 8] и пакета OpenFOAM [9–11].

В настоящей работе продолжается изучение процессов, сопровождающих сферический взрыв в водной пене, начатое в [3–5], с более детальным учетом влияния сил межфазного сопротивления и контактного теплообмена. Уточненная модель водной пены численно реализована в виде нового решателя на основе программного комплекса OpenFOAM [12].

## 2. Уравнения модели

Система уравнений, моделирующая поведение водной пены при динамическом нагружении, состоит из уравнений сохранения массы, импульса и энергии для каждой фазы в предположении равенства давлений фаз, в случае двухскоростного и двухтемпературного приближений [13]:

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i \vec{v}_i) = -\alpha_i \nabla p + \operatorname{div}(\alpha_i \vec{\tau}_i) + \vec{F}_i, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i (e_i + K_i))}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i (e_i + K_i) \vec{v}_i) = \\ = -p \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_i \vec{v}_i p) + \\ + \operatorname{div}(\alpha_i \gamma_{i,eff} (\nabla h_i)) + K_{ht} (T_i - T_j), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha_i$  — объемное содержание;  $\rho_i$  — плотность;  $t$  — время;  $\vec{v}_i$  — вектор скорости;  $e_i$  — внутренняя энергия;  $K_i$  — кинетическая энергия;  $p$  — давление;  $h_i$  — энтальпия;  $K_{ht}$  — коэффициент теплообмена;  $T_i$  — температура;  $i, j = 1, 2$  — обозначения жидкой и газовой фаз.

Система уравнений (1)–(3) включает следующие выражения для используемых функций:

$\vec{\tau}_i$  — тензор вязких напряжений

$$\vec{\tau}_i = \mu_i (\nabla \vec{v}_i + \nabla \vec{v}_i^T) - \frac{2}{3} (\mu_i \operatorname{div} \vec{v}_i) I,$$

где  $\mu_i$  — динамическая вязкость;  $I$  — единичный тензор;

$\vec{F}_i$  — плотность межфазных сил [13]

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,drag} + \vec{F}_{i,vm};$$

$\vec{F}_{i,drag}$  — сила межфазного сопротивления

$$\vec{F}_{i,drag} = \frac{3}{4} \alpha_1 C_D \frac{\rho_2}{d_{10}} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) |\vec{v}_i - \vec{v}_j|;$$

$\vec{F}_{i,vm}$  — сила присоединенных масс

$$\vec{F}_{i,vm} = 0.5 \alpha_1 \rho_2 \left( \frac{d_i \vec{v}_i}{dt} - \frac{d_j \vec{v}_j}{dt} \right);$$

$\gamma_{i,eff}$  — эффективная температуропроводность  $i$ -й фазы

$$\gamma_{i,eff} = \frac{c_{p,i}}{c_{V,i}} \gamma_i,$$

где  $c_{p,i}$ ,  $c_{V,i}$  — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме.

Коэффициент теплообмена  $K_{ht}$  определен в соответствии с моделью Ранца–Маршалла [14]:

$$K_{ht} = \frac{\kappa_2 \operatorname{Nu}}{d_{10}}, \quad \operatorname{Nu} = 2 + 0.6 \operatorname{Re}^{1/2} \operatorname{Pr}^{1/3},$$

где  $\kappa_i$  — теплопроводность;  $\operatorname{Nu}$ ,  $\operatorname{Pr}$ ,  $\operatorname{Re}$  — числа Нуссельта, Прандтля и Рейнольдса соответственно.

В настоящей работе неравномерность процесса осаждения (синерезиса) пены, приводящего к потере водосодержания в верхних слоях пены, учтена в выражении, отвечающем за интенсивность сил межфазного сопротивления по модели Шиллера–Наумана [15], введением в коэффициент  $C_D$  параметра  $c_s(\alpha_{10})$ , зависящего от распределения по пространству водосодержания в водной пене:

$$C_D = \frac{c_s(\alpha_{10})(1 + 0.15 \operatorname{Re}^{0.687})}{\operatorname{Re}}, \quad \operatorname{Re} \leq 1000. \quad (4)$$

Для уравнения состояния воздуха принята форма Пенга–Робинсона [16]:

$$p = \frac{RT_2}{V_m - b} - \frac{a(T_2)}{V_m(V_m + b) + b(V_m - b)}, \quad (5)$$

в которой

$$\begin{aligned} a = 0.45724 \frac{R^2 T_c^2}{p_c} \lambda(T_r, \omega), \quad b = 0.07780 \frac{RT_c}{p_c}, \\ \lambda = (1 + \theta(1 - T_r^{0.5}))^2, \quad T_r = \frac{T_2}{T_c}, \\ \theta = 0.37464 + 1.54226\omega - 0.26992\omega^2, \end{aligned}$$

где  $T_c$ ,  $p_c$  — критические значения температуры и давления для воздуха;  $V_m$  — молярный объем;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $\omega$  — ацентрический фактор.

Свойства воды описываются уравнением состояния в форме Ми–Грюнайзена [17]:

$$p = (\gamma_1 - 1)\rho_1 e_1 - \gamma_1 p^*, \quad e_1 = c_{V,1} T_1 + \frac{p^*}{\rho_1}, \quad (6)$$

где  $p^* = 6 \cdot 10^8$  Па,  $\gamma_1 = 4.4$  – числовые параметры для воды.

При описании поведения водной пены в процессе ее взаимодействия с сильной УВ используется модель газожидкостной смеси, поскольку предполагается, что пенная структура разрушается на монодисперсные микрокапли [18] с диаметром  $d_{10} = 8 \cdot 10^{-4}$  м.

### 3. Анализ результатов

В ходе численного моделирования были выполнены расчеты динамики УВ в условиях эксперимента [6] по сферическому взрыву заряда взрывчатого вещества (ВВ) в сухой водной пене с начальным объемным содержанием воды  $\alpha_{10} = 0.0083$ . Схема экспериментальной установки изображена на рис. 1: в центре цилиндрического сосуда объемом  $\approx 8$  м<sup>3</sup> на высоте 1.5 м подвешено ВВ PLANP массой 145 г. Сосуд заполняется водной пеной, после чего заряд ВВ приводится в действие с помощью детонатора. Энергия создаваемого в эксперименте взрыва оценивается, как  $Q \approx 0.8$  МДж [5]. Датчики, измеряющие давление в УВ, закреплены на различных высотах и расстояниях от центра взрыва таким образом, чтобы отраженные от окружающих поверхностей волны не оказывали влияния на результаты измерений (см. рис. 1).

Исследуемая задача решалась в следующей постановке: в центре сферы радиуса 2 м, заполненной водной пеной, моделировался взрыв в виде импульса с начальным распределением давления:

$$p(x, y, z) = p_0 + \Delta p e^{-(x^2+y^2+z^2)/a^2}, \quad (7)$$

где  $\Delta p = 3000$  МПа,  $p_0 = 0.1$  МПа,  $a = 0.035$  м.

Для уменьшения неустойчивости в численных расчетах центр взрыва изолировался сферической областью радиуса 0.04 м, на поверхности которой задавалось граничное условие жесткой стенки.

Система уравнений (1)–(6) была численно решена с использованием нового решателя, полученного в среде пакета OpenFOAM на основе вычислительного алгоритма PIMPLE.

Поскольку расположение датчиков в эксперименте различается не только расстоянием до центра взрыва, но и по высоте (см. рис. 1), для каждого из датчиков решалась своя задача, учитывающая индивидуальное распределение плотности водной пены в зависимости от интенсивности процесса синерезиса, возникающего за счет влияния

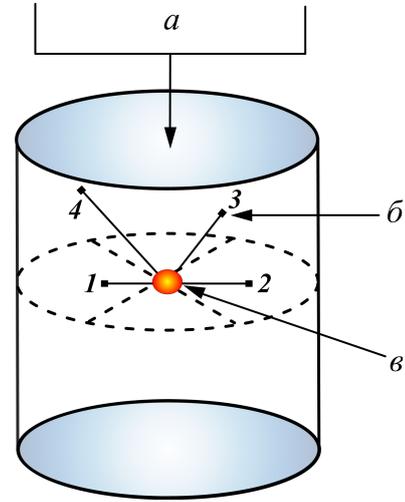


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: а – зарядка пены, б – датчики 1 – 4, в – заряд ВВ

гравитации. Для датчиков 1 и 2, расположенных в одной горизонтальной плоскости на расстоянии  $l_1 = 0.41$  и  $l_2 = 0.53$  м от центра взрыва и фиксирующих ударно-волновой импульс при  $t < 1.5$  мс (см. рис. 1), действие силы тяжести будет равномерным и, следовательно, начальное объемное водосодержание  $\alpha_{10} = 0.0083$  в этом случае не зависит от расстояния до точки взрыва (см. штриховые красные линии на рис. 2). Однако для датчиков 3 и 4, которые закреплены выше центра взрыва и расположены от него на расстояниях  $l_3 = 0.67$  и  $l_4 = 0.93$  м, важно учитывать уменьшение водосодержания пены по высоте, обусловленное ее синерезисом. В расчетах, моделирующих распространение УВ в направлении датчиков 3 и 4, начальное распределение объемного водосодержания в пене  $\alpha_{10}$  задавалось в виде убывающей функции, которая снижается от максимального значения  $\alpha_{10} = 0.0083$  в центре взрыва до величин  $\alpha_{10} = 0.002$  и  $\alpha_{10} = 0.001$  для положений датчиков 3 и 4 соответственно. На рис. 2 сплошной линией красного цвета показана зависимость распределения начального объемного водосодержания пены от расстояния до датчиков 3 и 4.

При расчете сил межфазного сопротивления (4) в модели учитывалось влияние на вязкость процесса синерезиса, контролируемого зависимостью параметра  $c_s$  от водосодержания  $\alpha_{10}$ : чем больше начальное водосодержание в пене, тем больше ее вязкость и тем сильнее действие сил межфазного сопротивления. На рис. 2 линиями синего цвета обозначены значения коэффициента  $c_s$  в зависи-

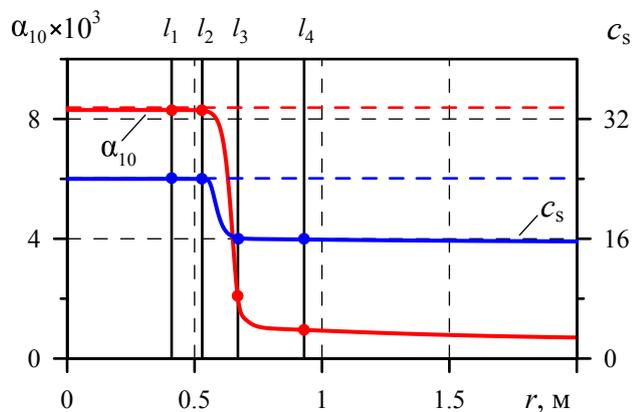


Рис. 2. Распределения начального объемного водо- содержания пены  $\alpha_{10}$  и параметра  $c_s(\alpha_{10})$  в зависимости от расстояния до центра взрыва;  $l_1, \dots, l_4$  – местоположения датчиков

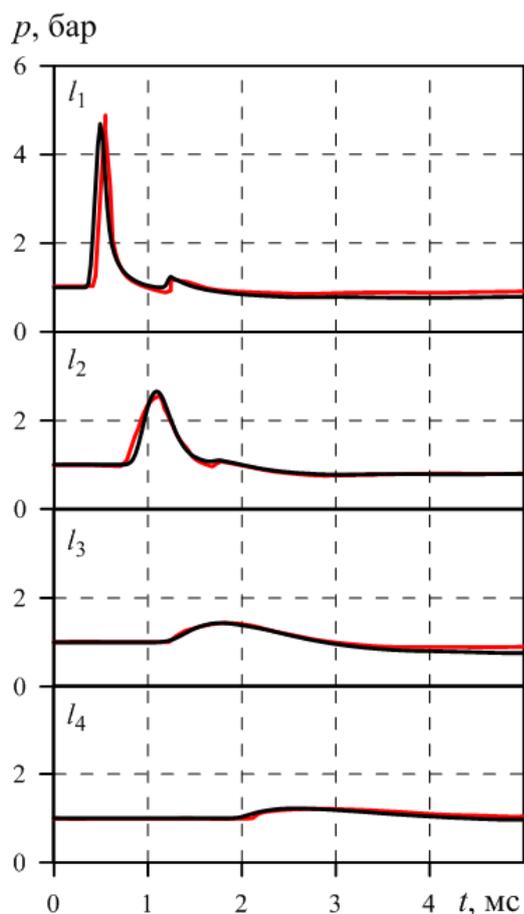


Рис. 3. Динамика давления в пене в местоположениях датчиков  $l_1, \dots, l_4$ ; черная линия – расчеты, красная линия – экспериментальные данные [6]

мости от расстояния до центра взрыва: значение  $c_s$ , равное 24 на датчиках 1 и 2 (штриховая линия), уменьшается до  $c_s = 16$  в местоположении датчиков 3 и 4 (сплошная линия).

На рис. 3 представлены результаты численного моделирования сферического взрыва в водной пене в виде расчетных и экспериментальных временных зависимостей давления, фиксируемых датчиками 1–4, расположенными на расстояниях  $l_1, \dots, l_4$  от точки взрыва. Профили давления, полученные в ходе численного моделирования, и экспериментальные данные [6] обозначены линиями черного и красного цвета соответственно.

Амплитуда сферического импульса давления, равная в начальный момент времени  $p = 30000$  бар (7), в результате взаимодействия с водной пеной ослабевает до 5 бар к моменту прихода УВ к датчику 1 при  $t = 0.5$  мс. Как в эксперименте, так и в расчетах фиксируется двухволновая структура ударного импульса в положениях первых двух датчиков: за основным пиком давления следует второй пик, являющийся следствием отражения волны разрежения от центра взрыва. По мере распространения УВ вглубь пены импульс давления ослабевает и двухволновая структура фронта «размывается» под воздействием сил межфазного сопротивления и контактного теплообмена, что наблюдается на расчетных и экспериментальных зависимостях, полученных на датчиках 3 и 4. Сравнительный анализ расчетов и экспериментальных данных [6] (см. рис. 3) показывает их хорошее согласование.

#### 4. Заключение

Проведено численное моделирование и исследование процесса распространения в водной пене сферической УВ, сформированной в результате взрыва ВВ, для условий экспериментов [6]. При исследовании динамики УВ в водной пене использовалась предложенная модель газокапельной смеси, учитывающая силы межфазного взаимодействия, контактный теплообмен и влияние синерезиса водной пены, обусловленного гравитационными силами. Численное моделирование исследуемой задачи выполнено на основе открытого пакета OpenFOAM. Сравнение численных решений, полученных для временных зависимостей давления и экспериментальных осциллограмм давления в точках установки датчиков, показало их хорошее согласование по скорости распространения и амплитуде ударно-волнового импульса. Проведен анализ причин диссипации энергии УВ в водной пене, приводящих к ее значительному затуханию.

## Список литературы

- [1] Болотнова Р.Х., Галимзянов М.Н., Агишева У.О. Моделирование процессов взаимодействия сильных ударных волн в газожидкостных смесях // Известия ВУЗов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2011. № 2. С. 3–14. [https://izvuz\\_fmnn.pnzgu.ru/files/izvuz\\_fmnn.pnzgu.ru/1211.pdf](https://izvuz_fmnn.pnzgu.ru/files/izvuz_fmnn.pnzgu.ru/1211.pdf)
- [2] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Topolnikov A.S., Buzina V.A., Agisheva U.O. Nonlinear Effects In Bubbly Liquid With Shock Waves // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2012. Vol. 6, No. 8. Pp. 1095–1102. <https://waset.org/publications/14192/nonlinear-effects-in-bubbly-liquid-with-shock-waves>
- [3] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Численное моделирование сферического взрыва в пене // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 60–65. DOI: 10.21662/uim2016.1.009
- [4] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Исследование демпфирующих свойств водной пены под воздействием сферической ударной волны // Известия ВУЗов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2. С. 108–121. DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-9
- [5] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Влияние теплообменных процессов на снижение интенсивности сферического взрыва в водной пене // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 468–477. DOI: 10.1134/S0032823519030020
- [6] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // Shock Waves. 2013. Vol. 23, No. 1 Pp. 39–53. DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0
- [7] Болотнова Р.Х., Агишева У.О. Пространственное моделирование динамики газожидкостной пены на подвижных лагранжевых сетках в условиях ударно-волнового воздействия // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2014. № 3. С. 427–440. [http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom\\_2014/pdf/v15r138.pdf](http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2014/pdf/v15r138.pdf)
- [8] Агишева У.О., Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Коробчинская В.А. Особенности вихреобразования при воздействии импульса давления на газовую область, ограниченную пенным слоем // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 47–55. DOI: 10.1134/S0015462816060053
- [9] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Исследование осесимметричных волновых течений при взаимодействии сферического ударного импульса с барьером из водной пены // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12. № 2. С. 238–243. DOI: 10.21662/uim2017.2.036
- [10] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Особенности воздействия сферического импульса давления на границу газа с водной пеной // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 3. С. 364–372. DOI: 10.20537/vm180307
- [11] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Wave dynamics and vortex formation under the impact of a spherical impulse on the boundary between gas and aqueous foam // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1268. 012015. DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012015
- [12] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox. <http://www.openfoam.com>
- [13] Zeno Tacconi. Feasibility analysis of a two-fluid solver for cavitation and interface capturing as implemented in OpenFOAM // Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Energetica, Politecnico di Milano. 2018. 134 p. <https://www.politesi.polimi.it/handle/10589/139684>
- [14] Ranz W.E., Marshall W.R. Evaporation from Drops // Chem. Eng. Prog. 1952. Vol. 48, No. 22. P. 141–146. <http://dns2.asia.edu.tw/~ysho/YSH0-English/1000%20CE/PDF/Che%20Eng%20Pro48,%20141.pdf>
- [15] Schiller L., Naumann Z. A Drag Coefficient Correlation // Z. Ver. Deutsch. Ing. 1935. Vol. 77. P. 40–65.
- [16] Peng D.Y., Robinson D.B. A new two-constant equation of state // Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals. 1976. Vol. 15. P. 59–64. DOI: 10.1021/i160057a011
- [17] Jolgam S., Ballil A., Nowakowski A., Nicolleau F. On Equations of State for Simulations of Multiphase Flows // Proceedings of the World congress on Engineering. 2012. Vol. III. [http://www.iaeng.org/publication/WCE2012/WCE2012\\_pp1963-1968.pdf](http://www.iaeng.org/publication/WCE2012/WCE2012_pp1963-1968.pdf)
- [18] Ждан С.А. Численное моделирование взрыва заряда ВВ в пене // ФГВ. 1990. Т. 26. № 2. С. 103–110. <https://elibrary.ru/item.asp?id=30555610>



## Modeling of the spherical explosion attenuation process using aqueous foam

Bolotnova R.Kh.\* , Gainullina E.F.\* , Nurislamova E.A.\*\*

\*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

\*\*Bashkir State University, Ufa, Russia

The two-phase model of dry aqueous foam dynamic behavior under the strong shock wave influence is presented under assumption that the foam structure under shock loading is destroyed into a suspension of monodispersed microdrops with the formation of a gas-droplet mixture. The system of equations for the model of aqueous foam includes the laws of conservation of mass, momentum and energy for each phase in accordance with the single-pressure, two-speed, two-temperature approximations in a three-dimensional formulation, taking into account the Schiller–Naumann interfacial drag force and the Ranz–Marshall interfacial contact heat transfer. The thermodynamic properties of air and water forming a gas-droplet mixture are described by the Peng–Robinson and Mie–Grüneisen equations of state. The presence of non-uniform process in height of aqueous foam syneresis, which is due to gravitational forces, is taken into account by setting the distribution of the liquid volume fraction in the foam. An additional consideration of the syneresis process during calculating the intensity of interphase drag forces according to the Schiller–Naumann model was controlled by introducing the parameter depending on the spatial distribution of the initial liquid volume fraction of the foam. The spherical explosion is modeled in the form of the shock wave pulse whose energy coincided with the charge energy of the HE used in the experiments. The problem numerical solution is implemented using the OpenFOAM free software package based on the two-step PIMPLE computational algorithm. The numerical solution of the problem, obtained on the basis of the proposed gas-droplet mixture model, is in satisfactory agreement with the experimental data on a spherical explosion in aqueous foam. The analysis of the spherical shock wave dynamics while its propagation through aqueous foam is given. The causes of the significant decrease in the amplitude and velocity shock waves propagation in the medium under study are investigated.

**Keywords:** spherical shock wave, aqueous foam, OpenFOAM package, numerical modeling

### References

- [1] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Agisheva U.O. [Simulation of a strong shock wave interaction process in gas liquid mixtures] [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011. No. 2. Pp. 3–14 (in Russian). [https://izvuz\\_fm.npzgu.ru/files/izvuz\\_fm.npzgu.ru/1211.pdf](https://izvuz_fm.npzgu.ru/files/izvuz_fm.npzgu.ru/1211.pdf)
- [2] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Topolnikov A.S., Buzina V.A., Agisheva U.O. Nonlinear Effects In Bubbly Liquid With Shock Waves // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2012. Vol. 6, No. 8. P. 1095–1102. <https://waset.org/publications/14192/nonlinear-effects-in-bubbly-liquid-with-shock-waves>
- [3] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. [The numerical modeling of spherical explosion in the foam] *Trudy Instituta Mexaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo Nauchnogo Centra Rossijskoj Akademii Nauk* [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics]. 2016. V. 11, No. 1. Pp. 60–65 (in Russian). DOI: 10.21662/uim2016.1.009
- [4] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. [A research of damping properties of aqueous foam under the impact of spherical shock waves] *Izvestiya VUZov. Povolzhskij Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017. No. 2. Pp. 108–121 (in Russian). DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-9
- [5] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Influence of Heat-exchange Processes on Decreasing an Intensity of a Spherical Explosion in Aqueous Foam // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54, Suppl. 7. Pp. S71–S78. DOI: 10.1134/S0015462819070024
- [6] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // *Shock Waves*. 2013. Vol. 23, No. 1 P. 39–53. DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0

- [7] Bolotnova R.Kh., Agisheva U.O. [Spatial modeling of water foam dynamics with moving Lagrangian grids under shock wave impact] *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye: novye vychislitel'nye tekhnologii* [Numerical methods and Programming]. 2014. No. 3. Pp. 427–440 (in Russian).  
[http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom\\_2014/pdf/v15r138.pdf](http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2014/pdf/v15r138.pdf)
- [8] Agisheva U.O., Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F., Korobchinskaya V.A. Features of Vortex Formation under the Impact of a Pressure Pulse on a Gas Region Bounded by the Foam Layer // *Fluid Dynamics*. 2016. V. 51, No. 6. P. 757–766.  
DOI: 10.1134/S0015462816060053
- [9] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. [Investigation of axisymmetric wave flows under interaction of a spherical impact pulse with a barrier of aqueous foam] *Trudy Instituta Mexaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo Nauchnogo Centra Rossijskoj Akademii Nauk* [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics]. 2017. V. 12, No. 2. Pp. 238–243 (in Russian).  
DOI: 10.21662/uim2017.2.036
- [10] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Features of the impact of spherical shock impulse on the boundary of gas with aqueous foam *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mexanika. Komp'yuternye Nauki* [The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science]. 2018. V. 28, No. 3. Pp. 364–372 (in Russian).  
DOI: 10.20537/vm180307
- [11] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Wave dynamics and vortex formation under the impact of a spherical impulse on the boundary between gas and aqueous foam // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. Vol. 1268. 012015.  
DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012015
- [12] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox.  
<http://www.openfoam.com>
- [13] Zeno Tacconi. Feasibility analysis of a two-fluid solver for cavitation and interface capturing as implemented in OpenFOAM // *Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Energetica, Politecnico di Milano*. 2018. 134 p.  
<https://www.politesi.polimi.it/handle/10589/139684>
- [14] Ranz W.E., Marshall W.R. Evaporation from Drops // *Chem. Eng. Prog.* 1952. Vol. 48, No. 22. P. 141–146.  
<http://dns2.asia.edu.tw/~ysho/YSH0-English/1000%20CE/PDF/Che%20Eng%20Pro48,%20141.pdf>
- [15] Schiller L., Naumann Z. A Drag Coefficient Correlation // *Z. Ver. Deutsch. Ing.* 1935. Vol. 77. P. 40–65.
- [16] Peng D.Y., Robinson D.B. A new two-constant equation of state // *Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals*. 1976. Vol. 15. P. 59–64.  
DOI: 10.1021/i160057a011
- [17] Jolgam S., Ballil A., Nowakowski A., Nicolleau F. On Equations of State for Simulations of Multiphase Flows // *Proceedings of the World congress on Engineering*. 2012. Vol. III.  
[http://www.iaeng.org/publication/WCE2012/WCE2012\\_pp1963-1968.pdf](http://www.iaeng.org/publication/WCE2012/WCE2012_pp1963-1968.pdf)
- [18] Zhdan S.A. Numerical modeling of the explosion of a high explosive (HE) charge in foam // *Combust., Explos., Shock Waves*. 1990. V. 26. No. 2. Pp. 221–227.  
DOI: 10.1007/BF00742416



## Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер<sup>1</sup>

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В настоящей работе представлена обобщенная математическая модель и проведены численные исследования задачи акустического рассеяния от множества сфер на случай сфер, сквозь поверхность которых проходит волна и центры которых расположены на одной оси (на случай звукопроницаемых и коаксиальных сфер), при прохождении сферической волны от монополюсного источника излучения, произвольно расположенного в пространстве. При решении уравнений Гельмгольца для данной задачи адаптирована численная техника, основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени. Сравнение различных подходов к усечению бесконечных рядов в разложении показало следующее: результат с хорошей степенью точности с помощью одного расчета дает подход, основанный на усечении всех рядов при фиксированном числе в каждом разложении, а при необходимости получения результата с определенной степенью точности — подход, основанный на сравнении двух последовательных значений суммы ряда. Проведен численный параметрический анализ распределения давления внутри и вне сфер для различных значений их радиусов, физических характеристик внешней и внутренней сред, числа сфер, расстояний между центрами сфер, частоты воздействия и расположения монополюсного источника излучения. Показано, что при определенных значениях параметров возможно появление зон понижения или повышения давления за звукопроницаемыми сферами. Полученные результаты позволят в дальнейшем проводить тестовые расчеты для верификации общего численного алгоритма для случая множества произвольно расположенных в пространстве сфер.

**Ключевые слова:** акустическое рассеяние, звукопроницаемая сфера, монополюсный источник излучения, число усечения ряда

### 1. Введение

При взаимодействии акустической волны с препятствиями малых размеров, отличающихся плотностью и/или сжимаемостью от основной среды, появляются дополнительные (рассеянные) волны, распространяющиеся во все стороны от препятствий. Данное явление называют рассеянием (дифракцией) звука и его изучение является одной из важнейших задач акустики, поскольку на

нем основываются многие практические применения акустических волн, такие как гидролокация, приборы неразрушающего контроля, медицинские сканеры, зондирования атмосферы и океана и т.п. Поэтому задача акустического рассеяния от препятствий малых размеров при внешних воздействиях является актуальной. Цель настоящей работы — исследование рассеяния акустической волны от звукопроницаемых сфер (сфер, через границу которых может проходить волна) с центрами, расположенными на одной оси, при наличии монополюсного источника излучения.

Настоящая работа обобщает математическую модель, представленную в работе [1], где рассмотрен случай пары звуконепрозрачных сфер (т.е. случай твердых сфер) с произвольным акустиче-

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке средств государственного бюджета по госзаданию № 0246-2019-0052, РФФИ (грант № 17-41-020582-р\_а) и АН РБ (договор № 40/9).

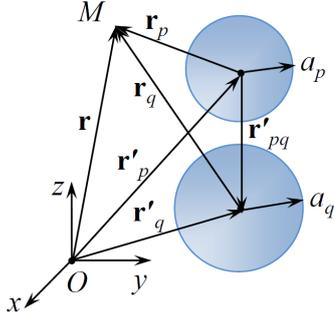


Рис. 1. Обозначения в разных системах отсчета для коаксиальных сфер

ским импедансом произвольно расположенных в пространстве при воздействии монополюсного источника излучения. Также обобщена методика расчета [2], основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов и минимизировать машинное время.

## 2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматриваются  $N$  сфер различных радиусов  $a_1, a_2, \dots, a_N$  с центрами в координатах  $\mathbf{r}'_p = (x'_p, y'_p, z'_p)$  ( $p = \overline{1, N}$ ), расположенных в бесконечном трехмерном пространстве, которое заполнено однородной идеальной средой, характеризующейся плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$  (см. рис. 1). Предполагается, что центры сфер неподвижны и находятся на одной оси (случай коаксиальных сфер); сами сферы звукопроницаемы и волна внутри них распространяется в другой однородной идеальной среде с плотностью  $\rho_p$  и скоростью звука  $c_p$ ; радиальное движение сферической поверхности отсутствует, т.е. сферическая поверхность является неподвижной. Таким образом, в данной постановке рассматриваются только рассеянные от внешнего источника излучения волны на сферических препятствиях, через поверхность которых волна может проходить.

Задача рассеяния звука от звукопроницаемых сфер сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала  $\psi(\mathbf{r})$  в произвольной точке  $\mathbf{r}$  [3, 4]:

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности  $p$ -й сферы  $S_p = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p| = a_p\}$ , сквозь которую

проходит волна:

$$\begin{aligned} (\psi(\mathbf{r}) - \psi_p^{\text{int}})|_{S_p} &= 0, \\ \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial \psi_p^{\text{int}}}{\partial r} \right) \Big|_{S_p} &= 0, \quad p = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (1) и (2)  $k_0$  — волновое число для внешней среды;  $\psi_p^{\text{int}}$  — комплексный потенциал внутри  $p$ -й сферы, который также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, но с волновым числом  $k_p$  для среды внутри этой сферы:

$$\nabla^2 \psi_p^{\text{int}} + k_p^2 \psi_p^{\text{int}} = 0.$$

При решении данной задачи потенциал внешнего поля представляется в форме

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}),$$

где  $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$  — потенциал падающего поля;  $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$  — потенциал поля рассеяния, который должен удовлетворять условию излучения Зоммерфельда, соответствующему уходящим на бесконечность волнам (данное условие выделяет единственное решение уравнения (1) в классе обобщенных функций в неограниченной области):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik_0 \psi_{\text{scat}} \right) = 0, \quad (3)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Для решения уравнения Гельмгольца (1) с граничными условиями (2) была обобщена численная техника [2], разработанная для случая звукопроницаемых сфер с произвольным комплексным сопротивлением. Данная техника основана на быстром методе мультиполей и позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени. Если в качестве оси  $Oz$  выбрать ось с центрами этих сфер, то задача становится осесимметричной и, без ограничения общности задачи, можно выбрать начало отсчета в центре 1-ой сферы, а в качестве плоскости  $Oyz$  взять плоскость, содержащую ось  $Oz$  и монополюсный источник излучения.

Далее вводятся системы отсчета, связанные с центрами сфер, и осуществляется переход к сферической системе координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p = \mathbf{r}_p = (r_p, \theta_p, \varphi_p)$  ( $p = \overline{1, N}$ ). На рис. 1 схематично представлены обозначения, используемые при разложении. Тогда разложение потенциала рассеянного поля может быть представлено в форме

$$\begin{aligned}\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) &= \sum_{p=1}^N \psi_p(\mathbf{r}) = \\ &= \sum_{p=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^{(p)m} S_n^m(\mathbf{r}_p),\end{aligned}$$

где  $\psi_p(\mathbf{r})$  — потенциал поля рассеяния, вызванного  $p$ -й сферой, но с учетом влияния всех остальных сфер (является регулярным вне  $p$ -й сферы и удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда (3));  $A_n^{(p)m}$  — неизвестные коэффициенты разложения по мультиполям;  $S_n^m(\mathbf{r}_p) = h_n(kr_p)Y_n^m(\theta_p, \varphi_p)$  — мультиполь порядка  $n$  и степени  $m$ ;  $h_n(kr)$  — сферические функции Ханкеля 1-го типа, удовлетворяющие условию Зоммерфельда;  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  — ортогональные сферические гармоники.

Разложение потенциала падающего поля около  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_p$  в ряд регулярных фундаментальных решений будет иметь вид:

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_p) R_n^m(\mathbf{r}_p), \quad (4)$$

где  $C_n^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_p)$  — коэффициенты разложения;  $R_n^m(\mathbf{r}_p) = j_n(kr_p)Y_n^m(\theta_p, \varphi_p)$  — регулярные фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах, связанные с  $p$ -й сферой;  $j_n(kr)$  — сферические функции Бесселя 1-го типа.

Разложение потенциала поля внутри  $p$ -й сферы имеет следующий вид:

$$\psi_p^{\text{int}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_n^{(p)m} j_n(kr_p) Y_n^m(\theta_p, \varphi_p),$$

где  $E_n^{(p)m}$  — неизвестные коэффициенты.

Вид специальных функций  $h_n(z)$ ,  $j_n(z)$ ,  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  известен и представлен, например, в справочнике [5].

На следующем этапе проводится повторное разложение по мультиполям. Для этого берется  $q$ -я сфера и около нее ( $|\mathbf{r}_q| \leq |\mathbf{r}'_p - \mathbf{r}'_q|$ , где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_q$  — центр сферы) мультиполи  $S_n^m(\mathbf{r})$  ( $p \neq q$ ) разлагаются повторно в ряд регулярных фундаментальных решений:

$$S_n^m(\mathbf{r}_p) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq}) R_l^s(\mathbf{r}_q)$$

( $p, q = \overline{1, N}$ ;  $p \neq q$ ). Здесь  $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq})$  — коэффициенты перехода при повторном разложении. Поскольку задача является осесимметричной, последнюю формулу можно упростить. Так как коэффициенты повторного разложения в этом случае будут

зависеть только от относительного расположения центров сфер, а не от углов, то получим следующее выражение

$$S_n^m(\mathbf{r}_p) = \sum_{l=|m|}^{\infty} (S|R)_{ln}^m(r'_{pq}) j_l(kr_q) Y_l^m(\theta_q, \varphi_q)$$

( $p, q = \overline{1, N}$ ;  $p \neq q$ ), где коэффициенты повторного разложения определяются как

$$(S|R)_{ln}^m(r'_{pq}) = (S|R)_{ln}^{mm}(r'_{pq})$$

( $l, n = 0, 1, \dots$ ;  $m = -n, \dots, n$ ) и для них имеют место следующие равенства

$$(S|R)_{ln}^m(r'_{pq}) = (-1)^{l+n} (S|R)_{ln}^m(r'_{qp})$$

( $l, n = 0, 1, \dots$ ;  $m = -n, \dots, n$ ).

После представленных выше разложений потенциал подставляется в граничные условия (2) и в результате некоторых преобразований задача сводится к системе линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $A_n^{(q)m}$ . В случае осевой симметрии данная система может быть представлена в виде  $2m + 1$  независимых линейных систем (для каждого  $m$ ) в матричном виде:

$$\mathbf{L}^m \mathbf{A}^m = \mathbf{D}^m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где матрицы и вектора представляются как

$$\mathbf{L}^m = \{\mathbf{L}^{(qp)m}\}, \quad \mathbf{A}^m = \{\mathbf{A}^{(q)m}\}, \quad \mathbf{D}^m = \{\mathbf{D}^{(q)m}\}$$

( $q, p = \overline{1, N}$ ), элементы которых, в свою очередь, скомпонованы следующим образом:

$$\mathbf{L}^{(qp)m} = \{\mathbf{L}_{ln}^{(qp)m}\}, \quad \mathbf{A}^{(q)m} = \{\mathbf{A}_n^{(q)m}\}^T, \quad \mathbf{D}^{(q)m} = \{\mathbf{D}_n^{(q)m}\}^T$$

( $p, q = \overline{1, N}$ ;  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $l, n = |m|, |m + 1|, \dots$ ). Элементы матриц вычисляются по следующим формулам:

$$L_{ln}^{(qp)m} = \begin{cases} B_l (S|R)_{ln}^m(r'_{pq}), & p \neq q \\ \delta_{ln}, & p = q; \end{cases}$$

$$D_l^{(q)m} = -B_l C_l^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_q),$$

где введено следующее обозначение

$$B_l = \frac{j_l(k_0 a_q) j'_l(k_q a_q) - \kappa_q j'_l(k_0 a_q) j_l(k_q a_q)}{h_l(k_0 a_q) j'_l(k_q a_q) - \kappa_q h'_l(k_0 a_q) j_l(k_q a_q)}$$

с введенным параметром  $\kappa_q = \frac{k_0 / k_q}{\rho_0 / \rho_q}$ . В последних формулах знак «Т» — знак транспонирования;  $\delta_{ln}$  — символ Кронекера.

Осесимметричные коэффициенты  $(S|R)_{l|m}^m$  достаточно вычислить для  $l \geq n \geq m \geq 0$  благодаря соотношению симметрии:

$$(S|R)_{ln}^m = (S|R)_{ln}^{-m}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Процесс заполнения матрицы  $\{(S|R)_{l|m}^m\}$  является трудоемким и представлен в работе [6].

В случае монопольного источника излучения, расположенного в некоторой точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$ , падающее поле, соответствующее фундаментальному решению уравнения Гельмгольца, определяется по формуле

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -V_0 \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}, \quad (5)$$

где  $V_0$  — амплитуда объемной скорости (или производительность) монопольного источника. Здесь и далее опускается временной множитель  $e^{-i\omega t}$ , где  $\omega = k_0 c_0$  — угловая частота внешнего поля. Положение монопольного источника задается расстоянием от него до центра 1-й сферы  $d = |r_s - r'_1| = |r_s|$  и углом между осью  $Oz$  и вектором  $r_s - \theta_{r_s-r'_q} = \theta_s$ ; угол  $\varphi_{r_s-r'_q}$  будет равен  $\pi/2$  или  $-\pi/2$ .

Разложение функции (5) около центра  $q$ -й сферы  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_q$  может быть определено как (см., например, [2])

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -V_0 i k_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n S_n^{-m}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q) R_n^m(\mathbf{r}_q),$$

( $|\mathbf{r}'_q| \leq |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q|$ ). Сравнивая последнее выражение с разложением (4), получим

$$\begin{aligned} C_n^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_q) &= -V_0 i k_0 S_n^{-m}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q) = \\ &= -V_0 i k_0 h_n(k_0|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q|) Y_n^{-m}(\theta_{\mathbf{r}_s-\mathbf{r}'_q}, \varphi_{\mathbf{r}_s-\mathbf{r}'_q}). \end{aligned}$$

Граничное значение потенциала  $\psi$  на поверхности  $q$ -й сферы примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi|_{S_q} &= \frac{i\kappa_q}{(ka_q)^2} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{j_n(ka_q) A_n^{(q)m} Y_n^m(\theta_q, \varphi_q)}{j_n(ka_q) j'_n(ka_q) - \kappa_q j'_n(ka_q) j_n(ka_q)}. \end{aligned}$$

Для дальнейшей работы введем следующие функции.

Переходная функция  $H_1$ , измеренная в децибелах, определяется по формуле

$$H_1 = 20 \lg \left| \frac{\psi|_{S_q}}{\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}'_q)} \right| \quad (6)$$

и представляет собой отношение амплитуды акустического поля при особом расположении поверхности  $S_q$   $q$ -ой сферы к амплитуде падающего поля в

центре этой сферы. Функция модуля нормированного давления в произвольной точке  $\mathbf{r}$  задается как

$$H_2 = \left| \frac{p(\mathbf{r})}{p_{\text{in}}(\mathbf{r})} \right| = \begin{cases} \left| \frac{\psi}{\psi_{\text{in}}} \right|, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p| > a_p, \\ \left| \frac{\psi_p^{\text{int}}}{\psi_{\text{in}}} \right|, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p| < a_p, \end{cases} \quad (7)$$

поскольку связь между акустическим давлением и потенциалом определяется следующим образом:

$$p = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \rho_0 \psi,$$

следовательно, значения для давлений среды  $p(\mathbf{r})$  и падающего поля  $p_{\text{in}}(\mathbf{r})$  в произвольной точке пространства  $\mathbf{r}$  можно вычислять с помощью соответствующих формул для потенциалов с точностью до постоянной  $i\omega \rho_0$ .

### 3. Число усечения

При применении техники разложения по мультиполям важным является вопрос правильного выбора числа усечения  $M$  бесконечных рядов (см. рис. 2): при малом числе  $M$  точность расчетов будет низкой, а при большом — возрастет не только точность, но и время расчета. Выделяется два подхода к определению числа усечения:

- усечение рядов основывается на сравнении двух последовательных значений суммы ряда (при  $m = M$  и  $m = M + 1$ ) — как только их разность становится меньше некоторого значения  $\varepsilon$ , дальнейший расчет суммы ряда прекращается и принимается значение при  $m = M$  [7] (подход I);
- происходит усечение всех рядов при фиксированном числе  $M$  в каждом разложении (подход II).

При подходе II существуют две формулы для расчета числа усечения  $M$ :

$$M = \left[ k_0 a_p + \left( \ln \left( 2\sqrt{2} k_0 a_p \varepsilon^{-1} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \times \right. \\ \left. \times (k_0 a_p)^{\frac{1}{3}} / (2\sqrt{2}) + 1 \right], \quad (8)$$

вывод которой представлен, например, в работах [8] (для одиночного рассеяния) и [9] (для множественного рассеяния), и эвристические формулы

$$M = \begin{cases} \left[ e k_0 r'_{pq} \right] & \text{для малых } k_0 r'_{pq}, \\ \left[ \frac{1}{2} e k_0 r'_{pq} \right] & \text{для больших } k_0 r'_{pq}, \end{cases} \quad (9)$$

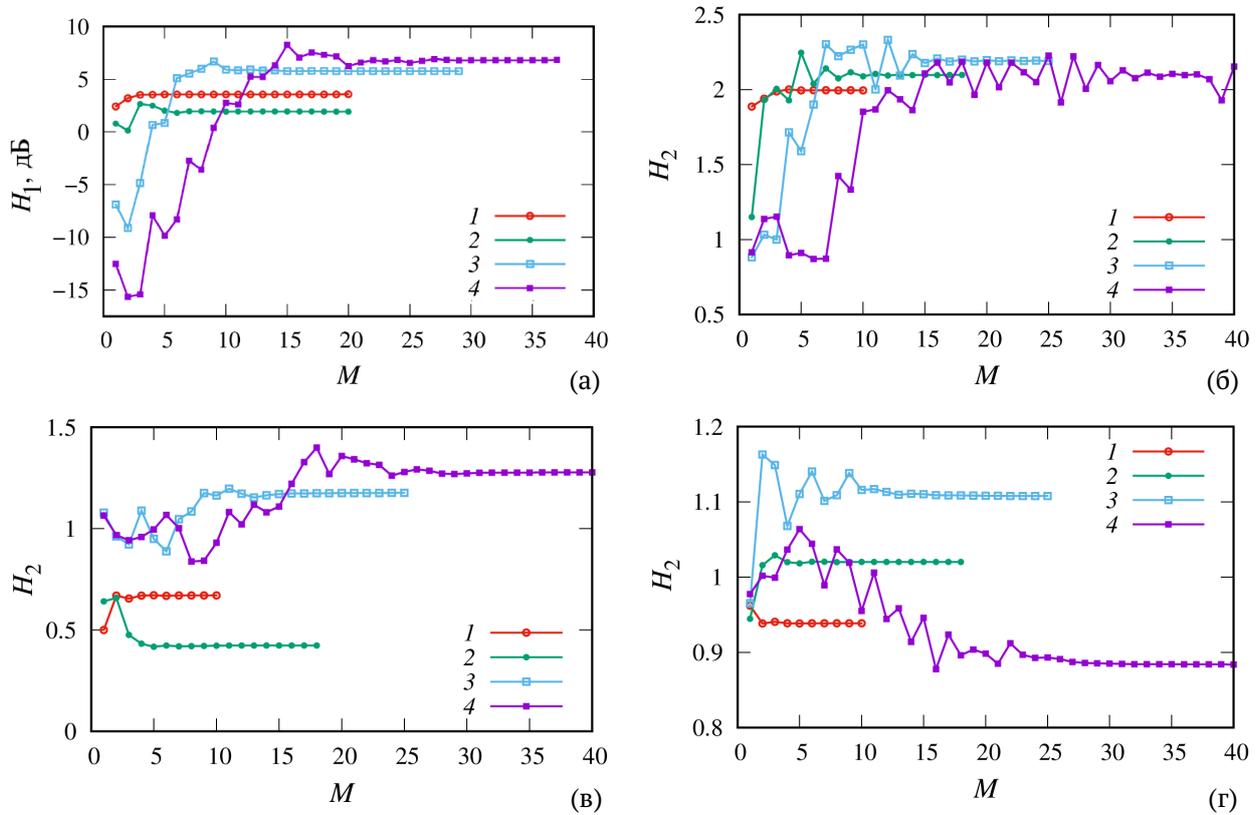


Рис. 2. Зависимости вычисленных значений функций  $H_1$  или  $H_2$  для двух капель воды в воздухе от числа усечения  $M$  для различных частот монопольного источника излучения (1 –  $f = 100$  кГц, 2 –  $f = 200$  кГц, 3 –  $f = 500$  кГц, 4 –  $f = 1$  МГц) в различных точках пространства: на поверхности 1-ой сферы в сферических координатах  $\varphi = 0^\circ$  и  $\theta = 60^\circ$  (а); в декартовых координатах, относительно 1-ой сферы,  $\mathbf{r}/a_1 = (0, 0, 0)$  (б);  $\mathbf{r}/a_1 = (0, -1.5, -1.5)$  (в);  $\mathbf{r}/a_1 = (0, 2, 1.5)$  (г)

представленные в работе [2]. В последних двух формулах  $[z]$  – целая часть числа  $z$ ;  $\epsilon$  – искомая ошибка, связанная с коэффициентами Фурье;  $e$  – число Эйлера.

На рис. 2 представлена зависимость функции  $H_1$  или  $H_2$  от числа усечения  $M$  для случая двух капель воды в воздухе радиусов  $a_1 = 585$  мкм и  $a_2 = 1.5a_1$  для различных значений частот  $f$  (соответственно, различных значений волнового радиуса  $ka_1$ ) и монопольного источника излучения, расположенного на одной оси с центрами сфер на расстоянии  $d = 10a_1$  от центра 1-ой сферы. На рис. 2(а) показаны результаты для переходной функции  $H_1$ , вычисленной по формуле (6) в точке на поверхности 1-ой сферы ( $q = 1$ ) со сферическими координатами  $\varphi = 0^\circ$  и  $\theta = 60^\circ$ , а на рис. 2(б)–(г) – для функции  $H_2$ , вычисленной по формуле (7) в точках пространства, имеющих в системе отсчета, связанной с 1-ой сферой, декартовы координаты  $(0, 0, 0)$  (т.е. в центре 1-ой сферы),  $(0, -1.5a_1, -1.5a_1)$ ,  $(0, 2a_1, 1.5a_1)$  соответственно.

Заметим, что на рис. 2(б) для  $f = 1$  МГц при значениях  $M > 38$  происходит резкий рост значений функции. Как было отмечено в работе [2], для некоторых чисел усечения при превышении значения  $M$ , определенного уравнением (9), могут возникнуть трудности, связанные с экспоненциальным ростом части членов в разложении, приводя к переполнению относительных ошибок. Объясняется это наличием сферических функций Ханкеля большого порядка  $h_n(k_0 r'_{pq})$ , входящих в матрицу переразложения системы, причем асимптотическое разложение этих функций при больших  $n$  и фиксированных  $k_0 r'_{pq}$  показывает, что рост начинается при  $n \approx ek_0 r'_{pq}/2$ , поэтому данное значение и легло в основу формулы (9). Таким образом, при возникновении данных трудностей необходимо экспериментально проверять результаты – по нескольким расчетам определять значение искомой функции до момента накопления ошибок расчета.

Таблица 1. Сравнение значений числа  $M$ , полученных с помощью различных подходов, для различных частот  $f$  внешнего поля

$f$ , кГц	$M_G$	$M_{Am}$	$M_a$	$M_b$	$M_c$	$M_d$
100	6	5	6	7	7	4
200	14	8	14	15	11	6
500	18	15	19	24	16	16
1000	36	20	31	36*	31	28

Рассмотрим значения числа  $M$ , полученные с помощью разных подходов. В табл. 1 для наглядности представлены следующие расчетные значения данной величины:  $M_G$  и  $M_{Am}$  определяются с помощью подхода II по формулам (9) и (8) (при  $\epsilon = 10^{-8}$ ) соответственно;  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$  и  $M_d$  — с помощью подхода I при относительной погрешности между последовательными расчетами  $\epsilon = 10^{-3}$  (для значения, отмеченного знаком «\*»  $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$ ) в точках пространства, данные для которых представлены на рис. 2(а)–(г) соответственно. Отметим, что для частот  $f = 100, 200, 500, 1000$  кГц значения  $k_0 r'_{12}$ , которые необходимы для корректного расчета по формуле (9), соответственно равны  $k_0 r'_{12} \approx 1.07, 2.14, 3.35, 10.71$ .

Анализ полученных данных показывает, что если необходимо получить значение искомой функции с помощью одного расчета с хорошей степенью точностью, то достаточно применения подхода II с формулой (9), поскольку формула (8) даже при  $\epsilon = 10^{-8}$  дает более грубый результат (в приведенном примере точность  $\epsilon = 10^{-3}$  не достигается даже для точек поверхности). Если же данные должны быть получены с определенной степенью точности, то необходимо применять подход I, однако расчеты можно начинать не с  $M = 1$ , а с величины  $M = \min(M_G, M_{Am})$ . Для предотвращения случая накопления ошибок, описанного выше, необходимо контролировать результат при значениях  $M > M_G$  — решение для точки определяется в момент его стабилизации до начала экспоненциального роста, даже если заданная точность не достигается. Так, например, для случая, представленного на рис. 2(б) при  $f = 1$  МГц, значение  $M$  может быть определено равным 36 (при  $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$ ), поскольку к этому моменту решение начало стабилизироваться, но до достижения заданной точности ( $\epsilon = 10^{-3}$ ) начинается экспоненциальный рост (при  $M > 38$ ).

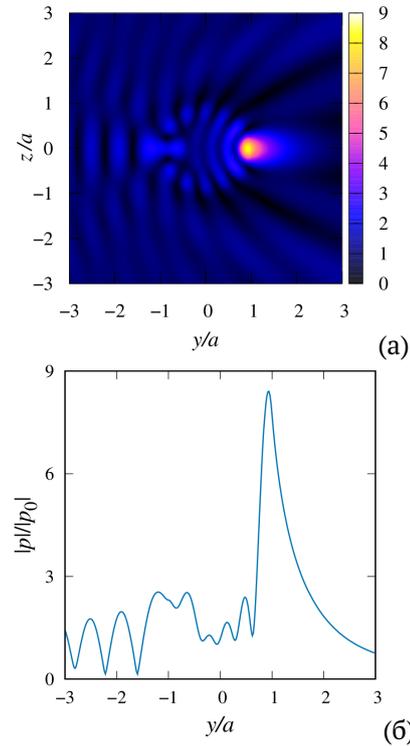


Рис. 3. Диаграмма распределения (а) и график (б) для нормированной амплитуды давления снаружи и внутри сферы:  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_0 = 1.5 \cdot 10^3$  м/с,  $\rho_1 = 1.1\rho_0$ ,  $c_1 = 0.95c_0$ ,  $a/\lambda = a/(c_0/f) = 0.9$ . Качественное сравнение с данными, приведенными в книге [4, рис. 8.10]

#### 4. Численные результаты

В результате численного моделирования были написаны программные коды на языке Fortran 90. Для вычисления специальных функций и их производных  $h_l(z)$ ,  $h'_l(z)$ ,  $j_l(z)$ ,  $P_l(z)$  были адаптированы программные коды [10], написанные на языке Fortran 77.

В предыдущей работе автора [1] было проведено сравнение результатов расчета для звукопроницаемой сферы с теоретическими и экспериментальными данными работы [7] и получено хорошее соответствие (максимальная относительная погрешность теоретических данных составляет не более  $10^{-2}\%$ ). В работе [11] сравнивались результаты расчетов, полученные для одиночной звукопроницаемой сферы, с экспериментальными данными работы [12] и также получено хорошее соответствие (максимальная относительная погрешность теоретических данных — не более 0.42%). На рис. 3 представлены результаты тестовых расчетов (значения физических и геометрических параметров системы приведены в подписи к рисунку) нормированного распределения давления вне и

внутри звукопроницаемой сферы для плоской падающей волны для сравнения с теоретическими данными, полученными в книге [4] и приведенными на рис. 8.10 данной работы; получено хорошее качественное согласование. Тестирование алгоритма аналогичного представленному в настоящей работе для случая двух звуконепроницаемых сфер (частный случай коаксиальных сфер при  $N = 2$ ) при наличии монополюсного источника излучения было проведено в работе [6], которое показало хорошее соответствие с результатами расчетов, представленных в работе [2]. Таким образом, тестовые расчеты, проведенные для случаев, которые представлены в аналогичных теоретических и экспериментальных (для одиночной сферы) работах, показывают корректность полученных по представленной методике данных.

Проведен численный параметрический анализ распределения давления внутри и вне коаксиальных сфер для различных значений их радиусов, физических характеристик рабочей жидкости (плотность и скорость звука), числа сфер, расстояний между их центрами, расположения (относительно фиксированной сферы) монополюсного источника излучения.

На рис. 4(а),(б) и 5 представлены диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг и внутри сфер в плоскости  $Oyz$  ( $x = 0$ ) с началом в центре 1-ой сферы и осью  $Oz$  (осью, на которой расположены центры данных сфер). Сами оси  $Oy$  и  $Oz$  на данных рисунках изображены белыми прямыми линиями.

На рис. 4 представлено распределение нормированного давления  $H_2$  для двух воздушных пузырьков в воде (рис. 4(а)) и двух капель воды в воздухе (рис. 4(б)) при излучении от монополюсного источника с радиус-вектором  $\mathbf{r}_s = (10a_1, \pi/2, \pi/2)$ , т.е. расположенного на оси  $Oy$  справа от 1-ой сферы. На рис. 4(в) показана нормированная амплитуда давления вдоль оси  $Oy$ : сплошная линия соответствует случаю, представленному на рис. 4(а), а штриховая — рис. 4(б). Расчеты были выполнены для следующих значений параметров системы:  $a_1 = 585$  мкм,  $a_2 = 1.5a_1$ ,  $f = 20$  кГц, расстояние между центрами сфер  $r'_{12} = 1.5a_1 + a_2$  (случай не соприкасающихся сфер).

На рис. 5 представлены три диаграммы распределения модуля нормированного давления для трех звукопроницаемых соприкасающихся сфер радиусов  $a_1 = 585$  мкм,  $a_2 = a_3 = 1.5a_1$  при различных значениях физических параметров окружающей (вода с  $\rho_0 = 998$  кг/м<sup>3</sup> и  $c_0 = 1484$  м/с или дихлорэтан с  $\rho_0 = 1253$  кг/м<sup>3</sup> и  $c_0 = 1034$  м/с) и внутренней (воздух с  $\rho_p = 1.205$  кг/м<sup>3</sup> и  $c_p = 343$  м/с или вода) сред и частоты  $f = 200$  кГц монополюсного источника, расположенного на расстоянии  $d = 10a_1$  от центра 1-ой сферы на оси, соединяющей центры этих сфер. Отметим, что у дихлорэтана плотность больше, а скорость звука меньше, чем в воде. Поскольку плотность воздуха много меньше плотности окружающей его жидкости, то воздушный пузырек в воде вне резонанса близок к мягкой твердой сфере, поэтому давление внутри него близко к нулевому (см. рис. 4(а) и (в) — сплошная линия).

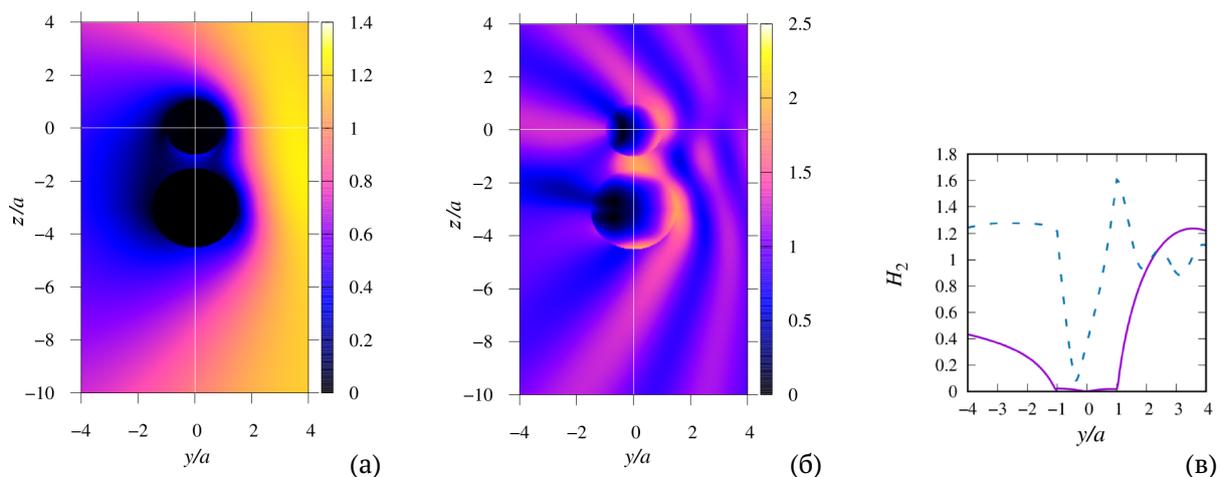


Рис. 4. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг пары сфер в случаях: воздушных пузырьков в воде (а) и капель воды в воздухе (б) при значении частоты  $f = 20$  кГц для монополюсного источника излучения, расположенного слева на оси  $Oy$  на расстоянии  $d = 10a_1$  от центра 1-ой сферы; нормированная амплитуда давления вдоль оси  $Oy$  для данных пузырьков (сплошная линия) и капель (штриховая линия) (в)

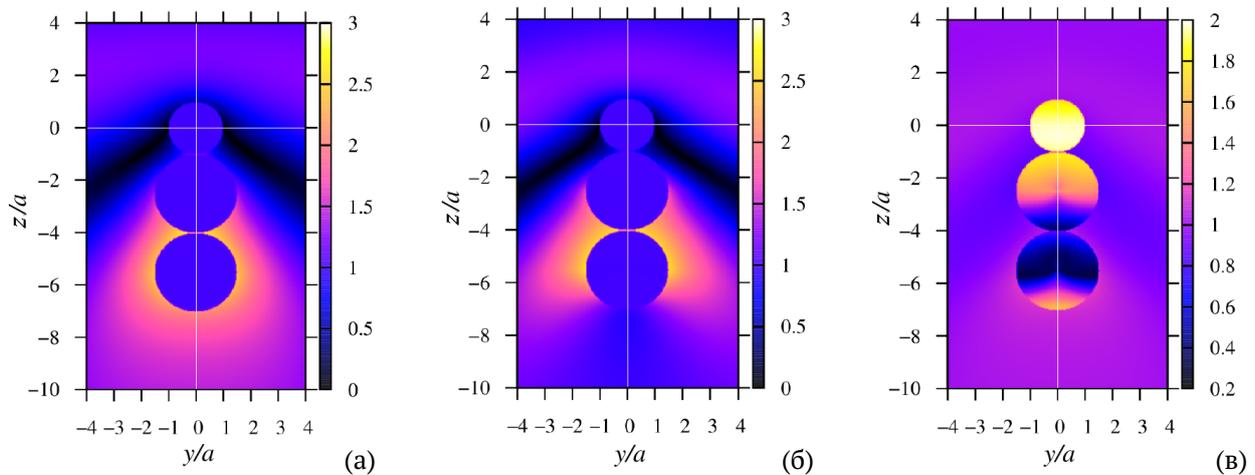


Рис. 5. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг трех воздушных пузырьков в воде (а) и дихлорэтане (б), трех капель воды в дихлорэтане (в) при значении частоты  $f = 200$  кГц для монополюсного источника излучения, расположенного сверху на оси  $Oz$  на расстоянии  $d = 10a_1$  от центра 1-ой сферы

В случае же, когда плотность внутри сферы выше плотности вне нее (рис. 4(б) и (в) — штриховая линия, а также рис. 5(в)), распределение давления внутри сферы меняется существенно, вызывая как резкое падение до нулевого значения, так и резкий рост до значений в 1.5–2 раза больших значений падающей акустической волны.

Из рис. 4 и 5 видно, что существуют значения параметров, при которых возможно появление «теневой» зоны за сферами, когда давление в этой зоне падает (например, зоны за парой пузырьков на рис. 4(а) и за третьим пузырьком в дихлорэтане на рис. 5(б)) или, наоборот, «освещение» зоны, когда давление в данной области повышается (например, зона за первой каплей воды на рис. 4(б) и за вторым пузырьком в воде на рис. 5(а)).

## 5. Заключение

В настоящей работе проведено исследование акустического рассеяния от множества коаксиальных сфер, через поверхность которых проходит акустическая волна, при воздействии сферической волны от монополюсного источника излучения, произвольно расположенного в пространстве. Представлены обобщения математической модели и методики повторного разложения по мультиполям на случай звукопроницаемых сфер в соответствии с работой [2], где исследовалось рассеяние от звуконепрозрачных сфер с произвольным акустическим импедансом.

Рассмотрены различные подходы к усечению бесконечных рядов в разложении. Их сравнение

показало, что усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе  $M$ , определенном по формуле (9), дает результат хорошей степени точности с помощью одного расчета. При необходимости получения результата с определенной степенью точности усечение рядов должно основываться на сравнении двух последовательных значений суммы ряда, причем в качестве начального значения  $M$  членов в разложении достаточно взять наименьшее из чисел, полученных с помощью формул (8) и (9).

Численный параметрический анализ, проведенный для различных физических параметров как внешней, так и внутренней для сферы сред, числа сфер и расстояния между их центрами, а также для различных значений частот внешнего воздействия и расположения источника монополюсного излучения относительно оси, соединяющей центры сфер, показал, что при определенных значениях параметров возможно появление зоны понижения давления за звукопроницаемыми сферами или, наоборот, зоны повышения давления.

В дальнейшем планируется проведение параметрического анализа в более широком диапазоне параметров, в том числе для различных значений радиусов сфер, расстояния между их центрами, расположения и частоты монополюсного источника излучения, физических параметров окружающей и внутренней сред и т.п.

Полученные результаты позволят проводить тестовые расчеты для верификации общего численного алгоритма для случая множества произвольно расположенных в пространстве сфер.

## Список литературы

- [1] Насибуллаева Э.Ш. Исследование рассеяния от звукопроницаемой одиночной сферы при внешнем воздействии // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 73–82.  
DOI: [10.21662/uim2017.1.011](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.011)
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701.  
DOI: [10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253)
- [3] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 2003. Vol. 113, No. 6. Pp. 3001–3011.  
DOI: [10.1121/1.1572141](https://doi.org/10.1121/1.1572141)
- [4] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.
- [5] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
- [6] Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от пары звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 44–51.  
DOI: [10.21662/mfs2019.1.006](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.006)
- [7] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 104. Pp. 3048–3058.  
DOI: [10.1109/ASPAA.1997.625597](https://doi.org/10.1109/ASPAA.1997.625597)
- [8] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // J. Comput. Phys. 2008. Vol. 227, No. 3. Pp. 1754–1771.  
DOI: [10.1016/j.jcp.2007.09.030](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.09.030)
- [9] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. Artech House Antennas and Propagation Library, Norwood, 2001. 932 p.
- [10] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. NY: Wiley-Interscience, 1996. 717 p.
- [11] Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 79–91.  
DOI: [10.21662/mfs2018.4.012](https://doi.org/10.21662/mfs2018.4.012)
- [12] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107. Pp. 3006–3017.  
DOI: [10.1121/1.429330](https://doi.org/10.1121/1.429330)



## Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

This paper presents a generalisation of the mathematical model and numerical study of the acoustic scattering problem from multiple spheres in the case of spheres through which the wave passes and whose centers are located on the same axis (the case of sound-penetrable and coaxial spheres) under the action of spherical waves from a monopole radiation source arbitrarily located in space. When solving the Helmholtz equations, a numerical technique based on the fast multipole method has been adapted for this task, which allows one to achieve high accuracy of the results obtained with minimal computer time. Comparison of the different approaches to truncation infinite series in the expansion showed the following: the result with a good degree of accuracy by a single calculation gives approach based on the truncation of all the rows with a fixed number in each expansion, and the result with a certain degree of accuracy gives an approach based on comparing two consecutive values of the sum of the series. A numerical parametric analysis of the pressure distribution inside and outside the spheres is carried out for various values of their radii, physical characteristics of the external and internal media, the number of spheres, the distances between the centers of the spheres, the frequency of exposure and the location of the monopole radiation source. It is shown that at certain values of the parameters, the appearance of zones of decrease or increase in pressure behind sound-penetrable spheres is possible. The obtained results will further allow to carry out test calculations to verify the general numerical algorithm for the case of a multitude of spheres arbitrarily located in space.

**Keywords:** acoustic scattering, sound-penetrable sphere, monopole radiation source, truncation number

### References

- [1] Nasibullaeva E.Sh. [Investigation of scattering from soundproof single sphere under external influence]. *Trudy Instituta mekhaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN Multiphase systems* [Proceedings of the Institute of Mechanics. R.R. Mavlyutov Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences]. 2017. V. 12, No. 1. Pp. 73–82 (in Russian). DOI: 10.21662/uim2017.1.011
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. Vol. 112, no. 6. P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [3] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. Vol. 113, No. 6. Pp. 3001–3011. DOI: 10.1121/1.1572141
- [4] Grinchenko V.T., Vovk I.V., Macytura V.T. [Osnovy akustiki] *Basics of acoustics*. K: Naukova Dumka, 2009. P. 867 (in Russian).
- [5] Korn G.A., Korn Th.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw Hill Book Company, 1968. 943 p.
- [6] Nasibullaeva E.Sh. [Investigation of acoustic scattering from a pair soundproof spheres under external influence]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 1. Pp. 44–51 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2019.1.006
- [7] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. Vol. 104. Pp. 3048–3058. DOI: 10.1109/ASPAA.1997.625597
- [8] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // *J. Comput. Phys.* 2008. Vol. 227, No. 3. Pp. 1754–1771. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030
- [9] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Artech House-Antennas and Propagation Library, Norwood, 2001. 932 p.
- [10] Zhang S., Jin J. *Computation of special functions*. NY: Wiley-Interscience, 1996. 717 p.
- [11] Nasibullaeva E.Sh. [The study of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2018. V. 13, No. 4. Pp. 79–91 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2018.4.012
- [12] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. Vol. 107. Pp. 3006–3017. DOI: 10.1121/1.429330



## Численное исследование скоростного скольжения фаз при прохождении ударной волны малой интенсивности из чистого газа в запылённую среду<sup>1</sup>

Тукмаков Д.А.

Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

В настоящей работе численно моделируется процесс движения прямого скачка уплотнения из чистого газа в запылённую среду. Математическая модель учитывает вязкость, сжимаемость и теплопроводность несущей фазы. Также методика моделирования позволяет описать межфазное силовое взаимодействие, включающее в себя силу Стокса, динамическую силу Архимеда, силу присоединённых масс. Кроме того, межфазное взаимодействие включает теплообмен между несущей и дисперсной фазами. Численное решение реализовано при помощи явного конечно-разностного метода с последующим применением схемы нелинейной коррекции для сеточной функции. В результате численных расчётов выявлено, что с ростом линейного размера частиц газовзвеси увеличивается скоростное скольжение между несущей и дисперсной фазами. Также численное моделирование показало, что наибольшей величины модуль разности скоростей несущей и дисперсной фаз достигает на переднем крае волны сжатия. Выявленные закономерности могут быть объяснены тем, что частицы дисперсной фазы предполагаются сферической формы. За счёт этого кратное увеличение размера частиц приводит к трёхкратному увеличению их массы, двукратному увеличению площади одной частицы и трёхкратному уменьшению количества частиц. Таким образом, увеличение размера частиц приводит к уменьшению площади межфазного соприкосновения и увеличению инерционности частиц, что, в свою очередь, отражается на межфазном скоростном скольжении.

**Ключевые слова:** численное моделирование, уравнение Навье–Стокса, газовзвеси, ударные волны

### 1. Введение

Процессы, связанные с движением многофазных сред, встречаются как в природе, так и в промышленных технологиях [1–3]. Поэтому одним из актуальных разделов механики жидкости и газа является изучение динамики неоднородных сред, в том числе газовых взвесей капель и твёрдых частиц. Так как во многих случаях экспериментальное исследование таких течений затруднено, существенное значение имеет математическое моделирование [4–13]. В настоящей работе динамика газовой взвеси твёрдых частиц – запылённой среды – описывается на основе двухскоростной двух-

температурной модели, учитывающей межкомпонентный теплообмен, а также межкомпонентное силовое взаимодействие, включающее в себя силу Стокса, динамическую силу Архимеда и силу присоединённых масс [1].

### 2. Методы исследования

Движение несущей среды описывается одномерной системой уравнений Навье–Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с учётом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [1, 2]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p - \tau) = F + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 18-48-160017\19, 19-01-00442).

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( [e_1 + p - \tau]u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = \\ = -Q - |F|(u_1 - u_2) + \alpha_2 \left( \frac{\partial(pu_1)}{\partial x} \right), \quad (3) \\ p = (\gamma - 1) \left( e_1 - \frac{\rho(u_1^2)}{2} \right), \\ e_1 = \rho_1 \left( I + \frac{u_1^2}{2} \right), \quad \tau = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u_1}{\partial x}. \end{aligned}$$

Здесь  $p$ ,  $\rho_1$ ,  $u_1$  — давление, плотность, скорость несущей среды;  $F$  — сила межфазного взаимодействия;  $\alpha_2$  — объемное содержание дисперсной фазы;  $T_1$ ,  $e_1$  — температура и полная энергия газа;  $Q$  — тепловой поток;  $\mu$  — вязкость несущей среды;  $\lambda$  — теплопроводность.

Динамика дисперсной фазы описывается уравнением сохранения «средней плотности» — произведение физической плотности материала частиц и объёмного содержания дисперсной фазы, изменяющегося на различных участках физической области вместе с движением твёрдых частиц, уравнениями сохранения импульса и уравнением сохранения энергии, записанными с учётом теплообмена, обмена импульсом с несущей фазой:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2^2) = -F - \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_2 u_2) = \text{Nu}_{12} \frac{6\alpha_2}{(2r)^2} \lambda (T_1 - T_2), \quad (6)$$

$$\rho_2 = \alpha_2 \rho_{20}, \quad e_2 = \rho_2 C_{p2} T_2$$

где  $\rho_2$ ,  $T_2$ ,  $e_2$ ,  $u_2$  — средняя плотность, температура, внутренняя энергия, скорость дисперсной фазы;  $\text{Nu}$  — число Нуссельта;  $C_{p2}$  — удельная теплоемкость единицы массы вещества, из которого состоят частицы.

Температура несущей среды находится из уравнения  $(\gamma - 1)(e/\rho - 0.5u^2)/R$ , где  $R$ ,  $\gamma$  — газовая постоянная несущей фазы и постоянная адиабаты соответственно. Силовое взаимодействие несущей и дисперсной фаз учитывает силу Стокса, динамическую силу Архимеда и силу присоединённых масс. Математическая модель предполагает монодисперсный состав твёрдой фазы газозвеси: все частицы имеют одинаковый размер и одинаковые физические свойства (плотность и теплоёмкость материала). Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как  $e_2 = \rho_2 C_{p2} T_2$ . В уравнение энергии

для несущей фазы входит коэффициент теплопроводности газа, коэффициент теплообмена  $\alpha^T$  на поверхности «частица–несущая среда» и тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей  $Q = \alpha^T 4\pi r^2 (T_1 - T_2) n = 6\alpha \text{Nu}_{12} \lambda (T_1 - T_2) / (2r)^2$ , где  $n$  и  $r$  — соответственно концентрация и радиус частиц. В настоящей работе межфазное силовое взаимодействие  $F$  включает в себя силу Стокса, динамическую силу Архимеда и силу присоединённых масс:

$$\begin{aligned} F = \frac{3\alpha_2}{8r} C_{d2} \rho_1 |u_1 - u_2| (u_1 - u_2) + \\ + \alpha_2 \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \\ + 0.5\alpha_2 \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Параметры межфазного взаимодействия описаны в работе [2]:

$$C_{d2} = C_{d2}^0 \phi(M_{12}) \varphi(\alpha_2),$$

$$C_{d2}^0 = \frac{24}{\text{Re}_{12}} + \frac{4}{\text{Re}_{12}^{0.5}} + 0.4,$$

$$\phi(M_{12}) = 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M_{12}^{0.63}}\right),$$

$$\varphi(\alpha_2) = (1 - \alpha_2)^{-2.5},$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_1 u_1 D}{\mu}, \quad \text{Re}_{12} = \frac{r \rho_1 |u_1 - u_2|}{\mu},$$

$$M_{12} = \frac{|u_1 - u_2|}{c}, \quad \text{Pr}_1 = \gamma c_{p1} \mu (\lambda)^{-1},$$

$$\text{Nu}_{12} = 2 \exp(-M_{12}) + 0.459 \text{Re}_{12}^{0.55} \text{Pr}_1^{0.33},$$

$$0 < M_{12} < 2, \quad 0 < \text{Re} < 2 \cdot 10^5.$$

Здесь  $D$  — характерный размер системы;  $M$ ,  $\text{Re}$ ,  $\text{Pr}$  — числа Маха, Рейля и Прандтля.

Система уравнений математической модели решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка [14] с последующим применением схемы нелинейной коррекции решения [15].

Система уравнений (1)–(6) может быть записана в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \mathbf{H}, \quad (7)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p - \tau \\ \rho_2 u_2^2 \\ (e_1 + p - \tau)u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \\ e_2 u_2 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} \\ F - \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} \\ -Q - |F|(u_1 - u_2) + \alpha_2 \frac{\partial p u_1}{\partial x} \\ Q \end{bmatrix}.$$

Алгоритм явного конечно-разностного метода Мак-Кормака для нелинейной системы (7) записывается в виде:

$$q_j^* = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{j+1}^n - E_j^n) + \Delta t H_j^n,$$

$$q_j^{n+1} = 0.5(q_j^* + q_j^n) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_j^* - E_{j-1}^*) + 0.5 \Delta t H_j^*.$$

Монотонность решения достигалась с помощью применения схемы нелинейной коррекции вдоль пространственных направлений  $x$  и  $y$  по индексам  $j, k$  соответственно к компонентам вектора независимых переменных  $q = (\rho_1, \rho_2, \rho_1 u_1, \rho_2 u_2, e_1, e_2)$ .

Пусть  $Z_{j,k}^n$  — произвольная независимая функция на  $n$ -ом временном слое в узле  $(j, k)$ . Тогда алгоритм коррекции имел бы следующий вид:

$$Z_{j,k}^{n*} = Z_{j,k}^n + \kappa (\delta Z_{j+1/2,k}^n - \delta Z_{j-1/2,k}^n),$$

где  $Z_{j,k}^{n*}$  — скорректированная функция;  $\kappa$  — коэффициент коррекции.

Данный алгоритм выполняется в случае, когда

$$(\delta Z_{j-1/2,k}^n \delta Z_{j+1/2,k}^n) < 0$$

или

$$(\delta Z_{j+1/2,k}^n \delta Z_{j+3/2,k}^n) < 0.$$

Здесь используются обозначения

$$\delta Z_{j-1/2,k}^n = Z_j^n - Z_{j-1,k}^n,$$

$$\delta Z_{j+1/2,k}^n = Z_{j+1,k}^n - Z_{j,k}^n,$$

$$\delta Z_{j+3/2,k}^n = Z_{j+2,k}^n - Z_{j+1,k}^n.$$

На границах расчётной области задавались однородные граничные условия первого рода

для скорости и однородные граничные условия второго рода для остальных динамических функций [2, 14–19]:

$$u_1(t, N) = 0, \quad u_2(t, N) = 0,$$

$$\rho_1(t, N) = \rho_1(t, N - 1), \quad \rho_2(t, N) = \rho_2(t, N - 1),$$

$$e_1(t, N) = e_1(t, N - 1), \quad e_2(t, N) = e_2(t, N - 1),$$

$$u_1(t, 1) = 0, \quad u_2(t, 1) = 0,$$

$$\rho_1(t, 1) = \rho_1(t, 2), \quad \rho_2(t, 1) = \rho_2(t, 2),$$

$$e_1(t, 1) = e_1(t, 2), \quad e_2(t, 1) = e_2(t, 2).$$

### 3. Результаты расчётов

В расчётах предполагалось, что истинная плотность вещества дисперсной фазы  $\rho_{20} = 1850 \text{ кг/м}^3$ , объёмное содержание дисперсной фазы  $\alpha_2 = 0.0005$ . Длина рассчитываемого канала  $L = 10 \text{ м}$ . Начальные давления  $p_2 = 107.8 \text{ КПа}$  и  $p_1 = 98 \text{ КПа}$ . Поверхность разрыва давления располагалась при  $x = L/2$ .

На рис. 1 представлено схематичное изображение ударной трубы с камерой низкого давления, заполненной газозвесью, и камерой высокого давления, содержащей в себе чистый газ. В работе моделировалось движение прямого скачка уплотнения из чистого газа в запылённую среду.

Численное моделирование показывает, что в процессе движения ударной волны по запылённой среде уменьшение дисперсности частиц газозвеси, расположенной в камере низкого давления, приводит к увеличению давления в волне сжатия и к уменьшению скорости распространения ударной волны (рис. 2). Из расчётов следует, что в газозвеси с более крупным размером частиц наблюдается большая скорость спутного потока газа (рис. 3). В то же время в запылённой среде рост линейного размера частиц приводит к уменьшению скорости дисперсной фазы (рис. 4). Для мелкодисперсных газозвесей скоростное скольжение несущественно (рис. 5). При этом для газозвесей как с крупнодисперсной, так и с мелкодисперсной твёрдой

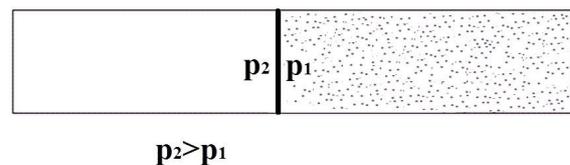


Рис. 1. Схематичное изображение канала с электрически заряженной газозвесью в начальный момент времени

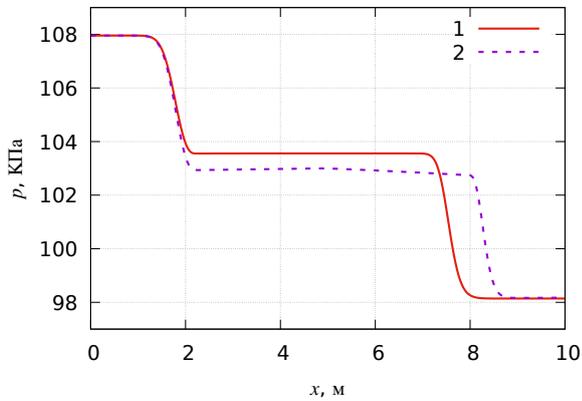


Рис. 2. Пространственное распределения давления при прохождении ударной волны из чистого газа в запылённую среду: кривая 1 – численное решение для газозвеси с диаметром частиц  $d = 4$  мкм, кривая 2 – численное решение для газозвеси с диаметром частиц  $d = 400$  мкм,  $t = 11$  мс

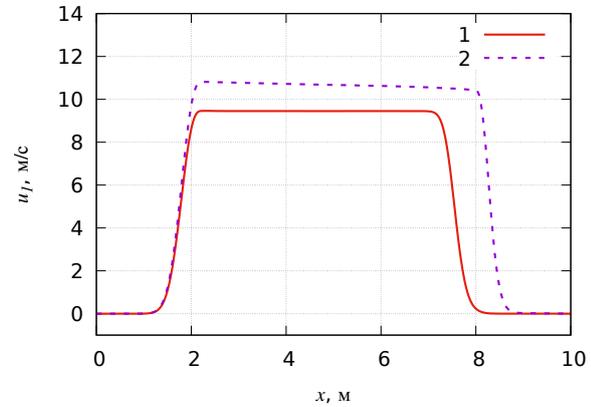


Рис. 3. Пространственное распределения спутного потока: кривая 1 – численное решение для газозвеси с диаметром частиц  $d = 4$  мкм, кривая 2 – численное решение для газозвеси с диаметром частиц  $d = 400$  мкм,  $t = 11$  мс

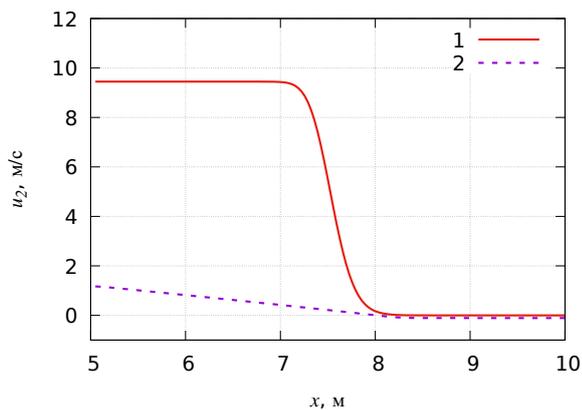


Рис. 4. Пространственное распределения скорости частиц дисперсной фазы: кривая 1 – численное решение для газозвеси с диаметром частиц  $d = 4$  мкм, кривая 2 – численное решение для газозвеси с диаметром частиц  $d = 400$  мкм,  $t = 11$  мс

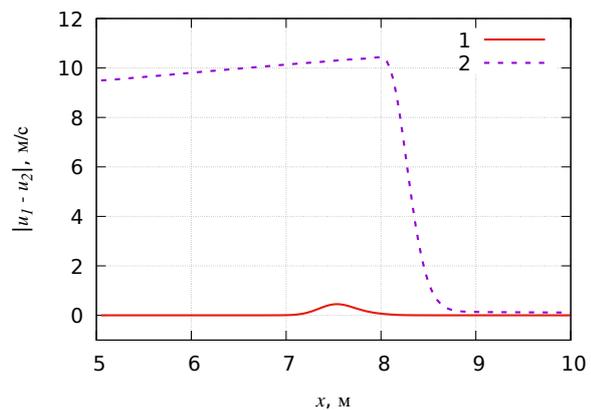


Рис. 5. Пространственное распределение модуля разности скоростей несущей и дисперсной фаз газозвеси: кривая 1 – численное решение для газозвеси с диаметром частиц  $d = 4$  мкм, кривая 2 – численное решение для газозвеси с диаметром частиц  $d = 400$  мкм,  $t = 11$  мс

фазами наибольшее значение модуля разности скоростей несущей и дисперсной фаз наблюдается на переднем крае волны сжатия. В крупнодисперсной газозвеси увеличение модуля разности скоростей твёрдой и газообразной фаз наблюдается от области контакта запылённой среды и чистого газа к переднему краю волны сжатия.

#### 4. Выводы

В процессе движения прямого скачка уплотнения из чистого газа в запылённую среду с ростом размера частиц происходит увеличение скорости движения возмущения и уменьшение давления на переднем крае волны сжатия. Наибольшее значение модуля разности скоростей несущей и дисперсной фаз наблюдается на переднем крае волны сжатия перед невозмущённой двухфазной средой. В настоящей работе применяется математическая модель, предполагающая сферическую форму частиц. При таком предположении уменьшение размера частиц на порядок приводит к уменьшению площади отдельной частицы на два порядка и увеличению количества частиц на три порядка. Из этого следует, что уменьшение размера частиц на порядок приводит к пропорциональному увеличению площади межфазного взаимодействия. Из приведённых численных расчётов следует, что для ударно-волновых течений газозвесей с более крупными частицами скорость течения несущей среды больше, чем в мелкодисперсных газозвесах. Данная закономерность может быть вызвана меньшим взаимодействием несущей и дисперсной фаз в крупнодисперсных запылённых средах. Также в крупнодисперсных газозвесах наблюдается меньшая скорость дисперсной фазы, что может быть вызвано большей инерционностью крупных частиц. Таким образом, в газозвесах, состоящих из более крупных частиц, наблюдается большая интенсивность межфазного скоростного скольжения.

#### Список литературы

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука. 1987. 464 с.
- [2] Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра. 2003. 284 с.
- [3] Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. Волновые процессы в газозвесах частиц металлов. Новосибирск. 2015. 301 с.
- [4] Веревкин А.А., Циркунов Ю.М. Течение дисперсной примеси в сопле Лаваля и рабочей секции двухфазной гиперзвуковой ударной трубы // Прикладная механика и техническая физика. 2008. № 5. С. 102–113.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19062392>
- [5] Пахомов М.А., Терехов В.И. Влияние испарения капель на структуру течения и теплообмен в ограниченном закрученном газокapельном потоке за его внезапным расширением // Теплофизика и аэромеханика. 2018. № 6. С. 865–875.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=36825464>
- [6] Садин Д.В. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 12. С. 2098–2109.  
DOI: 10.7868/S0044466916120152
- [7] Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Урманчеев С.Ф. Технология компьютерного моделирования воздействия воздушных ударных волн на преграды, покрытые пористым слоем // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 3. С. 7–20.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=13026371>
- [8] Балапанов Д.М., Урманчеев С.Ф. Роль межфазных взаимодействий при газовой детонации в инертной пористой среде // Письма ЖТФ. 2010. Т. 36, вып. 13. С. 71–80.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=20327258>
- [9] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Исследование демпфирующих свойств водной пены под воздействием сферической ударной волны // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2(42). С. 108–121.  
DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-9
- [10] Беляев П.Е., Клиначева Н.Л. Влияние экранирующего слоя газозвеси на силовое воздействие ударной волны на жесткую стенку // Вестник ЮРГУ сер. Математика. Механика. Физика. 2016. Т. 8, № 4. С. 49–55.  
DOI: 10.14529/mmph160406
- [11] Уткин П.С. Некоторые вычислительные аспекты взаимодействия ударной волны с облаком частиц в рамках двухжидкостной модели // Горение и взрыв. 2017. Т. 10, № 3. С. 53–57.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=30682321>
- [12] You Z., Li B., Wang H., Xie L. Water aerosol formation: Transient process induced by shock waves // Journal of Aerosol Science. 2017. V. 106. Pp. 100–110.  
DOI: 10.1016/j.jaerosci.2017.01.010
- [13] Tada Y., Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y. Heat transfer enhancement in a gas–solid suspension flow by applying electric field // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. V. 93. Pp. 778–787.  
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063
- [14] Fletcher C.A. Computation Techniques for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin. 1988. 502 p.
- [15] Музафаров И.Ф., Утожников С.В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. № 3. С. 74–83.  
<http://mi.mathnet.ru/mm1962>
- [16] Тукмаков А.Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Авиационная техника. 2006. № 4. С. 33–36.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=12510457>
- [17] Тукмаков Д.А. Численное моделирование ударно-волновых течений в газозвеси с неоднородной концентрацией дисперсной фазы // Авиационная техника. 2019. № 1. С. 54–59.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=38027390>
- [18] Tukmakov D.A. Numerical study of polydisperse aerosol dynamics with the drops destruction // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40, No. 6. Pp. 824–827.  
DOI: 10.1134/S1995080219060234
- [19] Тукмаков Д. А. Численное моделирование колебаний электрически заряженной гетерогенной среды, обусловленных межкомпонентным взаимодействием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, № 3. С. 73–85.  
DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-3-73-85



## Numerical study of velocity slip of phases during the passage of a shock wave of low intensity from a pure gas to a dusty medium

Tukmakov D.A.

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center of the RAS, Kazan

In this paper, the process of the movement of a direct shock wave from a pure gas into a dusty medium is numerically modeled. The mathematical model took into account the viscosity, compressibility and thermal conductivity of the carrier phase. Also, the modeling technique made it possible to describe the interphase force interaction, which included the Stokes force, the dynamic force of Archimedes, the strength of the attached masses. In addition, interfacial interaction included heat transfer between the carrier and dispersed phases. The numerical solution was carried out using the explicit finite-difference method, with the subsequent application of the nonlinear correction scheme for the grid function. As a result of numerical calculations, it was revealed that with an increase in the linear particle size of the gas suspension, the velocity slip between the carrier and dispersed phases increases. Numerical modeling also showed that the absolute value of the difference between the velocities of the carrier and the dispersed phase reaches the largest value at the leading edge of the compression wave. The revealed regularities can be explained by the fact that the particles of the dispersed phase are assumed to be spherical in shape. Due to this, a multiple increase in particle size leads to a three-fold increase in their mass, a twofold increase in the area of one particle and a three-fold decrease in the number of particles. Thus, an increase in particle size leads to a decrease in the area of interfacial contact and an increase in the inertia of the particles, which in turn affects the interfacial velocity slip.

**Keywords:** numerical simulation, Navier-Stokes equation, dusty media, shock waves

### References

- [1] Nigmatulin R.I. [The dynamics of multiphase media] *Dinamika mnogofaznyh sred. Part 1.* M.: Science. 1987. 446 p. (in Russian)
- [2] Kutushev A.G. [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media]. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh processov v aerodispersnyh i poroshkobraznyh sredah.* SPb.: Subsoil. 2003. 284 p. (in Russian)
- [3] Fedorov A.V., Fomin V.M., Khmel T.A. [Wave processes in gas-suspended particles of metals] *Volnovye processy v gazovzvesyah chastic metallov.* 2015. Novosibirsk. 301 p. (in Russian)
- [4] Verevkin A.A., Tsirkunov Yu.M. [Dispersed impurity flow in a Laval nozzle and working section of a two-phase hypersonic shock tube]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika.* [Applied Mechanics and Technical Physics]. 2008. No. 5. Pp. 102–113. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19062392>
- [5] Pakhomov M.A., Terekhov V.I. [The effect of droplet evaporation on the flow structure and heat and mass transfer in a limited swirling gas-droplet flow due to its sudden expansion] *Teplofizika i aeromekhanika.* [Thermophysics and Aeromechanics]. 2018. No. 6. Pp. 865–875. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=36825464>
- [6] Sadin D.V. [TVD scheme for tough problems of wave dynamics of heterogeneous media of non-hyperbolic non-conservative type] *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki.* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2016. V. 56, No. 12. Pp. 2098–2109. (in Russian)  
DOI: 10.7868/S0044466916120152
- [7] Gubaidullin A.A., Dudko D.N., Urmancheev S.F. [Computer-aided modeling of the effects of air shock waves on porous-layer barriers] *Vychislitel'nye tekhnologii.* [Computational technologies]. 2001. V. 6, No. 3. Pp. 7–20. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=13026371>
- [8] Balapanov D.M., Urmancheev S.F. [The role of interfacial interactions in the course of gas detonation in an inert porous medium] // *PZhTF* [Letters to the journal of technical physics]. 2010. V. 36, No. 13. Pp. 71–80. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=20327258>
- [9] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. [The study of the damping properties of water foam under the influence of a spherical shock wave] *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Povolzhskij region. Fiziko-matematicheskie nauki.* [News of higher educational institutions. Volga region. Physics and mathematics]. 2017. No. 2(42). Pp. 108–121. (in Russian)  
DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-9

- [10] Belyaev P.E., Klinacheva N.L. [The effect of the screening layer of a gas suspension on the force of a shock wave on a rigid wall] Vestnik YURGU ser. Matematika, Mekhanika, Fizika. [Messenger of South Ural State University Maths. Mechanics. Physics] 2016. V. 8, No. 4. Pp. 49–55. (in Russian)  
DOI: [10.14529/mmph160406](https://doi.org/10.14529/mmph160406)
- [11] Utkin P.S. [Some computational aspects of the interaction of a shock wave with a cloud of particles in a two-fluid model] Gorenje i vzryv. [Combustion and Explosion] 2017. V. 10, No. 3. Pp. 53–57. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=30682321>
- [12] You Z., Li B., Wang H., Xie L. Water aerosol formation: Transient process induced by shock waves. Journal of Aerosol Science. 2017. V. 106. Pp. 100–110.  
DOI: [10.1016/j.jaerosci.2017.01.010](https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2017.01.010)
- [13] Tada Y., Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y. Heat transfer enhancement in a gas – solid suspension flow by applying electric field. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. V. 93. Pp. 778–787.  
DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063)
- [14] Fletcher C.A.. Computation Techniques for Fluid Dynamics. Springer-Verlang. Berlin. 1988. 502 p.
- [15] Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. [Application of compact difference schemes to the study of unsteady flows of a compressible gas] Matematicheskoe modelirovanie. [Mathematical modeling] 1993. No. 3. Pp. 74–83. (in Russian)  
<http://mi.mathnet.ru/mm1962>
- [16] Tukmakov A.L. [Numerical simulation of acoustic flows in resonant gas oscillations in a closed pipe] Aviacionnaya tekhnika. [Aviation Engineering]. 2006. No. 4. Pp. 33–36. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=12510457>
- [17] Tukmakov D.A. [Numerical modeling of shock-wave flows in a gas suspension with an inhomogeneous concentration of the dispersed phase] Aviacionnaya tekhnika. [Aviation Engineering]. 2019. No. 1. Pp. 54–59. (in Russian)  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=38027390>
- [18] Tukmakov D.A. Numerical study of polydisperse aerosol dynamics with the drops destruction. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40, No. 6. Pp. 824–827.  
DOI: [10.1134/S1995080219060234](https://doi.org/10.1134/S1995080219060234)
- [19] Tukmakov D. A. [Numerical modeling of oscillations of an electrically charged heterogeneous medium due to inter-component interaction] Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelinejnaya dinamika. [News of Universities. Applied nonlinear dynamics]. 2019. V. 27, No. 3. Pp. 73–85. (in Russian)  
DOI: [10.18500/0869-6632-2019-27-3-73-85](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-73-85)



## Исследование собственных функций возмущения поперечной составляющей скорости потока термовязких жидкостей<sup>1</sup>

Низамова А.Д.\* , Киреев В.Н.\*\* , Урманчеев С.Ф.\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Башкирский государственный университет, Уфа

Рассмотрено течение вязкой модельной жидкости в плоском канале с линейным профилем температуры. Задача об устойчивости течения термовязкой жидкости решается на основе полученного ранее обобщенного уравнения Орра–Зоммерфельда спектральным методом разложения по полиномам Чебышева. Исследуется влияние учета линейной и экспоненциальной зависимостей вязкости жидкости от температуры на собственные функции уравнения гидродинамической устойчивости и на возмущения поперечной скорости течения несжимаемой жидкости в плоском канале при задании различных значений температуры стенок. Численно найдены собственные функции для двух собственных значений линейной и экспоненциальной зависимостей вязкости от температуры. Представлены графики собственных функций. Собственные функции демонстрируют поведение возмущений поперечной скорости, их возможный рост или затухание с течением времени. Для приведенных в работе собственных функций получены возмущения поперечной скорости течения термовязкой жидкости. Показано, что учет температурной зависимости вязкости влияет на собственные функции уравнения гидродинамической устойчивости и на возмущения поперечной скорости течения. Возмущения поперечной скорости оказывают существенное влияние на гидродинамическую неустойчивость течения жидкостей. По полученным результатам видно, что при рассмотрении неустойчивого собственного значения с течением времени возмущения скорости начинают расти, что приводит к турбулизации течения. Максимальные значения собственных функций и возмущений поперечных скоростей смещены в сторону горячей стенки. Показано, что для неустойчивого собственного значения возмущения поперечной скорости течения возрастают с течением времени, а для устойчивого — затухают.

**Ключевые слова:** термовязкая жидкость, собственные функции, возмущения поперечной скорости, гидродинамическая неустойчивость

### 1. Введение

Гидродинамическая устойчивость течения жидкости является одной из главных задач гидродинамики. Хорошо известно, что существует два

режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. Каждый из этих режимов имеет важное значение в технологических процессах. Ламинарный режим важен с точки зрения энергетической эффективности, а турбулентный — при учете эффективности тепломассопереноса и зависимости вязкости от температуры в плоском канале с линейным профилем температуры.

Особенности устойчивости течения жидкостей с постоянной вязкостью подробно исследованы в работах [1, 2]. Численный алгоритм решения задачи об устойчивости течения жидкости с постоян-

<sup>1</sup>Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию на 2019–2022 гг. (№ 0246-2019-0052), РФФИ (проект № 17-41-020999-р\_а) и Академии наук Республики Башкортостан (Договор № 40/10).

ной вязкостью приведен в работе [3]. Однако, зависимость вязкости жидкости от температуры является важным фактором, определяющим характер течения [4–6], и безусловно отражающимся на закономерностях потери устойчивости потока [7, 8].

В настоящей работе представлены результаты исследования устойчивости течений жидкостей с линейной и экспоненциальной зависимостями вязкости от температуры.

## 2. Постановка задачи об устойчивости течения термовязкой жидкости

Рассматривается течение несжимаемой термовязкой жидкости в плоском канале с линейным профилем температуры.

Задача гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным полем сводится к обобщенному уравнению Орра-Зоммерфельда:

$$\mu_0 \left[ \varphi^{IV} - 2k^2 \varphi'' + k^4 \varphi \right] - ik \operatorname{Re} \left[ (u_0 - c) \times \right. \\ \left. \times (\varphi'' - k^2 \varphi) - u_0'' \varphi \right] + 2\mu_0' (\varphi''' - 2k^2 \varphi') + \\ + \mu_0'' (\varphi'' + 2k^2 \varphi) = 0$$

с граничными условиями:

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0, \quad \varphi'(-1) = \varphi'(1) = 0,$$

где  $\mu$  — вязкость;  $\varphi(y)$  — амплитуда возмущения поперечной скорости;  $u_0 = u_0(y)$  — профиль скорости в невозмущенном состоянии;  $i$  — мнимая единица;  $c = w/k$  — фазовая скорость волны вдоль

оси канала (собственное значение);  $w$  — частота;  $k$  — проекция волнового вектора на ось канала (волновое число);  $\operatorname{Re}$  — число Рейнольдса.

Для решения полученного уравнения применяется спектральный метод, использующий разложения по полиномам Чебышева первого рода.

## 3. Результаты численного моделирования и их анализ

### 3.1. Линейная зависимость вязкости от температуры

Рассмотрим зависимость вязкости жидкости от температуры:

$$\mu_L(T) = 1 - \alpha_L T,$$

где  $\alpha_L < 0,5$  — параметр изменения вязкости;  $T$  — температура.

Собственные функции для первого собственного значения [9] течения жидкости с линейной зависимостью вязкости от температуры при фиксированных параметрах числа Рейнольдса  $\operatorname{Re} = 10^4$  и волновом числе  $k = 1$  представлены на рис. 1(а). Рис. 2 является иллюстрацией вещественных частей возмущений поперечной скорости течения жидкости для первого собственного значения и различных безразмерных временных значений  $t$ . По полученным результатам видно, что при рассмотрении неустойчивого собственного значения с течением времени  $t$  возмущения скорости начинают расти, что приводит к турбулизации течения. Вещественная и мнимая части собственной функции, соответствующей второму собственному значению, представлены на рис. 1(б), а возмущения

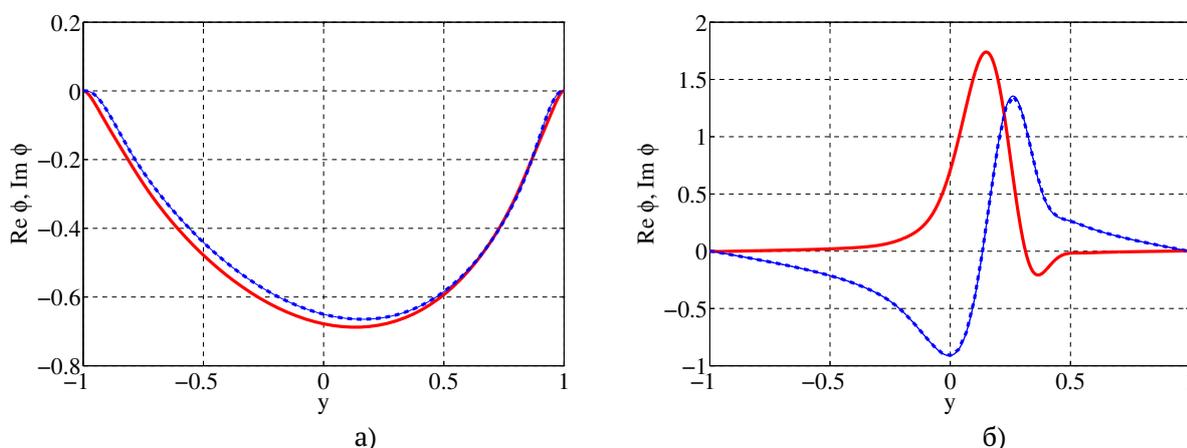


Рис. 1. Вещественная (красная линия) и мнимая (синяя линия) части собственных функций первого (а) и второго (б) собственных значений для жидкости с линейной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $\operatorname{Re} = 10^4, k = 1, \alpha_L = 0.2$

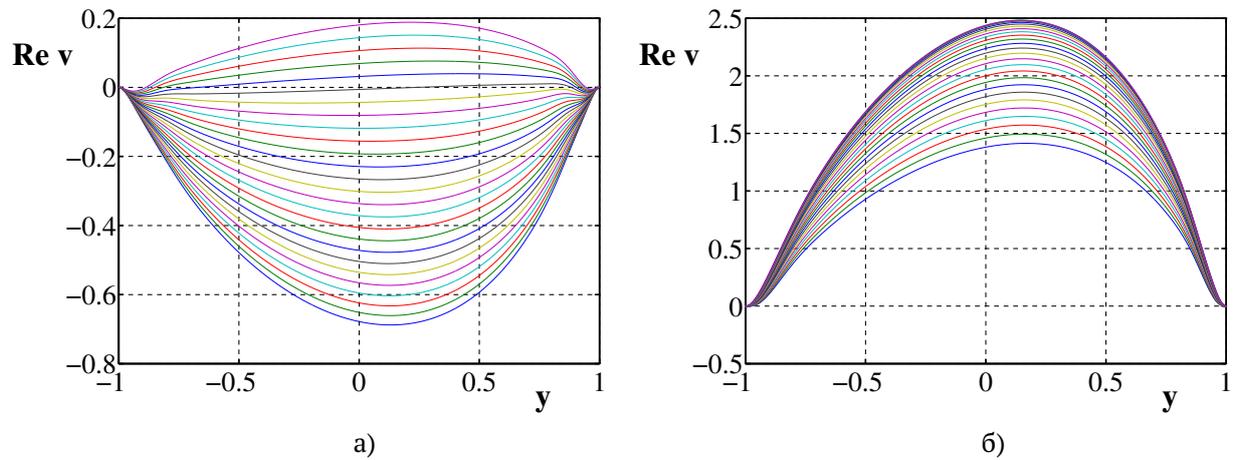


Рис. 2. Вещественная часть возмущений поперечной скорости первого собственного значения для жидкости с линейной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $Re = 10^4$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha_L = 0.2$ : а)  $t = 0$ ; б)  $t = 10^3$

поперечной скорости — на рис. 3. Второе собственное значение является устойчивым и по графикам видно, что с течением времени возмущения поперечной скорости затухают. Также стоит отметить, что собственные функции и возмущения поперечной скорости не обладают признаком симметрии, это следует из того, что профиль скорости в невозмущенном состоянии тоже не обладает симметрией. Максимальные значения собственных функций и возмущений поперечных скоростей смещены вправо от оси  $y = 0$ , это соответствует тому, что возмущения возникают и интенсивно растут вблизи горячей стенки.

### 3.2. Экспоненциальная зависимость вязкости от температуры

Рассмотрим течение жидкости с экспоненциальной температурной зависимостью вязкости:

$$\mu_E(T) = \exp(-\alpha_E T),$$

где  $\alpha_E > 0$  — параметр термовязкости.

На рис. 4(а) представлены графики вещественной и мнимой частей собственной функции, соответствующей первому собственному значению. Рис. 5 является иллюстрацией вещественных частей возмущений поперечной скорости течения

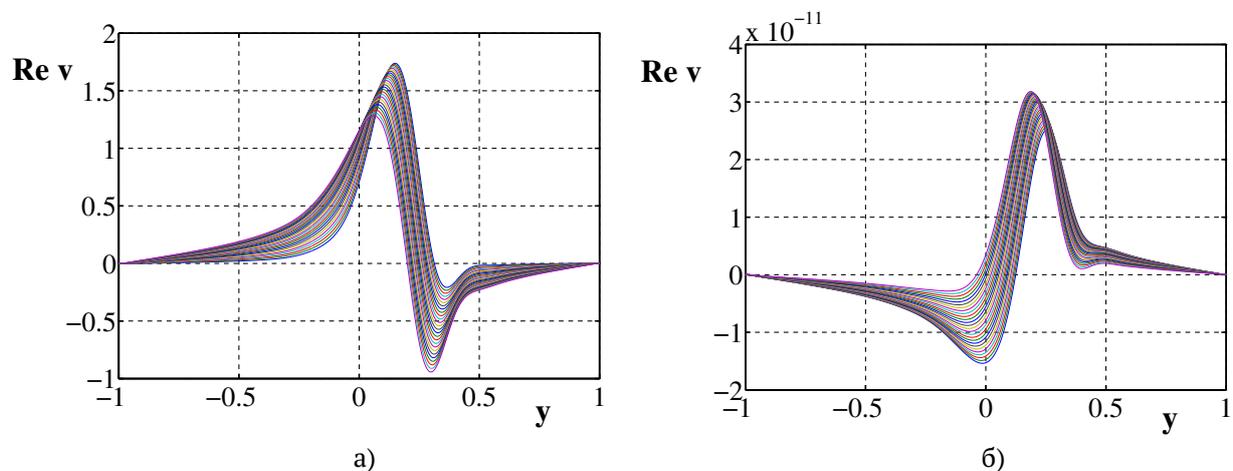


Рис. 3. Вещественная часть возмущений поперечной скорости второго собственного значения для жидкости с линейной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $Re = 10^4$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha_L = 0.2$ : а)  $t = 0$ ; б)  $t = 10^3$

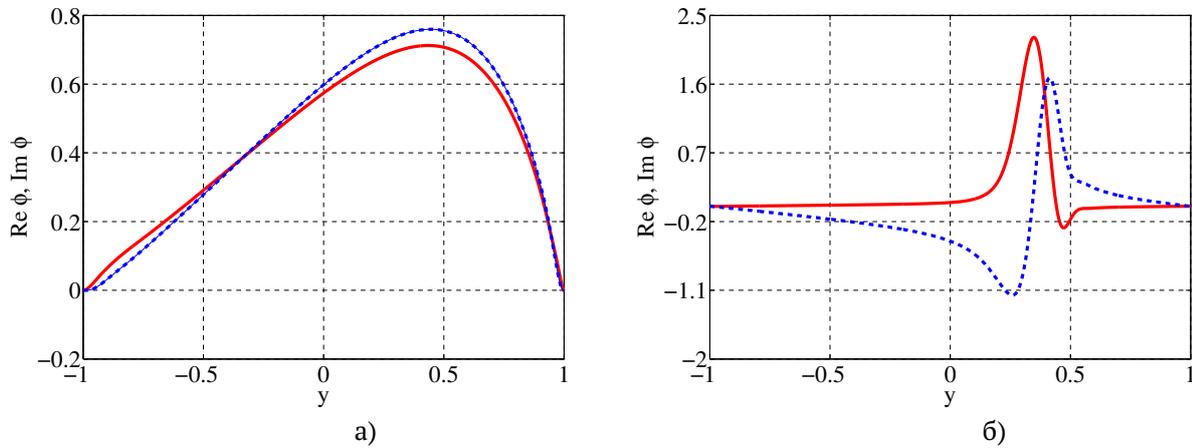


Рис. 4. Вещественная (красная линия) и мнимая (синяя линия) части собственных функций первого (а) и второго (б) собственных значений для жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $Re = 10^4$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha_E = 1$

жидкости для различных временных значений  $t$ . По полученным результатам видно, что при рассмотрении неустойчивого собственного значения с течением времени  $t$  возмущения скорости начинают расти, что приводит к турбулизации течения. Вещественная и мнимая части собственной функции, соответствующей второму собственному значению показаны на рис. 4(б), а возмущения поперечной скорости — на рис. 6. Второе собственное значение является устойчивым и по графикам можно видеть, что с течением времени возмущения поперечной скорости затухают.

#### 4. Заключение

Установлено, что функциональная зависимость вязкости от температуры влияет на результаты решения задачи о гидродинамической устойчивости. Таким образом, при решении задачи об устойчивости течения термовязкой жидкости следует учитывать зависимость вязкости от температуры.

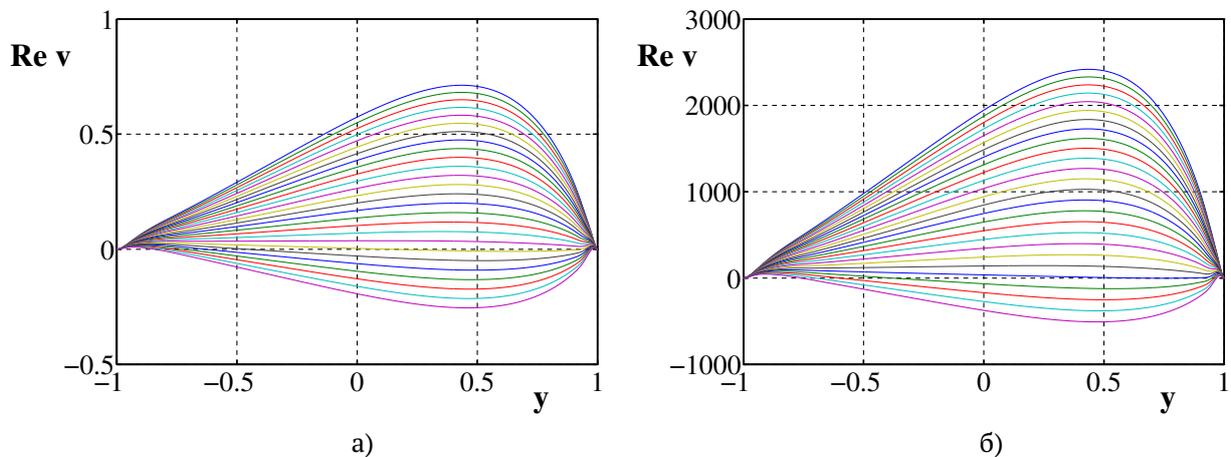


Рис. 5. Вещественная и мнимая части возмущений поперечной скорости первого собственного значения для жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $Re = 10^4$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha_E = 1$ : а)  $t = 0$ ; б)  $t = 10^3$

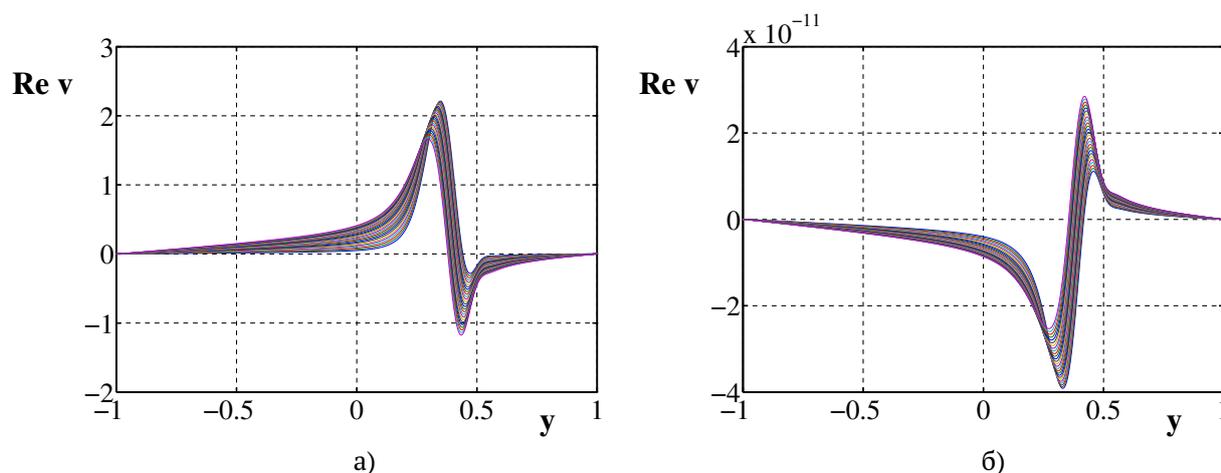


Рис. 6. Вещественная часть возмущений поперечной скорости второго собственного значения для жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры и параметрами  $Re = 10^4$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha_E = 1$ : а)  $t = 0$ ; б)  $t = 10^3$

## Список литературы

- [1] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // J. of Fluid Mech. 1971. V. 50, № 4 Pp. 689–703.  
DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [2] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. 1977. 421 с.
- [3] Potter M.C., Graber E.J. Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // Nasa technical note. Nasa TN D-6027. 1970. 12 p.  
<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/197000031354.pdf>
- [4] Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 10. С. 1672–1691.  
<http://mi.mathnet.ru/zvmmf229>
- [5] Урманчев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады академии наук. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=17352428>
- [6] Низамова А.Д. Влияние температурной зависимости вязкости на устойчивость плоскопараллельного течения жидкости // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2014. Вып. 10. С. 90–94.  
DOI: [10.21662/uim2014.1.017](https://doi.org/10.21662/uim2014.1.017)
- [7] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчев С.Ф. О влиянии зависимости вязкости от температуры на устойчивость течения жидкости // Известия УНЦ РАН. 2014. № 4. С. 12–16.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=24326737>
- [8] Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 454–459.  
DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)
- [9] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчев С.Ф. Влияние зависимости вязкости на спектральные характеристики уравнения устойчивости течения термовязких жидкостей // Многофазные системы. 2019. Т. 14. № 1. С. 52–58.  
DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)



## Research of eigenfunctions perturbation of the transverse component velocity thermoviscous liquids flow

Nizamova A.D.\*, Kireev V.N.\*\*, Urmancheev S.F.\*

\*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

\*\*Bashkir State University, Ufa, Russia

The viscous model fluid flow in a plane channel with a linear temperature profile is considered. The problem of the thermoviscous fluid flow stability is solved on the basis of the previously obtained generalized Orr–Sommerfeld equation by the spectral method of decomposition into Chebyshev polynomials. We study the effect of taking into account the linear and exponential dependences of the viscosity of a liquid on temperature on the eigenfunctions of the hydrodynamic stability equation and on perturbations of the transverse velocity of an incompressible fluid in a plane channel when various wall temperatures are specified. Eigenfunctions are found numerically for two eigenvalues of the linear and exponential dependence of viscosity on temperature. Presented pictures of their own functions. The eigenfunctions demonstrate the behavior of the transverse velocity perturbations, their possible growth or attenuation over time. For the given eigenfunctions, perturbations of the transverse flow velocity of a thermoviscous fluid are obtained. It is shown that taking the temperature dependence of viscosity into account affects the eigenfunctions of the equations of hydrodynamic stability and perturbations of the transverse flow velocity. Perturbations of the transverse velocity significantly affect the hydrodynamic instability of the fluid flow. The results show that when considering the unstable eigenvalue over time, the velocity perturbations begin to grow, which leads to turbulence of the flow. The maximum values of the eigenfunctions and perturbations of the transverse velocities are shifted to the hot wall. It is seen that for an unstable eigenvalue, the perturbations of the transverse flow velocity increase over time, and for a stable one, they decay.

**Keywords:** thermoviscous liquid, eigenfunctions, perturbations of cross section velocity, hydrodynamics instability

### References

- [1] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 50. 1971. V. 50, № 4 Pp. 689–703.  
DOI: 10.1017/S0022112071002842
- [2] Gol'dshtik M.A., Shtern V.N. [Hydrodynamic stability and turbulence] Novosibirsk: Nauka. 1977. 421 p. (in Russian).
- [3] Potter M.C., Graber E.J. Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // *Nasa technical note.* Nasa TN D-6027. 1970. 12 p.  
<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19700031354.pdf>
- [4] Skorohodov S.L. Numerical analysis of the spectrum of the Orr–Sommerfeld problem // *Computational mathematics and mathematical physics.* 2007. Vol. 47. Issue 10. Pp. 1603–1621.  
DOI: 10.1134/S096554250710003X
- [5] Urmancheev S.F., Kireev V.N. Steady flow of a fluid with an anomalous temperature dependence of viscosity // *Doklady Physics.* 2004. V. 49, № 5. Pp. 328–331.  
DOI: 10.1134/1.1763627
- [6] Nizamova A.D. [Influence of the temperature dependence of viscosity on the stability of plane-parallel fluid flow] *Trudy Instituta mexaniki im. R.R. Mavlutov URC RAS.* 2014. № 10. P. 90–94 (in Russian).  
DOI: 10.21662/uim2014.1.017
- [7] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. [Influence of temperature dependence of viscosity on fluid flow stability] *Izvestiya URC RAS.* 2014. № 4. Pp. 12–16 (in Russian).  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=24326737>
- [8] Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F. [Some features of the hydrodynamic instability of the flow of a thermally viscous fluid in a flat channel] *Prikladnaya mexanika i matematika.* 2019. Vol. 83, № 3. Pp. 454–459 (in Russian).  
DOI: 10.1134/S003282351903007X
- [9] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. [Influence of viscosity temperature dependence on the spectral characteristics of the thermoviscous liquids flow stability equation] *Multiphase systems.* 2019. Vol. 14, № 1. Pp. 52–58. (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2019.1.007



## Продольные колебания стержня с переменным сечением

Утяшев И.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Стержни с переменным сечением находят применение во многих деталях и механизмах. Например, конические стержни широко применяются в ударных механизмах. Прочность таких деталей напрямую зависит от собственных частот продольных колебаний. В настоящей работе представлен метод, позволяющий численно найти собственные частоты продольных колебаний упругого стержня с переменным сечением. Данный метод основан на представлении площади сечения в виде экспоненциальной функции от полинома степени  $n$ . На основе такого представления удалось составить задачу Штурма–Лиувилля с граничными условиями третьего рода. Линейно независимые функции общего решения имеют вид степенного ряда по переменным  $x$  и  $\lambda$ , вследствие чего порядок характеристического уравнения зависит от выбора количества членов ряда. Приведенный подход отличается от работ других авторов как по постановке, так и методом решения. В работе рассмотрен стержень с жестко закрепленным левым концом, закрепление на правом конце может быть либо свободным, либо упругим или жестким. Приведены первые три собственные частоты для различных профилей сечения. Из анализа численных результатов следует, что у жестко закрепленного стержня с утончением в средней части первая собственная частота заметно выше, чем у конического стержня. Показано, что с увеличением жесткости закрепления на правом конце собственные частоты растут для всех профилей сечения. Результаты исследования могут найти применение для решения обратных задач по восстановлению профиля сечения по конечному набору собственных частот.

**Ключевые слова:** стержень, собственные частоты, собственные значения, продольные колебания, функция сечения, площадь сечения

### 1. Введение

Стержни с переменным сечением широко применяются в ударных механизмах [1]. Такие объекты называются концентраторами. Прочность этих механизмов напрямую зависит от собственных частот продольных колебаний. Например, в работе [2] рассмотрены продольные колебания упругих стержней переменного сечения конического, экспоненциального и катеноидального типов. Получены аналитические выражения коэффициентов усиления концентраторов в случаях задания граничных условий первого и второго рода.

В [3] с помощью перехода к интегральным уравнениям и применения метода последователь-

ных приближений получено решение для консольного стержня с сечением, заданным в виде функции от продольной координаты.

В случае, когда стержень является составным, то есть состоит из двух и более частей с различными диаметрами, такие объекты моделируются в виде ступенчатых стержней [4, 5]. В [5] приведены результаты решения не только прямой, но и обратной задач, где представлен метод, позволяющий по трем низшим собственным частотам продольных колебаний определить начальную координату и величину прикрепленной распределенной массы к ступенчатому стержню, а также отношение площадей.

Исследования собственных колебаний стержней переменного сечения могут быть полезны для неразрушающего контроля. Например, в работе [6]

исследована эволюция характеристик собственных продольных колебаний круглого стержня при увеличении дефекта его поперечного сечения.

В [7] рассмотрены собственные поперечные колебания прямого стержня с поперечным сечением прямоугольной формы, имеющим постоянную высоту и переменную ширину, изменяющуюся по экспоненциальному закону. Методом сплайнов степени 5 получены значения частот собственных колебаний при различных функциях изменения поперечного сечения стержня и способах его закрепления.

В настоящей работе предлагается описывать площадь сечения в виде экспоненциальной функции от полинома степени  $n$ .

## 2. Постановка и решение задачи

Свободные продольные колебания стержня длины  $L$  описываются уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  — перемещение сечения с координатой  $x$ ;  $F(x)$  — площадь поперечного сечения стержня с координатой  $x$ ;  $t$  — время; модуль упругости  $E$  и плотность  $\rho$  стержня считаются постоянными. Граничные условия (условия Робена) для струны единичной длины ( $L = 1$ ) имеют вид:

$$u_x(0) - hu(0) = 0, \quad u_x(1) + Hu(1) = 0,$$

где  $h, H$  — жесткость пружины на левом и правом концах соответственно.

Решение уравнения (1) будем искать в виде  $u = y(x) \cos(\omega t)$  ( $\omega$  — частота), тогда (1) запишется в виде:

$$(Fy')' + \lambda^2 Fy = 0 \quad (2)$$

где  $\lambda^2 = \frac{\rho \omega^2}{E}$ .

В настоящей работе предлагается площадь поперечного сечения стержня в точке  $x$  принять в виде экспоненциальной функции от полинома степени  $n$ :

$$F(x) = e^{P(x)}, \quad (3)$$

где  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , коэффициент  $a_0$  соответствует значению площади сечения в точке начала отсчета. Подставив (3) в (2), учитывая, что  $P'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$ , получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$-y'' - P'(x)y' = \lambda^2 y, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_1(y) &= y'(0) - hy(0) = 0, \\ U_2(y) &= y'(1) + Hy(1) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Метод решения аналогичен методу, представленному в [9], где отличие заключается в основном уравнении (4). Общее решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$y(x, \lambda) = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (6)$$

Здесь  $y_1, y_2$  — линейно-независимые решения уравнения (4). Функции  $y_1, y_2$  будем строить в виде ряда Маклорена по переменным  $x$  и  $\lambda$ , для которых должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} y_1(0, \lambda) &= 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \\ y_2(0, \lambda) &= 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Условие (7) необходимо для линейной независимости функции  $y_1, y_2$ . Тогда  $y_1, y_2$ , при условии (7), запишутся в виде бесконечного ряда:

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= 1 - \lambda \frac{x^2}{2!} + P'(0) \cdot \lambda^2 \frac{x^3}{3!} + \\ &+ \left( 2\lambda^2 P''(0) - \lambda^2 \cdot P'^2(0) + \lambda^4 \right) \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x, \lambda) &= x - P'(0) \frac{x^2}{2!} - \left( P''(0) - P'^2(0) + \lambda^2 \right) \frac{x^3}{3!} - \\ &- \left( P'''(0) - 3P'(0)P''(0) + P'^3(0) + 2\lambda^2 P'(0) \right) \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Причем  $y_1, y_2$  являются целыми функциями по  $\lambda$  при каждом фиксированном  $x$ .

Подставив (6) в граничные условия (5), с учетом (7), имеем

$$\begin{aligned} -h \cdot C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 (y_1'(1, \lambda) - H \cdot y_1(1, \lambda)) + \\ + C_2 (y_2'(1, \lambda) - H \cdot y_2(1, \lambda)) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Условием существования нетривиального решения линейной алгебраической системы (8) для коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  является равенство нулю определителя этой системы (см. [8]):

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} -h & 1 \\ U_2(y_1(1, \lambda)) & U_2(y_2(1, \lambda)) \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразуя данный определитель, получим

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= -y_1'(1, \lambda) - H \cdot y_1(1, \lambda) - \\ -h \cdot y_2'(1, \lambda) - h \cdot H \cdot y_2(1, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Нули характеристического определителя (9) являются собственными числами задачи (4)–(5).

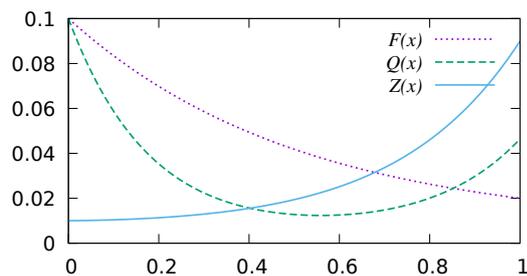


Рис. 1. Функции площади сечения

### 3. Анализ результатов

Рассмотрим три вида функции сечения (см. рис. 1):

$$F(x) = \exp(-2.3026 - 2.0557x + 0.4463x^2),$$

$$Q(x) = \exp(-2.3026 - 8.4428x + 7.6753x^2),$$

$$Z(x) = \exp(-4.6052 - 0.0527x + 2.2499x^2),$$

где  $F(x)$  — стержень конической формы (концентратор);  $Q(x)$  — стержень с утончением вблизи середины;  $Z(x)$  — стержень конической формы, закрепленный в узкой части.

Рассмотрим собственные частоты продольных колебаний стержня при различных закреплениях на правом конце (на левом конце ( $x = 0$ ) — жесткое закрепление). В табл. 1–3 приведены соответственно первая, вторая и третьи частоты колебания.

Как видно из полученных данных для функции

Таблица 1. Зависимость первой частоты от закрепления и функции сечения

Функция	Вид закрепления в точке $x = 1$		
	жесткое	упругое	свободное
$F(x)$	3.3120	2.5979	2.1175
$Q(x)$	4.4184	3.2812	1.4990
$Z(x)$	3.6695	2.6194	0.9346

Таблица 2. Зависимость второй частоты от закрепления и функции сечения

Функция	Вид закрепления в точке $x = 1$		
	жесткое	упругое	свободное
$F(x)$	6.3708	5.2781	4.9435
$Q(x)$	7.1701	5.6093	5.2030
$Z(x)$	6.5803	5.0764	4.6400

Таблица 3. Зависимость первой частоты от закрепления и функции сечения

Функция	Вид закрепления в точке $x = 1$		
	жесткое	упругое	свободное
$F(x)$	9.4835	8.227	7.9964
$Q(x)$	10.0620	8.4463	8.2042
$Z(x)$	9.6271	8.0720	7.8155

$Q(x)$  при жестком закреплении первая частота заметно выше, чем  $F(x)$  и  $Z(x)$ . Также из табл. 1–3 можно заметить, что с увеличением жесткости закрепления на правом конце собственные частоты растут. Для случая симметричных граничных условий собственные частоты для функций  $F(x)$  и  $Z(x)$  очень близки, но не совпадают, так как  $F(x)$  и  $Z(x)$  несимметричны относительно середины стержня.

### 4. Заключение

Предложенный в настоящей работе метод представления площади сечения в виде экспоненциальной функции от полинома степени  $n$  позволяет численно найти собственные частоты колебания стержня. Данный подход может найти применение при решении обратной задачи, когда по собственным частотам требуется восстановить закон изменения площади сечения. Анализ результатов численных экспериментов для различных закреплений и профилей продольного сечения показал, что с увеличением жесткости закрепления растут и собственные частоты. К недостаткам метода можно отнести то, что при моделировании сложных форм сечения, например острых углов, получается полином большой степени, что, в свою очередь, значительно влияет на точность решения.

### Список литературы

- [1] Манжосов В.К. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры / В.К. Манжосов, В.В. Слепухин. Ульяновск: УлГТУ, 2011. 208 с.
- [2] Промыслова А.С. Продольные колебания упругих стержней переменного сечения (концентраторов) // МТТ. 2008. № 6. С. 118–127. <https://elibrary.ru/item.asp?id=13064258>
- [3] Биргер И.А. Сопrotивление материалов: Учеб. пособие. / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов М.: Наука, 1986. 560 с.
- [4] Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3. М.: Машиностроение, 1959. 1116 с.
- [5] Хакимов А.Г. О собственных продольных колебаниях ступенчатого стержня с распределенной присоединенной массой // Контроль. Диагностика. 2013. № 11. С. 9–13. <https://elibrary.ru/item.asp?id=20519086>
- [6] Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В. Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // МТТ. 2017. № 6. С. 136–144. DOI: 10.15507/2079-6900.20.201802.148-158
- [7] Павлов В.П. Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2017. Т. 21, № 2 (76). С. 3–16. <http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/62/26>
- [8] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
- [9] Утяшев И.М., Ахтямов А.М. Определение локальной неоднородности среды по собственным частотам колебаний струны // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 99–106. DOI: 10.21662/mfs2018.4.014



## Longitudinal oscillation of a rod with a variable cross section

Utyashev I.M.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Variable cross-section rods are used in many parts and mechanisms. For example, conical rods are widely used in percussion mechanisms. The strength of such parts directly depends on the natural frequencies of longitudinal vibrations. The paper presents a method that allows numerically finding the natural frequencies of longitudinal vibrations of an elastic rod with a variable cross section. This method is based on representing the cross-sectional area as an exponential function of a polynomial of degree  $n$ . Based on this idea, it was possible to formulate the Sturm-Liouville problem with boundary conditions of the third kind. The linearly independent functions of the general solution have the form of a power series in the variables  $x$  and  $\lambda$ , as a result of which the order of the characteristic equation depends on the choice of the number of terms in the series. The presented approach differs from the works of other authors both in the formulation and in the solution method. In the work, a rod with a rigidly fixed left end is considered, fixing on the right end can be either free, or elastic or rigid. The first three natural frequencies for various cross-sectional profiles are given. From the analysis of the numerical results it follows that in a rigidly fixed rod with thinning in the middle part, the first natural frequency is noticeably higher than that of a conical rod. It is shown that with an increase in the rigidity of fixation at the right end, the natural frequencies increase for all cross section profiles. The results of the study can be used to solve inverse problems of restoring the cross-sectional profile from a finite set of natural frequencies.

**Keywords:** rod, eigenfrequencies, eigenvalues, longitudinal vibrations, section function, section area

### References

- [1] Manzhosov V. K. [Modeling of longitudinal impact in bar systems of heterogeneous structure] *Modelirovanie prodol'nogo udara v sterzhnevyykh sistemakh neodnorodnoy struktury* / V.K. Manzhosov, V.V. Slepuxin. Ul'yanovsk: UlGTU, 2011. P. 208 (in Russian).
- [2] Promyslova A.S. Longitudinal vibrations of elastic rods of variable cross-section (concentrators) // *Mech. Solids*. 2008. No. 43. Pp. 939–947.  
DOI: 10.3103/S0025654408060113
- [3] Birger I.A. [Strength of materials] *Soprotivlenie materialov: Ucheb. posobie* / I.A. Birger, R.R. Mavlyutov M.: Nauka, 1986. P. 560 (in Russian).
- [4] Ponomarev S.D. [Strength calculations in mechanical engineering] *Raschety na prochnost' v mashinostroenii*. V. 3. M.: Mashinostroenie, 1959. P. 1116 (in Russian).
- [5] Xakimov A.G. [On natural longitudinal vibrations of a stepped rod with a distributed attached mass] *O sobstvennykh prodol'nykh kolebaniyakh stupenchatogo sterzhnya s raspredelennoy prisoedinennoy massoy* // *Kontrol'. Diagnostika*. 2013. No. 11. Pp. 9–13 (in Russian).  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=20519086>
- [6] Akulenko, L.D., Baidulov, V.G., Georgievskii, D.V. et al. Evolution of Natural Frequencies of Longitudinal Vibrations of a Bar as Its Cross-Section Defect Increases // *Mech. Solids*. 2017. No. 52. Pp. 708–714.  
DOI: 10.3103/S0025654417060103
- [7] Pavlov V.P. [Transverse vibrations of a rod with a variable cross section and the calculation of its natural frequencies by the splines method] *Poperechnye kolebaniya sterzhnya s peremennym poperechnym secheniem i vychislenie ego sobstvennykh chastot metodom splajnov* // *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviacionnogo texnicheskogo universiteta*. 2017. V. 21, No. 2 (76). Pp. 3–16 (in Russian).  
<http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/62/26>
- [8] Najmark M.A. [Linear Differential Operators] *Linejnye differentsial'nye operatory*. M.: Nauka, 1969. P. 526 (in Russian).
- [9] Utyashev I.M., Akhtyamov A.M. Determination of local inhomogeneity of the medium from the natural frequencies of string oscillations // *Multiphase Systems*. 2018. V. 13, № 4. Pp. 99–106.  
DOI: 10.21662/mfs2018.4.014



## Математическая модель распространения многофазного течения для случая повреждения подводного трубопровода<sup>1</sup>

Кильдибаева С.Р., Далинский Э.Т., Кильдибаева Г.Р.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак

В работе рассматривается модель течения углеводородов из поврежденного подводного трубопровода, через который транспортируются нефть и сопутствующий газ. Процесс миграции нефти и газа описывается течением многофазной затопленной струи. Известны температура истекающих из трубопровода углеводородов, их начальная скорость, температура окружающей воды и глубина пролегания трубопровода. Рассматриваются два случая различных начальных параметров истечения углеводородов из трубопровода. В первом случае термобарические условия окружающей среды отвечают условиям образования и стабильного существования гидрата. Такой случай соответствует условиям истечения углеводородов в Мексиканском заливе. Во втором случае гидрат не образуется. Такие истечения соответствуют случаям транспортировки нефти по трубопроводам в Балтийском море (например, «Северный поток–2»). Для процесса гидратообразования характерна следующая динамика изменения пузырька: сначала он будет полностью газовым, затем на его поверхности начнет образовываться гидратная оболочка (композитный пузырек), затем пузырек полностью станет гидратным, что является завершающим этапом. Для моделирования динамики распространения струи углеводородов рассмотрен интегральный Лагранжевый метод контрольного объема, согласно которому струя рассматривается в виде последовательности контрольных объемов. При моделировании течения струи учитываются законы сохранения массы, импульса и энергии для компонент, входящих в контрольный объем. Уравнения записаны с учетом возможного образования гидрата. В работе получены теплофизические характеристики углеводородов, поступающих из поврежденного трубопровода, для случаев глубоководного и мелководного пролегания трубопровода. Проанализированы траектории миграции углеводородов, зависимость температуры и плотности струи от вертикальной координаты.

**Ключевые слова:** углеводороды, разлив нефти, разрыв трубопровода, нефть, метан, гидратообразование, гидрат

### 1. Введение

Уменьшение запасов нефти и газа в недрах континента приводит к увеличению добычи углеводородов на дне Мирового океана [1]. Такой метод добычи увеличивает риски возникновения аварийных ситуаций, последствиями которых являются разлив нефти и последующее загрязнение водоема, гибель флоры и фауны региона [2, 3]. К таким же

последствиям может приводить транспортировка углеводородов с использованием подводных трубопроводов. При разрыве трубопровода нефть и газ также могут попадать в водоем.

Для случая миграции углеводородов из поврежденной скважины или при разрыве трубопровода примем, что течение происходит в виде затопленной струи [4]. Пусть в начальный момент известны температура истекающих из трубопровода углеводородов, их начальная скорость, температура окружающей воды и глубина пролегания трубопровода. В зависимости от глубины пролегания и условий окружающей среды возможны различные варианты состава струи. В работе рассматривается два случая различных начальных параметров ис-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-31-00264 мол\_а).

течения углеводородов из трубопровода. В первом случае термобарические условия окружающей среды отвечают условиям образования и стабильного существования гидрата. Такой случай соответствует случаям разливов углеводородов в Мексиканском заливе. Во втором случае термобарические условия окружающей среды отвечают условиям, когда течение происходит без фазовых переходов и на поверхности газовых пузырьков не образуется гидратная оболочка. Такой случай соответствует возможному разливу, возникающему при повреждении трубопровода, который транспортирует углеводороды в Балтийском море (например, трубопровод «Северный поток-2»).

Для моделирования динамики распространения струи углеводородов будет рассмотрен интегральный Лагранжевый метод контрольного объема (ИЛМКО), согласно которому струя рассматривается в виде последовательности элементарных контрольных объемов (КО) [5–7]. ИЛМКО дополнен соотношениями, соответствующими процессу образования гидрата. При моделировании течения струи учитываются законы сохранения массы, импульса и энергии для компонент, входящих в контрольный объем.

В связи с увеличением объемов добычи нефти в глубоководных месторождениях Мирового океана возрастает вероятность разливов нефти в океан. Зачастую такие разливы носят техногенный характер — повреждение скважин, нефтепроводов и буровых установок. Причиной разлива может стать коррозия трубопровода, механическое повреждение нефтедобывающей конструкции, пожар и т.д. Разливы нефти в Мексиканском заливе на платформах Deerwater Horizon, Ixtoc-1, а также в заливе Аляска Exxon Valdez являются яркими примерами, которые свидетельствуют о необходимости изучения методов устранения утечек. За последнее десятилетие в результате аварий по всему миру в Мировой океан вылилось более 1 миллиарда галлонов нефти, что свидетельствует о серьезном масштабе проблемы.

В связи с возможными утечками углеводородов в воды Мирового океана существует необходимость исследования особенностей распространения нефтепродуктов. Прогноз миграции нефтепродуктов позволит сократить время ликвидации утечки. Для этого важно изучать особенности распространения нефти и сопутствующего газа, их взаимодействие с окружающей водой, а также исследовать влияние подводных течений на распространение нефти в окружающей среде. Для анализа распространения траектории струи, прогнозирования ее поведения и теплофизических ха-

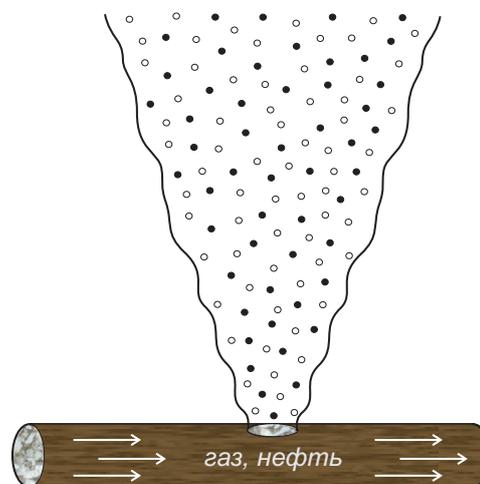


Рис. 1. Схема течения углеводородов в виде затопленной струи при повреждении подводного трубопровода

рактеристик был использован ИЛМКО. Согласно методике расчета струи представляется в виде последовательности КО, каждый из которых характеризуется показателями температуры, скорости, плотности, расположения в пространстве, а также объемному содержанию каждой из компоненты в струе. Зная изменения данных параметров от вертикальной координаты, получим сведения о распространении струи.

## 2. Постановка задачи и основные уравнения

Примем, что на дне водоема существует некоторый источник истечения нефтепродуктов (рис. 1). Возникновение источника имеет техногенный характер и может быть вызвано разрывом трубопровода или аварией на нефтедобывающей конструкции. В качестве начальных параметров, описывающих течение струи, используются параметры радиуса источника ( $r$ ), температура поступающих из источника углеводородов ( $T^e$ ), объемные расходы поступающих углеводородов ( $Q_o^e, Q_g^e$ ), температура и скорость течения окружающей среды ( $T_w, \vec{V}_w$ ). В рамках модели условимся, что нефть распространяется в виде капель, а газ — в виде пузырьков. Под действием течения окружающей среды струя может отклоняться, а пузырьки газа (гидрата) покидать пределы струи.

Для моделирования распространения многофазной струи используем следующую систему уравнений:

$$\frac{dM}{dt} = \rho_w Q_w - \rho_{com} Q^f, \quad (1)$$

$$\rho = \sum_i \alpha_i \rho_i, \quad \sum_i \alpha_i = 1, \quad \alpha_i = V_{ki}/V_k,$$

$$\frac{d}{dt}(cMT) = c_w T_w \rho_w Q_w + J_h L - J_w c_w T_{hs}, \quad (2)$$

$$c = \sum_i \chi_i c_i, \quad \chi = M_i/M,$$

$$J_g = G \cdot J_h, \quad J_w = (1 - G)J_h, \quad J_h = N4\pi a_{gh}^2 j_h, \quad (3)$$

$$\frac{dz}{dt} = w, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}(Mu) = u_w \rho_w Q_w - u \rho_{com} Q^f,$$

$$\frac{d}{dt}(Mv) = v_w \rho_w Q_w - v \rho_{com} Q^f,$$

$$\frac{d}{dt} = [(M_w + M_o)w + (M_g + M_h) \cdot (w + w_b)] = \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= w_w \rho_w Q_w - (w + w_b) \rho_w Q^f + \\ &+ (\rho_w - \rho_l) \pi b^2 h (\alpha_w + \alpha_o) g + \\ &+ (\rho_w - \rho_{com}) \pi b^2 h (\alpha_g + \alpha_h) g. \end{aligned}$$

Здесь  $V_k$  — контрольный объем;  $M$  — масса КО;  $b$ ,  $h$  — радиус и высота КО;  $Q_w$  — объемный расход вовлеченной в струю окружающей воды;  $Q^f$  — объемный расход газа/гидрата, «покидающий» КО в связи с искривлением струи;  $j_h$  — интенсивность образования гидрата, отнесенная к площади поверхности пузырька;  $g$  — сила тяжести;  $w_b$  — скорость пузырька;  $J_i$  — интенсивности воды, газа и гидрата при образовании гидрата;  $G$ , — гидратное число;  $a_{gh}$ ,  $\rho_{com}$ ,  $N$  — радиус, плотность и количество пузырьков в КО;  $V_{ki}$  — объем;  $\chi_i = M_i/M$  — массовое содержание;  $M_i$  — масса;  $\rho_i$  — плотность;  $\alpha_i$  — объемное содержание;  $c_i$  — теплоемкость  $i$ -й компоненты в КО; нижние индексы ( $i = o, g, h, w$ ) соответствуют нефти, газу, гидрату и воде.

Система уравнений (1)–(5) включает в себя уравнение сохранения масс, энергии, импульсов, а также вспомогательные соотношения, описывающие процесс гидратообразования и изменения пространственных КО в пространстве.

### 3. Результаты расчетов

Результаты расчетов приведены для двух случаев. Первый случай отвечает условиям стабильного существования гидрата. Второй случай соответствует истечению углеводородов без фазовых переходов и соответственно гидратообразования. Линейные размеры цилиндрического контрольного объема (радиус и высота) в начальный момент

времени соответствуют радиусу источника, из которого поступают нефть и газ.

Начальные параметры для случая глубоководного разлива:  $r = 0.2$  м,  $T^e = 80^\circ\text{C}$ ,  $Q_o^e = 0.5$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_g^e = 0.5$  м<sup>3</sup>/с,  $T_w = 10^\circ\text{C}$ ,  $V_w = 0$  м/с,  $\rho_o = 650$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_h = 910$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_w = 1010$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_g = 99.25$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_o = 10^{-3}$  м,  $p_0 = 15$  МПа. Глубина разлива  $h_z = 1500$  м, температура окружающей воды  $4^\circ\text{C}$ .

Начальные параметры для случая мелководного разлива:  $r = 0.2$  м,  $T^e = 60^\circ\text{C}$ ,  $Q_o^e = 0.1$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_g^e = 0.1$  м<sup>3</sup>/с,  $T_w = 10^\circ\text{C}$ ,  $V_w = 0$  м/с,  $\rho_o = 850$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_g = 7.3$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_o = 10^{-3}$  м,  $p_0 = 1$  МПа. Глубина разлива  $h_z = 100$  м, температура окружающей воды  $10^\circ\text{C}$ .

На рис. 2 представлены траектории струи для двух случаев. Здесь и далее фрагмент (а) соответствует случаю, когда течение струи происходит в условиях стабильного существования гидрата,

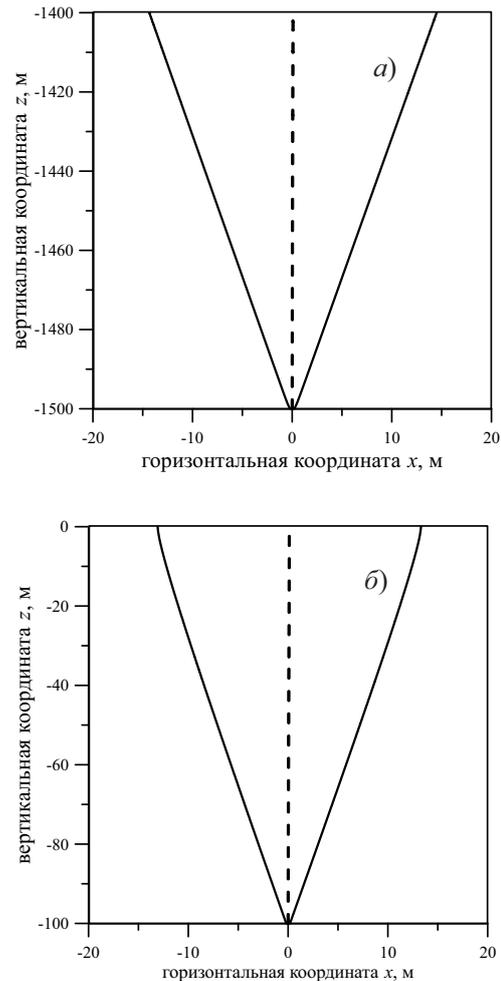


Рис. 2. Траектория струи для случая глубоководного (а) и мелководного (б) разливов

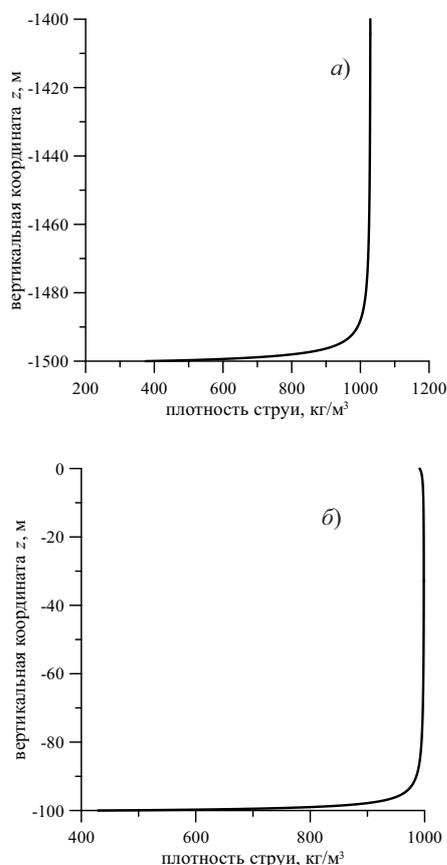


Рис. 3. Плотность струи для случая глубоководного (а) и мелководного (б) разливов

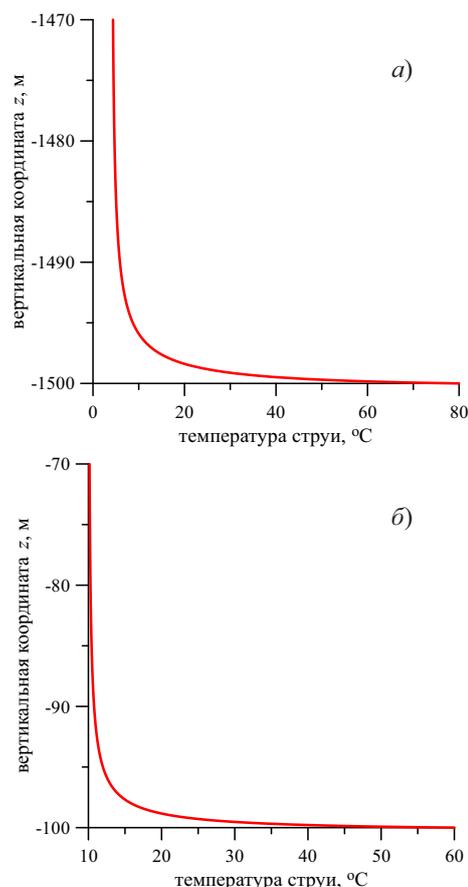


Рис. 4. Температура струи для случая глубоководного (а) и мелководного (б) разливов

фрагмент (б) — случаю мелководного разлива, когда давление и температура не соответствуют условиям стабильного существования гидрата. Таким образом, в первом случае в составе струи помимо капель нефти, пузырьков газа и вовлеченной в струю воды, присутствуют композитные пузырьки (пузырьки метана, на которых начинается гидратообразование). Для описания процесса гидратообразования принята модель, основанная на диффузионном переносе газа через гидратную оболочку. Более подробно модель описана в работах [8, 9]. На рис. 2 видно, что для каждого случая траектория струи расширяется. Это связано с взаимодействием с окружающей водой и процессом «захвата» окружающей воды в струю. Степень расширения радиуса струи зависит от скорости струи, состава компонентов струи, наличия образования гидрата.

На рис. 3 представлена зависимость плотности струи от вертикальной координаты. Начальное значение плотности струи зависит от объемных

расходов компонентов струи, поступающих из поврежденного трубопровода. Значение плотности струи возрастает с увеличением объема воды, вовлекаемой в струю из окружающей воды. Так, плотность струи возрастает до значения, соответствующего плотности окружающей воды: до  $1030 \text{ kg/m}^3$  для первого случая (а) и до  $1010 \text{ kg/m}^3$  для второго случая (б).

На рис. 4 представлена зависимость температуры струи от вертикальной координаты. Согласно графикам наблюдается уменьшение температуры струи в связи с взаимодействием с более холодной окружающей водой. Температура струи уменьшается до температуры окружающей среды.

#### 4. Выводы

В работе рассмотрена модель течения углеводородов для двух случаев: случай, когда глубина пролегания трубопровода соответствует условиям стабильного существования гидрата (глубоковод-

ный случай) и случай, когда глубина пролегания трубопровода не соответствует условиям гидратообразования (мелководный случай). Первый случай отвечает условиям добычи и транспортировки в Мексиканском заливе, второй случай — транспортировке углеводородов через трубопроводы в Балтийском море (например, «Северный поток–2»).

Исследованы особенности распространения углеводородов для каждого из случаев, получены траектории струи, зависимости теплофизических параметров струи по вертикальной координате от начальных условий пролегания трубопровода.

### Список литературы

- [1] Akhmetov R.R., Krainov S.A. Oil spills from offshore drilling and development: causes and effects on plants and animals // *European Science*. 2017. № 8(30). С. 16–21.  
<https://cyberleninka.ru/article/n/17902399>
- [2] Богоявленский В.И., Баринев П.С., Богоявленский И.В. Катастрофа в мексиканском заливе на месторождении Ixtoc комплекса Cantarell // *Бурение и нефть*. 2018. № 1. С. 3–13.  
<https://burneft.ru/archive/issues/2018-01/3>
- [3] Лаврова О.Ю., Костяной А.Г. Катастрофический разлив нефти в мексиканском заливе в апреле–мае 2010 г. // *Исследование Земли из космоса*. 2010. № 6. С. 67–72.  
<http://naukarus.com/katastroficheskiy-razliv-nefti-v-meksikanskom-zalive-v-aprele-mae-2010-g>
- [4] Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р. Модель затопленной струи с учетом двух предельных схем гидратообразования // *Теплофизика и аэромеханика*. 2018. Т. 25, № 1. С. 79–88.  
[https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=172742&ARTICLE\\_ID=172749](https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=172742&ARTICLE_ID=172749)
- [5] Yapa P.D. Final Report Submitted to The Cooperative Institute for Coastal and Estuarine Environmental Technology (CICEET) Project Title: A Module for NOAA's GNOME Model to Provide Capability to Simulate Deepwater Oil and Gas Spills. 2003. P. 1–18.  
<https://crrc.unh.edu/sites/crrc.unh.edu/files/yapa-ciceet-final-pp1-18.pdf>
- [6] Yapa P.D., Zheng L. Simulation of oil spills from underwater accidents I: model development // *Journal of hydraulic research, international association of hydraulic research, The Netherlands*. 1997. Vol. 35, № 5. P. 673–688.  
[DOI: 10.1080/00221689709498401](https://doi.org/10.1080/00221689709498401)
- [7] Chen F., Yapa P.D. Three-dimensional visualization of multi-phase (oil/gas/hydrate) plumes // *Environmental Modelling & Software*. 2004. V. 19, No. 7–8. Pp. 751–760.  
[DOI: 10.1016/j.envsoft.2003.08.008](https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2003.08.008)
- [8] Шагапов В.Ш., Тазетдинов Б.И. Образование и разложение газогидратных включений при миграции в воде // *Теплофизика и аэромеханика*. 2014. Т. 21, № 3. С. 355–364.  
<https://www.sibran.ru/upload/iblock/ef2/ef2873e7e9f36ed1a13028edb003dd6b.pdf>
- [9] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Русинов А.А. О Механизмах роста гидратной оболочки на поверхности всплывающих газовых пузырьков // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2015. № 3. С. 73–86.  
[DOI: 10.17223/19988621/35/10](https://doi.org/10.17223/19988621/35/10)



## Mathematical model of multiphase flow propagation for the case of underwater pipeline damage

Kildibaeva S.R., Dalinskij E.T., Kildibaeva G.R.

Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak

The paper deals with the case of damage to the underwater pipeline through which oil and associated gas are transported. The process of oil and gas migration is described by the flow of a multiphase submerged jet. At the initial moment, the temperature of the incoming hydrocarbons, their initial velocity, the temperature of the surrounding water, the depth of the pipeline is known. The paper considers two cases of different initial parameters of hydrocarbon outflow from the pipeline. In the first case, the thermobaric environmental conditions correspond to the conditions of hydrate formation and stable existence. Such a case corresponds to the conditions of the hydrocarbons flow in the Gulf of Mexico. In the second case, hydrate is not formed. Such flows correspond to the cases of oil transportation through pipelines in the Baltic sea (for example, Nord stream–2). The process of hydrate formation will be characterized by the following dynamics of the bubble: first, it will be completely gas, then a hydrate shell (composite bubble) will begin to form on its surface, then the bubble will become completely hydrate, which will be the final stage. The integral Lagrangian control volume method will be considered for modeling the dynamics of hydrocarbon jet propagation. According to this method, the jet is considered as a sequence of elementary volumes. When modeling the jet flow, the laws of conservation of mass, momentum and energy for the components included in the control volume are taken into account. The equations are used taking into account the possible formation of hydrate. Thermophysical characteristics of hydrocarbons coming from the damaged pipeline for cases of deep-water and shallow-water pipeline laying are obtained. The trajectories of hydrocarbon migration, the dependence of the jet temperature and density on the vertical coordinate are analyzed.

**Keywords:** hydrocarbons, oil spill, pipeline rupture, oil, methane, hydrate formation, hydrate

### References

- [1] Akhmetov R.R., Krainov S.A. Oil spills from offshore drilling and development: causes and effects on plants and animals // European Science. 2017. № 8(30). C. 16–21.  
<https://cyberleninka.ru/article/n/17902399>
- [2] Bogoyavlenskij V.I., Barinov P.S., Bogoyavlenskij I.V. Katastrofa v meksikanskom zalive na mestorozhdenii Ixtoc kompleksa Cantarell [Katastrofa v meksikanskom zalive na mestorozhdenii Ixtoc kompleksa Cantarell]. Burenie i neft – Drilling and oil. 2018. No. 1. Pp. 3–13 [in Russian].  
<https://burneft.ru/archive/issues/2018-01/3>
- [3] Lavrova O.YU., Kostyanov A.G. Katastroficheskiy razliv nefti v meksikanskom zalive v aprele-mae 2010 g [Catastrophic oil spill in the Gulf of Mexico in May–April 2010]. Issledovanie Zemli iz kosmosa – Earth exploration from space. 2010. No. 6. Pp. 67–72 [in Russian].  
<http://naukarus.com/katastroficheskiy-razliv-nefti-v-meksikanskom-zalive-v-aprele-mae-2010-g>
- [4] Gimaltdinov I.K., Kildibaeva S.R. Model of a submerged jet accounting for two limiting schemes of hydrate formation // Thermophysics and Aeromechanics. 2018. Vol. 25, No. 1. Pp. 75–83.  
DOI: 10.1134/s0869864318010079
- [5] Yapa P.D. Final Report Submitted to The Cooperative Institute for Coastal and Estuarine Environmental Technology (CICEET) Project Title: A Module for NOAA's GNOME Model to Provide Capability to Simulate Deepwater Oil and Gas Spills. 2003. Pp. 1–18.  
<https://crrc.unh.edu/sites/crrc.unh.edu/files/yapa-ciceet-final-pp1-18.pdf>
- [6] Yapa P.D., Zheng L. Simulation of oil spills from underwater accidents I: model development // Journal of hydraulic research, international association of hydraulic research, The Netherlands. 1997. Vol. 35, № 5. Pp. 673–688.  
DOI: 10.1080/00221689709498401
- [7] Chen F., Yapa P.D. Three-dimensional visualization of multiphase (oil/gas/hydrate) plumes // Environmental Modelling & Software. 2004. V. 19, No. 7–8. Pp. 751–760.  
DOI: 10.1016/j.envsoft.2003.08.008
- [8] Shagapov V.S., Tazetdinov B.I. Formation and dissociation of gas hydrate inclusions during migration in water // Thermophysics and Aeromechanics. 2014. Vol. 21, No. 3. Pp. 337–345.  
DOI: 10.1134/S086986431403007X
- [9] SHagapov V.SH., CHiglinceva A.S., Rusinov A.A. O Mekhanizmah rosta gidratnoj obolochki na poverhnosti vsplyvayushchih gazovyh puzyrkov [The dynamics of a multiphase jet stream, taking into account the flow of the surrounding water]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics. 2015. No. 3. Pp. 73–86 [in Russian].  
DOI: 10.17223/19988621/35/10



## К ЮБИЛЕЮ РАИСЫ ХАКИМОВНЫ БОЛОТНОВОЙ



9 ноября 2019 года главному научному сотруднику, доктору физико-математических наук Раисе Хакимовне Болотновой исполнилось 65 лет.

Р.Х. Болотнова родилась в Оренбурге и по окончании средней школы поступила на механико-математический факультет Московского государственного

университета. Успешно завершив учёбу в МГУ в 1978 году, начала трудовую деятельность в Отделе физики и математики Башкирского филиала АН СССР. Под руководством профессора Р.И. Нигматулина она выполнила цикл исследований по распространению ударных волн в упруго-пластических средах с учётом фазовых переходов. Совместно с Н.Х. Ахмадеевым ею были созданы математические модели уплотняющейся пористой упругопластической среды, порошковой среды с химическими превращениями в условиях ударного нагружения и повреждаемой упругопластической среды для описания нестационарных движений ударных волн с анизотропным характером процесса динамического разрушения хрупкого и вязкого типов. Для решения задач безопасности конструкций при ударных нагрузках был разработан метод определения параметров в последовательности слоев пористых и многослойных мишеней для снижения риска откольного разрушения. За достигнутые успехи в научных исследованиях в 1985 году Р.Х. Болотнова была удостоена звания «Лауреат премии Комсомола Башкирии».

Продолжая исследования в области ударно-волновых технологий, Р.Х. Болотнова решила ряд задач, связанных с теоретическими основами создания новых материалов методами порошковой металлургии. В дальнейшем её научные интересы сместились в область создания уравнений состояния различного рода органических и неорганических соединений. Эти интересы были связаны с задачей академика Р.И. Нигматулина по определению условий возникновения сверхвысоких значений давления и температуры в паровых и газовых пузырьках при интенсивных акустических воздействиях. В итоге были созданы методы построения уравнений состояния воды и органических жидкостей в широком диапазоне изменения термодинамических параметров. Так называемые «широкодиапазонные уравнения состояния Болотновой–Нигматулина» получили известность и успешно применяются различными научными коллективами при исследовании распространения ударных волн и для анализа сверхкритического состояния вещества.

Раиса Хакимовна в течение ряда лет читала спецкурс по математическому моделированию ударных волн с фазовыми превращениями на математическом факультете Башкирского государственного университета. Она уделяет большое внимание подготовке кадров высшей квалификации и успешно работает с магистрантами и аспирантами.

Раиса Хакимовна награждена Почетной грамотой РАН (2011 г.), Почетной грамотой Администрации городского округа город Уфа Республики Башкортостан (2019 г.), Почетной грамотой Городского округа город Уфа Республики Башкортостан (2019 г.) и удостоена звания «Почетный работник науки и техники Российской Федерации» (2018 г.).

Коллектив Института механики им. Р.Р. Мавлютова и редакция журнала «Многофазные системы» от всей души поздравляют свою коллегу Раису Хакимовну Болотнову с юбилеем и желают ей отличного здоровья и дальнейших творческих успехов!

# Содержание

## Механика жидкости и газа

**Гайнуллина Э.Ф.**

Динамика ударных волн и эволюция вихреобразования при взаимодействии сферического воздушного импульса со слоем водной пены ..... 74–81

**Алексеев М.В., Вожаков И.С., Лежнин С.И.**

Нестационарные характеристики процесса истечения газа в жидкость ..... 82–88

**Минибаев М.Р., Михайленко К.И.**

Исследование влияния граничных условий при численном решении модели вихревой трубы ..... 89–100

**Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В.**

Элементы теории вынужденного перемешивания нефтей в резервуарах ..... 101–107

**Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Нурисламова Э.А.**

Моделирование процесса ослабления сферического взрыва применением водной пены ... 108–114

**Насибуллаева Э.Ш.**

Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер ..... 115–124

**Тукмаков Д.А.**

Численное исследование скоростного скольжения фаз при прохождении ударной волны малой интенсивности из чистого газа в запылённую среду ..... 125–131

## Краткие сообщения

**Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф.**

Исследование собственных функций возмущения поперечной составляющей скорости потока термовязких жидкостей ..... 132–137

**Утяшев И.М.**

Продольные колебания стержня с переменным сечением ..... 138–141

**Кильдибаева С.Р., Далинский Э.Т., Кильдибаева Г.Р.**

Математическая модель распространения многофазного течения для случая повреждения подводного трубопровода ..... 142–147

## Портрет ученого

К юбилею Раисы Хакимовны Болотновой ..... 148