



Определение локальной неоднородности среды по собственным частотам колебаний струны

Утяшев И.М. *, Ахтямов А.М.***

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

**Башкирский государственный университет, Уфа

В работе рассматривается задача определения локальной неоднородности среды по собственным частотам колебания струны. Неоднородность моделируется тремя участками: в первом и третьем среда однородная, а в среднем – упругие характеристики моделируются квадратичной функцией. Данная модель реализована с помощью условий сопряжения на границе сред. Показано, что для идентификации центра неоднородности и определения ее размеров достаточно двух собственных частот, причем в случае жесткого закрепления обоих концов струны решение задачи двойственно. Задача решается разложением фундаментальной системы решений в степенной ряд по переменным x и λ . Приведены оценки погрешности метода.

Ключевые слова: собственные числа, обратная задача, Штурма–Лиувилля, потенциал, струна, условия сопряжения, характеристический определитель

1. Введение

В настоящей работе предлагается моделирование неоднородности среды в виде квадратичной функции. В частности, рассматриваются поперечные колебания струны длиной l , описываемые уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p(x)u, \quad (1)$$

с жестко закрепленными концами

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0.$$

В уравнении (1) неоднородность среды описывается квадратичным потенциалом вида:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (0, x_c - r), \\ r^2 - (x - x_c)^2, & \text{при } x \in (x_c - r, x_c + r), \\ 0, & \text{при } x \in (x_c + r, l), \end{cases}$$

где x_c – центр неоднородности, а r – ее радиус.

Приводя значения x к безразмерным величинам $\xi = x/l$, и используя замены $u(\xi, t) = y(\xi) \cos(\omega t)$, $\lambda = \frac{\omega^2 l^2}{c^2}$, $q(\xi) = p(\xi) \frac{l^2}{c^2}$, $a = \frac{x_c}{l}$, $\varepsilon = \frac{r}{l}$ приходим к задаче Штурма–Лиувилля:

$$-y'' + q(\xi)y = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (2)$$

где

$$q(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi \in (0, a - \varepsilon), \\ \varepsilon^2 - (\xi - a)^2 & \text{при } \xi \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \\ 0 & \text{при } \xi \in (a + \varepsilon, 1). \end{cases} \quad (3)$$

В 1929 году В.А. Амбарцумян [1] показал, что для краевой задачи с дифференциальным уравнением

$$ly = -y'' + q(\xi)y = \lambda y,$$

и краевыми условиями $y'(0) = y'(\pi) = 0$, где $q(\xi)$ – действительная непрерывная функция, и если $\lambda_n = n^2$, ($n = 0, 1, \dots$), то $q(\xi) \equiv 0$. То есть показано, что если спектр уравнения $y'' + \lambda y = 0$

при тех же краевых условиях сохранился, то возмущение отсутствует. В 1946 г. Г. Борг [2] показал (см. также [3]), что один спектр не определяет уравнения, случай Амбарцумяна оказывается исключением. Г. Боргом были рассмотрены способы построения уравнения по двум спектрам. Эти результаты носят условный характер, так как предполагается существование дифференциального уравнения, для которого данные две последовательно собственные числа являются спектрами. В 50-х и 60-х годах XX века в работах Б.М. Левитана и М.Г. Гасимова [4, 5] было показано, что оператор Штурма–Лиувилля с дискретным спектром однозначно определяется двумя спектрами краевых задач с различным граничным условием в нулевой точке и одним и тем же условием на другом конце. В частности, непрерывная функция $q(\xi)$ может быть однозначно определена по спектрам двух задач Штурма–Лиувилля L_0 и L_1 :

Задача L_0 :

$$ly = -y'' + q(\xi)y = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Задача L_1 :

$$ly = -y'' + q(\xi)y = \lambda y, \quad y'(0) = y(1) = 0.$$

После публикации классических монографий В.А. Марченко [6] и Б.М. Левитана [7], где потенциал $q(\xi)$ представлял собой либо непрерывную, либо суммируемую функцию, основные усилия ученых были направлены на обобщение полученных результатов как в направлении восстановления более общих потенциалов и дифференциальных уравнений [8–11], так и в направлении использования более общих краевых условий [12–18]. Во всех этих работах для восстановления непрерывной функции или более общей функции $q(\xi)$ требуется как минимум два бесконечных набора собственных чисел. Однако для задач физики и механики такой подход малоэффективен, так как в реальности с помощью частотомеров можно определить лишь конечные наборы собственных частот. К тому же, как правило, об идентифицируемом объекте имеется некоторая дополнительная информация, которая позволяет конкретизировать класс искомым функций. Поэтому возникает задача идентификации потенциала специального вида по конечному числу собственных частот. Тем не менее эффективных методов решения этой задачи предложено не было. Ранее авторами настоящей работы решались задачи идентификации видов и параметров краевых условий по конечному числу собственных частот [19, 20]. Для идентификации краевых условий для краевой задачи с переменным потенциалом был предложен метод разложения в ряд Тейлора

по двум переменным ξ и λ фундаментальной системы решений. В работе [20] отмечено, что если разложить в ряды фундаментальные решения задачи Штурма–Лиувилля с переменным потенциалом $q(\xi)$, то краевые условия можно достаточно точно восстановить по собственным значениям, используя только главную часть ряда. В работе [21] аналогичным методом решена коэффициентная обратная задача по восстановлению линейного потенциала вида $q(x) = q_0 + q_1x$. В настоящей работе этот метод предлагается использовать для восстановления квадратичного потенциала вида (3).

2. Прямая задача. Определение собственных значений

В настоящей работе задача (2) представляет собой частный случай задачи L_0 с потенциалом (3). Надо иметь в виду, что в точках $\xi = a - \varepsilon$ и $\xi = a + \varepsilon$ перехода от одной функции к другой должны выполняться условия сопряжения, выражающие условия непрерывности решения задачи (2). Для правильной записи этих условий обозначим через $y_1(\xi, \lambda)$ решение задачи (2) на сегменте $(0, a - \varepsilon)$, через $y_2(\xi, \lambda)$ — на сегменте $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, а через $y_3(\xi, \lambda)$ — на сегменте $(a + \varepsilon, 1)$. Тогда условия сопряжения могут быть записаны следующим образом:

$$y_1(a - \varepsilon) = y_2(a - \varepsilon), \quad y_1'(a - \varepsilon) = y_2'(a - \varepsilon), \quad (4)$$

$$y_2(a + \varepsilon) = y_3(a + \varepsilon), \quad y_2'(a + \varepsilon) = y_3'(a + \varepsilon). \quad (5)$$

Общими решениями на соответствующих сегментах будут следующие функции:

$$y_1 = C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12}, \quad y_2 = C_{21}y_{21} + C_{22}y_{22},$$

$$y_3 = C_{31}y_{31} + C_{32}y_{32},$$

где $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{31}$ и C_{32} — произвольные константы, а y_{i1}, y_{i2} ($i = 1, 2, 3$) — линейно независимые решения дифференциального уравнения задачи (2), удовлетворяющие условиям:

$$y_{i1}(0) = 1, \quad y_{i1}'(0) = 0, \quad y_{i2}(0) = 0, \quad y_{i2}'(0) = 1. \quad (6)$$

Из (2) и (6) следует

$$y_{11}(x, \lambda) = y_{31}(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x),$$

$$y_{12}(x, \lambda) = y_{32}(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}, \quad (7)$$

$$y_2(\xi, \lambda) = 1 + (E^2 - a^2 - \lambda) \frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{3}a\xi^3 + \left((E^2 - a^2 - \lambda)^2 - 2 \right) \frac{\xi^4}{24} + (E^2 - a^2 - \lambda) a \frac{\xi^5}{15} + \left((E^2 - a^2 - \lambda)^3 - 14E^2 + 30a^2 + 14\lambda \right) \frac{\xi^6}{720} \dots \quad (8)$$

$$y_{22}(\xi, \lambda) = \xi + (E^2 - a^2 - \lambda) \frac{\xi^3}{6} + \frac{1}{6} a \xi^4 + \left((E^2 - a^2 - \lambda)^2 - 6 \right) \frac{\xi^5}{120} + (E^2 - a^2 - \lambda) a \frac{\xi^6}{60} \dots \quad (9)$$

Найдем уравнение для определения собственных значений. Из (2) и (6) следует

$$y_1(0) = C_{11} = 0.$$

Из краевого условия $y(1) = 0$ (2) и условий сопря-

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} y_{12}(a - \varepsilon) & -y_{21}(a - \varepsilon) & -y_{22}(a - \varepsilon) & 0 & 0 \\ y'_{12}(a - \varepsilon) & -y'_{21}(a - \varepsilon) & -y'_{22}(a - \varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & -y_{21}(a + \varepsilon) & -y_{22}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & -y'_{21}(a + \varepsilon) & -y'_{22}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & 0 & 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix}$$

соответствующей системы.

Для удобства вычисления понизим порядок данного определителя. Разложив его по первому столбцу, получим:

$$\Delta_0(\lambda) = y_{12}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y'_{21}(a - \varepsilon) & -y'_{22}(a - \varepsilon) & 0 & 0 \\ -y_{21}(a + \varepsilon) & -y_{22}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{21}(a + \varepsilon) & -y'_{22}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} - y'_{12}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y_{21}(a - \varepsilon) & -y_{22}(a - \varepsilon) & 0 & 0 \\ -y_{21}(a + \varepsilon) & -y_{22}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{21}(a + \varepsilon) & -y'_{22}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix}.$$

Аналогично разложив определители четвертого порядка по первой строке, получим

$$\Delta_0(\lambda) = -y_{12}(a - \varepsilon) \cdot y'_{21}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y_{22}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{22}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} + y_{12}(a - \varepsilon) \cdot y'_{22}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y_{21}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{21}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} + y'_{12}(a - \varepsilon) \cdot y_{21}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y_{22}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{22}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} - y'_{12}(a - \varepsilon) \cdot y_{22}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y_{21}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{21}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix}.$$

жения (4) и (5) получим систему:

$$\begin{aligned} C_{12}y_{12}(a - \varepsilon) - C_{21}y_{21}(a - \varepsilon) - C_{22}y_{22}(a - \varepsilon) &= 0, \\ C_{12}y'_{12}(a - \varepsilon) - C_{21}y'_{21}(a - \varepsilon) - C_{22}y'_{22}(a - \varepsilon) &= 0, \\ -C_{21}y_{21}(a + \varepsilon) - C_{22}y_{22}(a + \varepsilon) + C_{31}y_{31}(a + \varepsilon) + C_{32}y_{32}(a + \varepsilon) &= 0, \\ -C_{21}y'_{12}(a + \varepsilon) - C_{22}y'_{21}(a + \varepsilon) + C_{31}y'_{31}(a + \varepsilon) + C_{32}y'_{32}(a + \varepsilon) &= 0, \\ C_{31}y_{31}(1) + C_{32}y_{32}(1) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение для определения собственных значений задачи (2) получают из условия существования ненулевого решения для констант C_{ij} ($i, j = 1, 2$) системы (10). Ненулевое решение для C_{ij} существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель

Таким образом, характеристический определитель задачи (2) имеет следующий вид:

$$\Delta_0(\lambda) = - \begin{vmatrix} y_{12}(a-\varepsilon) & y_{21}(a-\varepsilon) \\ y'_{12}(a-\varepsilon) & y'_{21}(a-\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -y_{22}(a+\varepsilon) & y_{31}(a+\varepsilon) & y_{32}(a+\varepsilon) \\ -y'_{22}(a+\varepsilon) & y'_{31}(a+\varepsilon) & y'_{32}(a+\varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{12}(a-\varepsilon) & y_{22}(a-\varepsilon) \\ y'_{12}(a-\varepsilon) & y'_{22}(a-\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -y_{21}(a+\varepsilon) & y_{31}(a+\varepsilon) & y_{32}(a+\varepsilon) \\ -y'_{21}(a+\varepsilon) & y'_{31}(a+\varepsilon) & y'_{32}(a+\varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Собственные значения задачи (2) являются нулями характеристического уравнения (11).

Пример 1. Пусть $a = 0,2$ и $\varepsilon = 0,1$. Подставив найденные выше функции y_{ij} ($i, j = 1, 2$) (7)–(9) в (11) и решив уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$, получим спектр собственных значений. С помощью математического пакета можем вычислить, например, первые три собственных значения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 9,870542, \\ \lambda_2 &= 39,480669, \\ \lambda_3 &= 88,828514. \end{aligned}$$

Следует отметить, что погрешность найденных собственных чисел зависит от выбора количества членов разложения фундаментальной системы решений в степенной ряд. Чем больше номер собственного числа, тем большее количество членов нужно брать. Зависимость погрешности найденных собственных значений от количества членов степенного ряда подробно описано авторами в [20].

3. Обратная задача. Определение a и ε .

Рассмотрим обратную задачу — требуется определить параметры a и ε квадратичного потенциала $q(\xi)$ по собственным значениям задачи (2).

Пример 2. Пусть известны две собственные частоты задачи (2):

$$\lambda_1 = 9,870542, \quad \lambda_2 = 39,480669.$$

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} y_{11}(a-\varepsilon) & y_{21}(a-\varepsilon) \\ y'_{11}(a-\varepsilon) & y'_{21}(a-\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -y_{22}(a+\varepsilon) & y_{31}(a+\varepsilon) & y_{32}(a+\varepsilon) \\ -y'_{22}(a+\varepsilon) & y'_{31}(a+\varepsilon) & y'_{32}(a+\varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(a-\varepsilon) & y_{22}(a-\varepsilon) \\ y'_{11}(a-\varepsilon) & y'_{22}(a-\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -y_{21}(a+\varepsilon) & y_{31}(a+\varepsilon) & y_{32}(a+\varepsilon) \\ -y'_{21}(a+\varepsilon) & y'_{31}(a+\varepsilon) & y'_{32}(a+\varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Пример 3. Пусть для задачи L_1 с потенциалом вида (3) параметры a и ε имеют те же значения что и в примере 1. Тогда подставив их в (12),

Требуется определить параметры a и ε .

Подставим собственные значения в (11), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \Delta_0(\lambda_1) = 0, \\ \Delta_0(\lambda_2) = 0. \end{cases}$$

относительно неизвестных a и ε . Решив эту систему с помощью математического пакета в интервалах $a \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1)$, получим два набора решений $\{a = 0,1999$ и $\varepsilon = 0,1000\}$, $\{a = 0,7999$ и $\varepsilon = 0,0999\}$.

Откуда возникло второе решение? Для ответа на данный вопрос исследуем поведение первых трех собственных частот $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в зависимости от местоположения неоднородности среды a и ее размеров ε . На рис. 1–3 можно заметить симметрию распределения собственных значений относительно центра струны при различных значениях a . Это говорит о двойственности решения обратной задачи, то есть одним и тем же собственным значениям соответствуют два различных параметра a . Также на рисунках видно что, чем больше параметр ε , тем выше становятся собственные числа.

Для однозначного решения предлагается использовать спектр частот вспомогательной задачи, т.е. применить метод, предложенный Г. Боргом [2] и использованный авторами в работах [21, 22]. В частности, предлагается рассмотреть задачу (2) с другим граничным условием на левом конце. Пусть $y'(0) = 0$ (задача L_1), тогда характеристический определитель примет вид:

где функции y_{ij} ($i, j = 1, 2$) имеют вид (7)–(9), можем вычислить, например, первые три собственных значения:

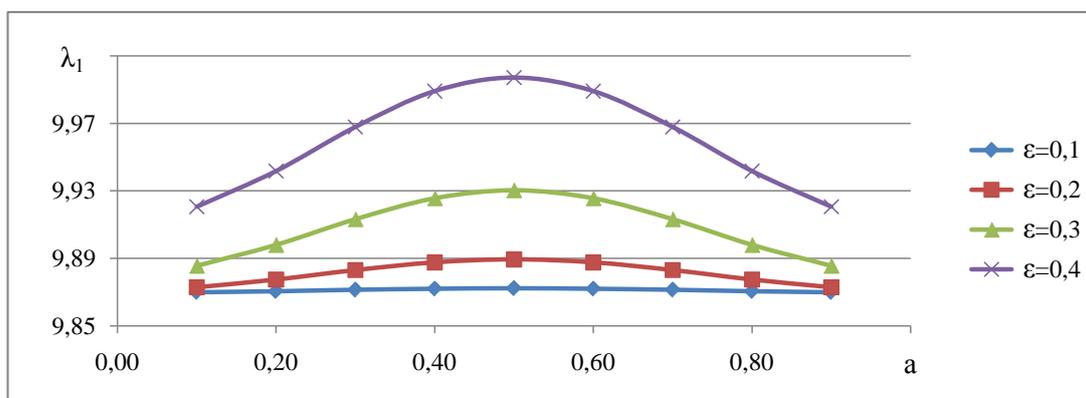


Рис. 1. Зависимость первой частоты от местоположения и размеров неоднородности

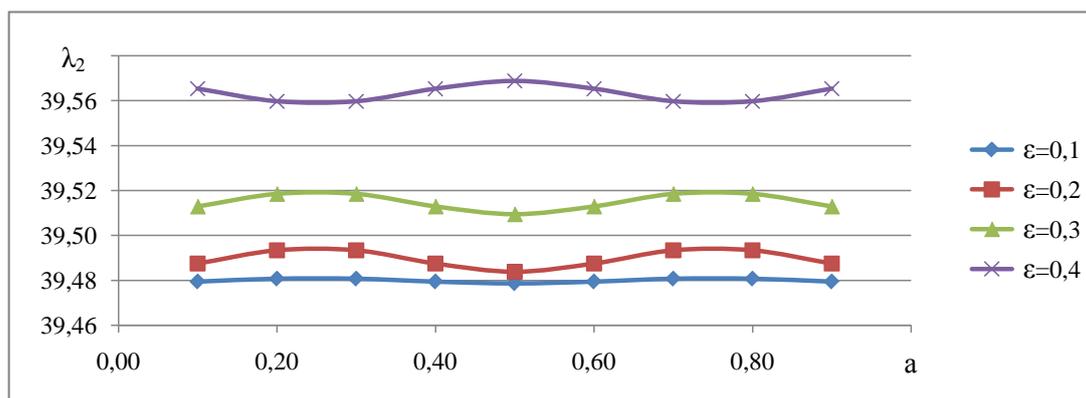


Рис. 2. Зависимость второй частоты от местоположения и размеров неоднородности

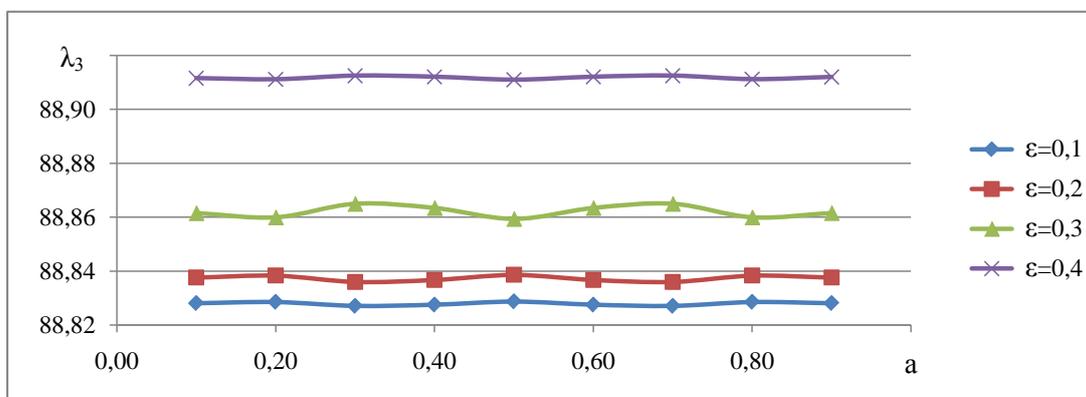


Рис. 3. Зависимость третьей частоты от местоположения и размеров неоднородности

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2,469802, \\ \lambda_2 &= 22,207567, \\ \lambda_3 &= 61,685329.\end{aligned}$$

Рассмотрим решение обратной задачи для случая с несимметричными граничными условиями.

Пример 4. Пусть известны два собственных значения $\lambda_1 = 2,469802$, $\lambda_2 = 22,207567$ задачи L_1 с потенциалом (3). Подставив их в характеристический определитель (12), получим систему:

$$\begin{cases} \Delta_1(\lambda_1) = 0, \\ \Delta_1(\lambda_2) = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно неизвестных a и ε в интервалах $a \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1)$, получим единственное решение $\{a = 0.2000$ и $\varepsilon = 0.1000\}$.

Рассмотрим зависимость первой собственной частоты λ_1 от параметров a и ε . На рис. 4 можно заметить отсутствие симметрии распределения собственных значений относительно центра струны. Независимо от параметра ε при отдалении центра неоднородности a от свободного конца собственные частоты уменьшаются. Также видно, что каждому собственному значению соответствует только одно значение a и ε . Из этого можно сделать вывод: для задачи L_1 с потенциалом вида (3) существует единственное решение обратной задачи.

Графики остальных собственных значений в зависимости от параметров a и ε также имеют несимметричный вид относительно центра струны.

Рассмотрим случай, когда решение обратной задачи ищется по собственным значениям из разных спектров.

Пример 5. Пусть даны два собственных значения: $\lambda_{01} = 9,870542$ из спектра задачи L_0 , а $\lambda_{11} = 2,469802$ из L_1 . Подставив их соответственно в характеристические определители (11) и (12), получим

систему

$$\begin{cases} \Delta_0(\lambda_{01}) = 0, \\ \Delta_1(\lambda_{11}) = 0, \end{cases}$$

решив которую также получим единственное решение $\{a = 0.2000$ и $\varepsilon = 0.1000\}$.

4. Оценка погрешности метода идентификации

Проверим вычислительный эксперимент по зашумлению входных данных. Для анализа погрешности будем использовать решение примера 4. В качестве входных данных примем собственные значения, заданные в виде $\lambda_{j\gamma} = \lambda_j(1 + \gamma\psi)$, где λ_j — собственное значение, вычисленное с точностью до 14 значащих цифр; γ — амплитуда зашумления; ψ — случайная величина с равномерным законом распределения, определенная на отрезке $[-1, 1]$. Полагая $\gamma = 10^{-n}$ ($n = 3, \dots, 9$), исследуем относительную погрешность приведенного в данной работе метода в зависимости от γ .

В табл. 1 для различных значений амплитуды γ и величины ψ приведены результаты пяти экспериментов. Значения ψ получены с помощью генератора случайных чисел математического пакета Maple. Из табл. 1 следует, что при амплитуде зашумления $\gamma = 10^{-4}$ решение задачи восстановления параметра a может не существовать (отсутствие решения в таблице отмечено прочерком). Это свидетельствует о том, что погрешность входных данных должна быть не более $\gamma = 10^{-5}$. В этом случае погрешность восстановления параметра a не превышает 10%.

5. Заключение

В работе показано, что потенциал, заданный в виде (3), идентифицируется по двум собственным значениям. Метод решения, основанный на разложении фундаментальной системы решений в

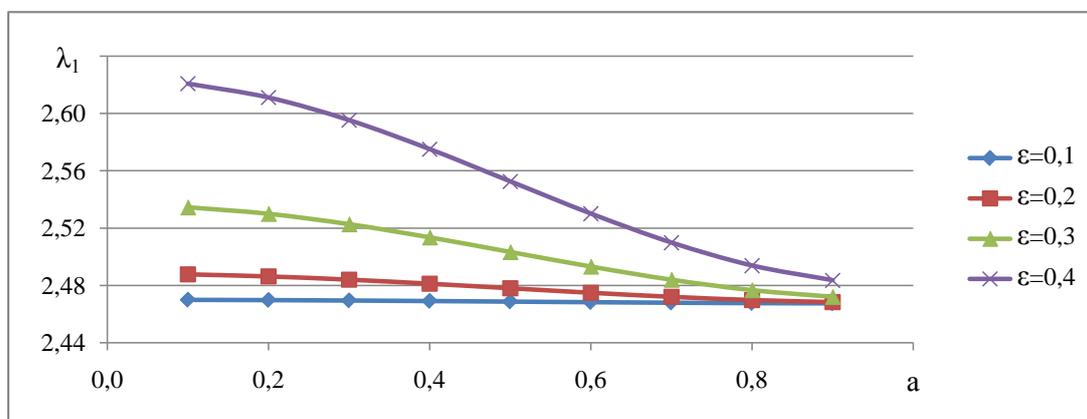


Рис. 4. Зависимость первой частоты от местоположения неоднородности при различных параметрах ε

Таблица 1. Относительная погрешность решения в зависимости от зашумления входных данных

γ	$\delta_a(\psi), \%$				
10^{-3}	–	–	1,6356	–	–
10^{-4}	–	0,65182	–	0,37809	0,03555
10^{-5}	0,97932	6,04138	10,4704	8,08981	4,43831
10^{-6}	0,55554	0,59489	0,65419	0,41887	0,41887
10^{-7}	0,03437	0,02683	0,10474	0,09025	0,05214
10^{-8}	0,00696	0,00301	0,00151	0,00756	0,00788
10^{-9}	0,00021	0,00099	0,00073	9,37E-05	0,00044

степенной ряд, позволяет получить численное решение задачи идентификации квадратичного потенциала. Как видно из примеров 2, 4, 5 решение данной обратной задачи существует, причем из рис. 1–3 следует, что двойственность решения возникает только в случае симметричных граничных условий. Так как собственные частоты колебания сильно зависят от параметров упругой среды, в которой колеблется струна, то данная задача может найти применение на практике для сенсоров отслеживания изменения состава окружающей среды.

Список литературы

- [1] Ambarzumijan V.A. *Über eine Frage der Eigenwerttheorie // Zeitschrift für Physik.* 1929. Vol. 53, № 9–10. Pp. 690–695. (DOI: 10.1007/BF01330827)
- [2] Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm Liouvilleschen Eigenwertanfgabe // Acta Math.* 1946. Vol. 78, № 1. Pp. 1–96. (DOI: 10.1007/BF0242160)
- [3] Levinson N. *The inverse Sturm–Liouville problem // Math. Tidsskr. B.* 1949. Pp. 25–30. (<https://www.jstor.org/stable/24527827>)
- [4] Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля по двум спектрам // *Изв. АН СССР, сер. матем.* 1964. Т. 28, № 1. С. 63–78. (<http://mi.mathnet.ru/izv3064>)
- [5] Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // *УМН.* 1964. Т. 19, № 2(116). С. 3–63. (<http://mi.mathnet.ru/umn6187>)
- [6] Марченко В.А. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.* Киев: Наукова думка, 1977. 329 с.
- [7] Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма–Лиувилля и их приложения.* М.: Наука, 1984. 240 с.
- [8] Шкаликов А.А., Савчук А.М. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // *Функц. анализ и его прил.* 2010. Т. 44, № 4. С. 34–53. (DOI: 10.4213/faa3022)
- [9] Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М: Физматлит, 2007. 384 с.
- [10] Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // *Математический сборник.* 2007. Т. 198, № 11. С. 47–66. (DOI: 10.4213/sm1491)
- [11] Набиев И.М. Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии // *ДАН.* 2007. Т. 415, № 2. С. 168–170. (<https://elibrary.ru/item.asp?id=9533626>)
- [12] Садовничий В.А. Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя // *ДАН СССР.* 1972. Т. 206, № 2. С. 293–296. (<http://mi.mathnet.ru/dan37122>)
- [13] Плаксина О.А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями // *Матем. сб.* 1986. Т. 131(173), № 1(9). С. 3–26. (<http://mi.mathnet.ru/msb1897>)
- [14] Плаксина О.А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями. II // *Матем. сб.* 1988. Т. 136(178), № 1(5). С. 140–159. (<http://mi.mathnet.ru/msb1733>)
- [15] Гасымов М.Г., Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными сопряженными граничными условиями // *Сибирский математический журнал.* 1991. Т. 31, № 6, С. 46–54.
- [16] Коротяев Е.Л., Челкак Д.С. Обратная задача Штурма–Лиувилля со смешанными краевыми условиями // *Алгебра и анализ.* 2009. Т. 21, № 5. С. 114–137. (<http://mi.mathnet.ru/aa1155>)
- [17] Mamedov Kh.R., Cetinkaya F. Inverse problem for a class of Sturm–Liouville operator with spectral parameter in boundary condition // *Bound. Value Probl.* 2013. Article ID 183. 16 p., electronic only. (DOI: 10.1186/1687-2770-2013-183)
- [18] Panakhov E.S., Koyunbakan H., Unal I.C. Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition // *Inverse Problems in Science and Engineering.* 2010. Vol. 18, № 1. P. 173–180. (DOI: 10.1080/17415970903234976)
- [19] Ахтямов А.М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи // *Дифференциальные уравнения.* 2003. Т. 39, № 8. С. 1011–1015. (<http://mi.mathnet.ru/de10883>)
- [20] Утяшев И.М., Ахтямов А.М. Идентификация краевых условий струны по собственным частотам колебаний // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН.* 2016. Т. 11, № 1. С. 38–52. (DOI: 10.21662/uim2016.1.007)
- [21] Ахтямов А.М., Утяшев И.М. Восстановление линейного потенциала в задаче Штурма–Лиувилля // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН.* 2017. Т. 12, № 2. С. 152–156. (DOI: 10.21662/uim2017.2.022)
- [22] Ахтямов А.М., Утяшев И.М. Восстановление полиномиально-го потенциала в задаче Штурма–Лиувилля // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2018. Т.20, № 2. С. 148–158. (DOI: 10.15507/2079-6900.20.201802.148-158)



Determination of local inhomogeneity of the medium from the natural frequencies of string oscillations

Utyashev I.M.* , Akhtyamov A.M.**

*Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

**Bashkir State University, Ufa

The paper considers the problem of determining the local inhomogeneity of the medium from the natural frequencies of string oscillation. The inhomogeneity is modeled in three sections: in the first and third sections medium is homogeneous, and on average section the elastic characteristics are modeled by a quadratic function. This model is implemented using the conjugation conditions at boundary between media. It is shown that to identify the center of an inhomogeneity and determine its size, two natural frequencies are enough, and in the case of rigid fixing of both ends of the string, the solution of the problem is dual. The problem is solved by expanding the fundamental system of solutions into a power series in the variables x and λ . The estimates of the error of the method are given.

Keywords: eigenvalues, Sturm-Liouville problem inverse problem, potential, string, conjugation conditions, characteristic determinant