



Численное моделирование динамики пузырьков в центральной области стримера¹

Аганин А.А., Давлетшин А.И., Халитова Т.Ф.

Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Разработаны математическая модель и методика расчета сильного расширения–сжатия кавитационных пузырьков, находящихся в центральной области стримера, где пузырьки остаются практически неподвижными. По существу данные модели и методики представляют собой эффективное сочетание созданных ранее авторами моделей и методик для расчета динамики взаимодействующих слабонесферических пузырьков в стримере и динамики одиночного осесимметричного пузырька. Первые применяются на стадиях расширения и низкоскоростного сжатия, где гидродинамическое взаимодействие пузырьков существенно, вторые – в финальной высокоскоростной стадии сжатия пузырьков, где оно несущественно. Приведен пример, иллюстрирующий особенности применения разработанных модели и методики расчета в случае простейшего стримера из трех пузырьков. Показано, что при сильном расширении–сжатии изначально сферического кавитационного пузырька наличие соседних пузырьков может существенно отклонять динамику пара в его полости от аналогичного случая одиночного пузырька.

Ключевые слова: кавитационный пузырек, гидродинамическое взаимодействие пузырьков, ударные волны, деформация пузырьков

1. Введение

Одной из привлекательных особенностей динамики пузырьков в жидкости является возможность достижения в них очень высоких термодинамических параметров (давлений, плотностей и температур). Экспериментально установлено [1], что на режиме периодического свечения одиночного пузырька внутри него кратковременно может возникать плазма с температурой более 16000 К. О достижении еще более высоких параметров в кавитационных пузырьках сообщается в ряде публикаций Талиархана с соавторами [2, 3]. Возможность реализации в пузырьках очень высоких температур можно

использовать, например, в сонохимии [4] для интенсификации химических реакций.

Наиболее высокие параметры в пузырьке достигаются тогда, когда его форма в ходе коллапса остается близкой к сферической, а внутри него в финальной стадии коллапса возникают близкие к сферическим радиально-сходящиеся ударные волны [5]. Схождение и фокусировка таких волн и приводит к достижению очень высоких значений температуры, плотности и давления в небольшой центральной области пузырька. Большие отклонения формы пузырька или возникающей в нем ударной волны от сферической могут значительно снизить достигаемые в пузырьке максимумы термодинамических параметров (большая несферичность пузырька может даже привести к разрушению его целостности при коллапсе). Считается [6], что наиболее высоких степеней сжатия среды в пузырьке можно

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00433).

добиться в том случае, когда пузырек находится в центральной области кластера. Это объясняется, в частности, тем, что сжимающее пузырек давление в центральной области кластера оказывается выше, чем на периферии.

С учетом вышеизложенного для оценки возможности достижения в пузырьках высоких термодинамических параметров важную роль играет анализ уровня их деформаций и влияния этих деформаций на динамику содержимого кавитационных пузырьков в финале сжатия. Для оценки эволюции малых деформаций одиночных пузырьков на режиме их сильного сжатия можно воспользоваться моделями работ [7, 8], а для немалых деформаций поверхности одиночных пузырьков и возникающих в них ударных волн на режиме сильного сжатия — моделями работ [9, 10]. Представляется, что возможности проведения подобных оценок для пузырьков, находящихся в кластере, значительно более ограничены. Модели динамики пузырьков, которыми можно было бы воспользоваться для таких оценок в общем случае, когда кластер пузырьков является трехмерным (пространственным), авторам неизвестны. Вместе с тем приближенные оценки влияния соседних пузырьков в трехмерном кластере можно получить, используя вместо кластера стример, под которым понимается ряд пузырьков, распложенных на одной прямой. Отметим, что образование стримеров наблюдалось в экспериментах по акустическому сверхсжатию кавитационных пузырьков в дейтерированном ацетоне [11]. В случае стримера проведение указанных оценок упрощается, поскольку трехмерная задача взаимодействия пузырьков в кластере общего вида при переходе к стримеру сводится к двумерной (осесимметричной). Для оценки малых деформаций кавитационных пузырьков в стримере при их однократном сильном совместном расширении–сжатии можно воспользоваться моделью работы [12]. Однако эта модель не может дать ответ на вопрос о том, что происходит в этом случае внутри пузырька в финале его сжатия. Еще более открытым остается вопрос о динамике пузырька в случае его немалых деформаций в конце коллапса.

В настоящей работе предлагаются математическая модель и методика расчета динамики кавитационных пузырьков, находящихся в центральной области стримера, в том случае, когда деформации пузырьков в конце их сильного коллапса могут быть и немалыми. Центральная область стримера отличается от периферийной тем, что пузырьки в ней остаются практически неподвижными. Предлагаемые модель и методика по существу представляют собой эффективное сочетание моделей

и методик расчета динамики взаимодействующих пузырьков работы [13] и динамики одиночного пузырька работы [9]. Эффективность такого сочетания обусловлена учетом особенностей задачи. На стадии низкоскоростного расширения и сжатия гидродинамическое взаимодействие пузырьков существенно влияет на эволюцию их формы, в то время как пузырьки остаются близкими к гомобарическим, а деформации их поверхности — малыми. Это позволяет использовать здесь экономичную упрощенную модель динамики пузырька работы [13]. В финальной высокоскоростной стадии сжатия пузырьков важно учитывать сжимаемость жидкости, неоднородность пара в пузырьках, испарение и конденсацию на межфазной поверхности, образование и фокусировку несферических ударных волн в центральной области пузырька, а взаимодействие пузырьков наоборот уже несущественно. С учетом этого в финальной высокоскоростной стадии сжатия для пузырьков применяется модель динамики одиночного осесимметричного пузырька [9]. Ее применение требует гораздо больших затрат компьютерного времени, чем применение упрощенной модели, поэтому предлагается использовать ее лишь в финале сжатия. Приведен пример применения разработанных модели и методики для расчета динамики центрального пузырька при его сильном расширении–сжатии в простейшем стримере, состоящем из трех пузырьков.

2. Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается однократное сильное совместное расширение–сжатие кавитационных (паровых) пузырьков в стримере в результате уменьшения и последующего увеличения давления жидкости по гармоническому закону. Стример состоит из изначально одинаковых кавитационных пузырьков, равноудаленных от соседних, с центрами, расположенными на одной прямой. Основное внимание направлено на пузырьки, расположенные в центральной области стримера. При достаточно большом количестве пузырьков пузырьки в центральной области стримера являются практически неподвижными. Неподвижным остается и центральный пузырек стримера из относительно небольшого нечетного количества пузырьков. Это объясняется тем, что воздействие ближайших соседей, расположенных по разные стороны, является одинаковым по величине, но противоположным по направлению.

Рассматриваемый стример является простей-

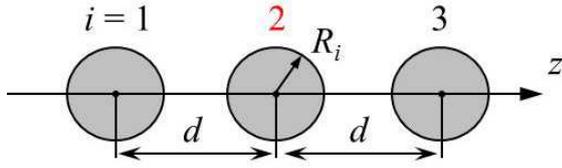


Рис. 1. Стример из 3-х одинаковых пузырьков (i – номера пузырьков, d – расстояние между центрами пузырьков, R_i – их радиус)

шей моделью, позволяющей оценить закономерности динамики пузырьков в центральной области кластеров, в частности, наблюдаемых в экспериментах по акустической кавитации дейтерированного ацетона [2, 3, 11].

Минимальное число пузырьков в стримере равно трем (рис. 1). В таком стримере группа центральных неподвижных пузырьков состоит лишь из одного пузырька. Два других (периферийных) пузырька являются подвижными. Они смещаются относительно центрального со скоростью, одинаковой по модулю, но противоположной по направлению.

3. Основные положения математической модели и методики расчета

На наиболее продолжительной низкоскоростной стадии, включающей совместное расширение пузырьков и большую часть их сжатия, где существенно гидродинамическое взаимодействие пузырьков (рис. 2, промежуток времени до отмеченного точкой момента), используется обобщение модели совместной динамики двух пузырьков [13]

на случай их произвольного количества с центрами на одной прямой. Искажения сферичности пузырьков в этой модели считаются малыми, так что уравнение поверхности пузырьков $F(r_i, \theta_i, t) = F_i = 0$ ($1 \leq i \leq K$, K – число пузырьков в стримере) представляется в виде:

$$F_i = r_i - R_i(t) - \sum_{n=2}^N a_{ni}(t) P_n(\cos \theta_i) = 0, \quad (1)$$

где r_i , θ_i – радиальная и широтная координаты сферической системы отсчета с началом в центре i -го пузырька; R_i – радиус i -го пузырька; a_{ni} – амплитуда отклонения формы i -го пузырька от сферической в виде осесимметричной сферической гармоники с номером n ; P_n – полином Лежандра степени n ; N – максимум среди номеров гармоник, определяющих форму пузырьков. Несферичность пузырьков мала, так что $|\epsilon_{ni}| \ll 1$, где $\epsilon_{ni} = a_{ni}/R_i$ – безразмерная амплитуда отклонения.

Эффекты теплопроводности и испарения/конденсации учитываются упрощенно: давление внутри пузырьков полагается постоянным и равным давлению насыщенных паров при температуре окружающей жидкости. Влияние сжимаемости жидкости, неоднородности давления в паре, завихренности жидкости, плотности пара на деформацию пузырьков не учитывается в силу малости. В рамках данных допущений динамика взаимодействующих пузырьков описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиусов пузырьков R_i , координат их центров z_i и амплитуд отклонений их формы от сферической a_{ni} в виде сферических гармоник:

$$R_i \ddot{R}_i + \frac{3\dot{R}_i^2}{2} - \frac{\dot{z}_i^2}{4} - \frac{p_i - p_\infty}{\rho_0} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left[\frac{\dot{B}_{0j}}{d_{ij}} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j - B_{0j}(\dot{z}_i + 5\dot{z}_j)}{2s_{ij}d_{ij}^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K \frac{3B_{0j}B_{0k}}{4s_{ij}s_{ik}d_{ij}^2 d_{ik}^2} - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^K \frac{(B_{0k}R_j^3)'}{2s_{ij}s_{jk}d_{ij}^2 d_{jk}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j (\dot{z}_i + 2\dot{z}_j)}{2d_{ij}^3} + \frac{3(R_j^2 \dot{z}_j a_{2j})'}{10s_{ij}d_{ij}^2} \right] + \Psi_{0i} + \Delta_i, \quad (2)$$

$$\left(1 - \frac{7\epsilon_{2i}}{5}\right) R_i \dot{z}_i + 3 \left(1 - \frac{4\epsilon_{2i}}{5}\right) \dot{R}_i \dot{z}_i - \frac{9\dot{z}_i \dot{a}_{2i}}{5} - \sum_{m=2}^N \frac{9\Theta_{m12}^{1,3} \dot{z}_i^2 \epsilon_{mi}}{5} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left[-\frac{3(B_{0j}R_i)'}{s_{ij}d_{ij}^2} + \right. \\ \left. + \frac{3(R_i R_j^3 \dot{z}_j)'}{d_{ij}^3} - 6B_{0j}R_i \dot{z}_j + \frac{9R_i R_j^3 \dot{z}_j^2}{s_{ij}d_{ij}^4} + \frac{3(\dot{B}_{0j}a_{2i} + 3B_{0j}\dot{a}_{2i} + 4B_{0j}\dot{R}_i \epsilon_{2i})}{5s_{ij}d_{ij}^2} + \sum_{m=2}^N \frac{18\Theta_{m12}^{1,3} B_{0j} \dot{z}_i \epsilon_{mi}}{5s_{ij}d_{ij}^2} \right] + \Psi_{1i}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n+1} \left[R_i \ddot{a}_{ni} + 3 \dot{R}_i \dot{a}_{ni} - (n-1) \ddot{R}_i a_{ni} - \frac{3}{2} \sum_{m=2}^N \left(\Theta_{m1n}^{2/3, n-2} \dot{z}_i a_{mi} - \Theta_{m1n}^{1,2} \dot{z}_i \dot{a}_{mi} \right) \right] + \frac{9\alpha_{11n} \dot{z}_i^2}{8} - \\
& - \frac{3\dot{z}_i}{2} \sum_{m=2}^N \left[\frac{3}{2} \left(\sum_{\gamma=0}^{m+1} \frac{\Theta_{m1\gamma}^{1,2} \beta_{\gamma 1n}}{\gamma+1} - \chi_{m11n} \right) \dot{z}_i \epsilon_{mi} + \frac{\beta_{m1n} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \epsilon_{mi})}{m+1} \right] + \frac{(n-1)(n+2) \sigma \epsilon_{ni}}{\rho_0 R_i} = \\
& = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left\{ \frac{9\beta_{11n} B_{0j} \dot{z}_i}{4s_{ij} d_{ij}^2} - \frac{9\beta_{11n} R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4d_{ij}^3} - \frac{5\beta_{21n} R_i B_{0j} \dot{z}_i}{2d_{ij}^3} + \frac{15\beta_{21n} R_i R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4s_{ij} d_{ij}^4} + \frac{21\beta_{31n} R_i^2 B_{0j} \dot{z}_i}{8s_{ij} d_{ij}^4} + \right. \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K \frac{9\beta_{11n} B_{0j} B_{0k}}{8s_{ij} s_{ik} d_{ij}^2 d_{ik}^2} + \frac{9\alpha_{11n} B_{0j} \dot{z}_i \epsilon_{2i}}{10s_{ij} d_{ij}^2} - \sum_{m=2}^N \left[\frac{3\Theta_{m1n}^{1,2} (B_{0j} a_{mi})'}{2s_{ij} (n+1) d_{ij}^2} - \frac{\Theta_{m1n}^{2, m+1} B_{0j} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \epsilon_{mi})}{2s_{ij} (m+1) d_{ij}^2} - \right. \\
& \left. \left. - \frac{3B_{0j} \dot{z}_i \epsilon_{mi}}{2s_{ij} d_{ij}^2} \left(\sum_{\gamma=0}^{m+1} \frac{2\Theta_{\gamma 1n}^{1/2, \gamma+1} \Theta_{m1\gamma}^{1,2}}{\gamma+1} - 3\chi_{m11n} \right) \right] + \frac{5(R_i^2 B_{0j})'}{3d_{ij}^3} \delta_{2n} - \right. \\
& \left. - \frac{7(R_i^3 B_{0j})'}{4s_{ij} d_{ij}^4} \delta_{3n} - \frac{5(R_i^2 R_j^3 \dot{z}_j)'}{2s_{ij} d_{ij}^4} + 10R_i^2 B_{0j} s_{ij} \dot{d}_{ij} \right\} + \Psi_{ni}. \tag{4}
\end{aligned}$$

Здесь точка сверху и штрих означают производную по времени; p_∞ — давление жидкости на большом удалении от пузырьков; p_i — давление внутри i -го пузырька; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ_0 — плотность жидкости; $d_{ij} = |z_i - z_j|$ — расстояние между центрами i -го и j -го пузырьков; $B_{0i} = -R_i^2 \dot{R}_i$; $s_{ij} = (z_i - z_j)/d_{ij}$; $\Theta_{\gamma 1\zeta}^{n,k} = n k \alpha_{\gamma 1\zeta} + \beta_{\gamma 1\zeta}$; $\bar{\Theta}_{\gamma 1\zeta}^{n,k} = n k \alpha_{\gamma 1\zeta} - \beta_{\gamma 1\zeta}$; $\beta_{\gamma 1\zeta} = [\gamma(\gamma+1) + 2 - \zeta(\zeta+1)] \alpha_{\gamma 1\zeta} / 2$; δ_{nm} — символ Кронекера;

$$\begin{aligned}
\alpha_{\gamma 1\zeta} &= \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 \eta P_\gamma(\eta) P_\zeta(\eta) d\eta; \\
\chi_{\gamma 1\zeta} &= \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P_\gamma P_\zeta d\eta;
\end{aligned}$$

Ψ_{0i} , Ψ_{1i} , Ψ_{ni} , Δ_i — поправки, учитывающие влияние вязкости и сжимаемости жидкости. Эффекты вязкости жидкости учитываются в предположении потенциальности ее движения [14]. Тогда поправки Ψ_{0i} , Ψ_{1i} , Ψ_{ni} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Psi_{0i} &= -\frac{4v\dot{R}_i}{R_i}, \quad \Psi_{1i} = -\frac{12v}{R_i} \left[\dot{z}_i (1 - \epsilon_{2i}) + \right. \\
& \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left(\frac{B_{0j}}{s_{ij} d_{ij}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j}{d_{ij}^3} - \frac{B_{0j} \epsilon_{2i}}{s_{ij} d_{ij}^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{ni} &= -\frac{2v}{R_i} \left[(n+2) \dot{a}_{ni} + 2(n-1) \dot{R}_i \epsilon_{ni} + \right. \\
& + \sum_{m=2}^N \frac{3n \Theta_{m1n}^{2/n, n-2} \dot{z}_i \epsilon_{mi}}{2} - \\
& - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left(\frac{10R_i B_{0j}}{d_{ij}^3} \delta_{2n} - \frac{21R_i^2 B_{0j}}{s_{ij} d_{ij}^4} \delta_{3n} - \right. \\
& \left. - \frac{15R_i R_j^3 \dot{z}_j}{s_{ij} d_{ij}^4} \delta_{2n} - \sum_{m=2}^N \frac{3n \Theta_{m1n}^{2/n, n-2} B_{0j} \epsilon_{mi}}{2s_{ij} d_{ij}^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

где $v = \mu/\rho_0$, μ — коэффициент динамической вязкости жидкости. Эффект сжимаемости жидкости предполагается малым, а потому описывается без учета деформаций и взаимодействия пузырьков [15]. При таком предположении поправка на сжимаемость Δ_i определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta_i &= \frac{\dot{R}_i}{c_0} \left(R_i \ddot{R}_i + \frac{\dot{R}_i^2}{2} + \frac{\dot{z}_i^2}{4} + \frac{p_i - p_\infty}{\rho_0} \right) + \\
& + \frac{R_i}{c_0} \left(\frac{\dot{z}_i \dot{z}_i}{2} + \frac{\dot{p}_i - \dot{p}_\infty}{\rho_0} - \frac{4v\dot{R}_i}{R_i} \right), \tag{5}
\end{aligned}$$

где c_0 — невозмущенная скорость звука в жидкости.

Система уравнений (2)–(4) решается численно высокоточным методом Дормана–Принса [16].

В финальной стадии сжатия (рис. 2, промежуток времени после отмеченного точкой момента) за счет сильного уменьшения размеров пузырьков взаимодействие между ними становится несущественным, распределение параметров пара в

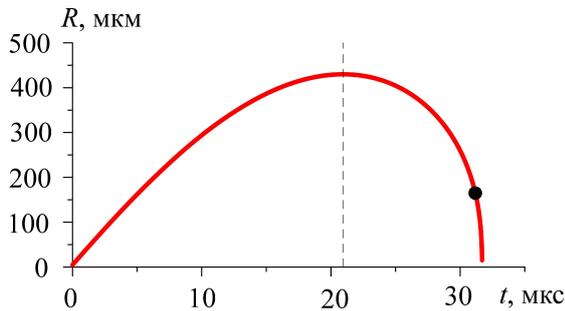


Рис. 2. Типичное изменение радиуса центрального пузырька при его расширении-сжатии. Вертикальной линией указана граница между расширением и сжатием, а точкой – момент, после которого влияние соседних пузырьков несущественно

пузырьках — все более неоднородным, внутри пузырьков могут зарождаться радиально сходящиеся ударные волны. На процесс сжатия оказывают влияние и такие эффекты, как нестационарная теплопроводность пара и жидкости, неравновесные испарение и конденсация на межфазной поверхности. Кроме того, необходимо принимать во внимание немало деформаций поверхности пузырька, несферичность динамики пара в пузырьке, в том числе и возникающих в нем ударных волн. С учетом этого в финальной высокоскоростной стадии сжатия для пузырьков применяется модель динамики одиночного осесимметричного пузырька [9]. Она является обобщением одномерной модели работы [6] и представляет собой следующую систему уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p &= 0, \\ \rho \frac{dE}{dt} + \nabla \cdot (p\mathbf{u} - \kappa \nabla T) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

замыкаемых широкодиапазонными уравнениями состояния жидкости и пара вида $p = p(\rho, T)$, $e = e(\rho, T)$ в форме Ми-Грюнайзена [6]. Здесь ρ — плотность; \mathbf{u} — скорость частицы среды; p — давление; $E = e + \mathbf{u}^2/2$ — удельная полная энергия; e — удельная внутренняя энергия; T — температура; κ — коэффициент теплопроводности.

Граничные условия на поверхности пузырька

имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho^+ (\mathbf{D} - \mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{n} &= \rho^- (\mathbf{D} - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} = j, \\ p^+ &= p^-, \quad T^+ = T^-, \\ \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right)^+ - \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right)^- &= jl, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\mathbf{D} = D \cdot \mathbf{n}$ — скорость смещения элемента поверхности пузырька; \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль; l — теплота парообразования; j — интенсивность фазовых превращений (испарения или конденсации), отнесенная к единице времени и единице поверхности. Верхний знак «+» означает отношение к стороне жидкости, «-» — к стороне газа. Интенсивность фазовых преобразований j определяется по формуле Герца-Кнудсена-Ленгмюра [6]. Зависимости $\kappa(T)$, $l(T)$ представляют собой аппроксимации экспериментальных данных.

На большом удалении от пузырька имеем $p = p_\infty$, $T = T_\infty$.

Уравнения (6)–(7) записываются в подвижных координатах относительно сферической или цилиндрической неподвижных систем отсчета. При этом сферическая система отсчета используется при малой и умеренной несферичности динамики пара в пузырьке, а при большой несферичности (определяется по уровню несферичности ударной волны) осуществляется переход к цилиндрической системе отсчета. При использовании сферической системы отсчета применяются радиально расходящиеся сетки. В момент перехода к цилиндрической системе в центральной части пузырька эти сетки меняются на близкие к декартовым. Решение находится с помощью эффективной модификации метода С.К. Годунова, имеющей второй порядок точности [9].

4. Иллюстрация применения

Покажем применение предлагаемой методики на примере динамики центрального пузырька в простейшем случае стримера, когда он состоит из трех одинаковых пузырьков (рис. 1). Поскольку центральный пузырек в таком стримере лишь один, соответствующий индекс «2» далее опускается ($R_2, \varepsilon_{n,2}$ и т.д. заменяется на R, ε_n и т.д.). Кроме того, в силу равенства расстояний между соседними пузырьками ($d_{12} = d_{23}$) вместо d_{12}, d_{23} используется d .

4.1. Входные данные

Жидкость — ацетон при температуре $T_\infty = 273$ К. В начальный момент времени $t = 0$ все три пузырька стримера одинаковые сферические, с радиусом 5 мкм, заполнены паром

ацетона, находящимся в состоянии насыщения с давлением $p_i = 0.09$ бар. Давление жидкости p_∞ меняется по гармоническому закону

$$p_\infty = p_0 - p_a \cos \omega t,$$

с амплитудой $p_a = 15$ бар и частотой $\omega = 2\pi \times 19.3$ кГц относительно статического давления $p_0 = 1$ бар. Сначала следует фаза понижения давления, а затем фаза его повышения, в результате чего пузырьки первоначально расширяются, а затем сжимаются. Начальное расстояние между центральным и соседними пузырьками равно семи радиусам центрального пузырька в момент его максимального расширения (что соответствует $d(0) \approx 3$ мм).

4.2. Влияние взаимодействия пузырьков при их коллапсе

Первым шагом при применении предлагаемой методики является определение момента времени t_{cr} на стадии коллапса центрального пузырька (т.е. $t_{cr} > t_{max}$, где t_{max} — момент максимального расширения центрального пузырька, отмеченный на рис. 2 вертикальной линией), после которого влияние взаимодействия пузырьков несущественно. Для этого применяется модель взаимодействующих пузырьков (1)–(5). При этом сначала рассчитывается расширение–сжатие пузырьков в стримере до завершения сжатия одного из пузырьков. Далее проводится серия аналогичных расчетов по этой же модели, но с отключением взаимодействия между пузырьками в некоторый момент t^* стадии их сжатия (т.е. $t^* > t_{max}$). Момент отключения взаимодействия t^* последовательно удаляется от начала стадии сжатия (т.е. от момента t_{max}) до тех пор, пока динамика центрального пузырька при включенном и выключенном взаимодействиях пузырьков не окажется близкой, что оценивается сопоставлением временных зависимостей радиуса центрального пузырька $R(t)$ и амплитуд отклонений его формы от сферической $a_n(t)$.

На рис. 3 показано влияние момента отключения взаимодействия пузырьков на временные зависимости радиуса центрального пузырька и амплитуды отклонения его формы от сферической в виде второй поверхностной гармоники (амплитуды других отклонений в рамках модели (1)–(5) отсутствуют) в ходе коллапса. Видно, что при отключении в момент $t^* = t_3$ взаимодействие между пузырьками несущественно. Это означает, что момент t_3 можно принять в качестве момента t_{cr} .

4.3. Уточнение радиальной составляющей динамики среды в центральном пузырьке в начальной стадии его коллапса

Следующим шагом при использовании предлагаемой методики является уточнение радиальной составляющей движения содержимого центрального пузырька в начальной стадии его коллапса (при $t_{max} < t < t_{cr}$), где взаимодействие между пузырьками существенно. Необходимость уточнения обусловлена тем, что из-за малости влияния на изучаемый процесс при $t_{max} < t < t_{cr}$ динамика содержимого центрального пузырька в модели взаимодействующих пузырьков описывается весьма приближенно (принимается, что пара в пузырьке находится в состоянии насыщения с постоянным давлением p_i). Однако, при $t > t_{cr}$ динамика пара в пузырьке становится значимой, так что для адекватного описания необходимо уточнение в конце начального интервала $t_{max} < t < t_{cr}$. В частности, на интервале $t_{max} < t < t_{cr}$ требуется корректно описать изменение массы пара внутри пузырька, рост неоднородности распределения термодинамических параметров в полости пузырька. Для этого используется одномерная (сферически симметричная) версия модели динамики одиночного пузырька (6)–(7). С ее применением на отрезке $t_{max} < t < t_{cr}$ проводится расчет динамики центрального пузырька (начальные данные определяются результатами численного решения по модели взаимодействующих пузырьков в момент $t \approx t_{max}$). Это позволяет уточнить сферическую составляющую динамики пара в центральном пузырьке в начале финальной стадии коллапса пузырька (в момент $t \approx t_{cr}$), где влияние взаимодействия между пузырьками несущественно. Вместе с тем, при одних и тех же входных данных, динамика одиночного пузырька на отрезке $t_{max} < t < t_{cr}$ может отличаться от динамики центрального пузырька в стримере, где пузырьки взаимодействуют. Так, на рис. 3 видно, что зависимости $R(t)$, рассчитанные с учетом и без учета взаимодействия пузырьков с момента t_1 до конца коллапса, довольно сильно расходятся. В настоящей работе за критерий близости динамики одиночного пузырька и центрального пузырька в стримере принимается близость их радиальных зависимостей $R(t)$. Удовлетворить этому условию можно по-разному, например, слегка изменив условия коллапса одиночного пузырька (температуру жидкости, ее давление, начальный радиус пузырька). В настоящей работе с этой целью варьируется давление жидкости p_∞^* на внешней границе расчетной области, причем при коллапсе (при $t > t_{max}$) оно считается постоянным. Значение p_∞^* подбирается путем проведения серии расчетов

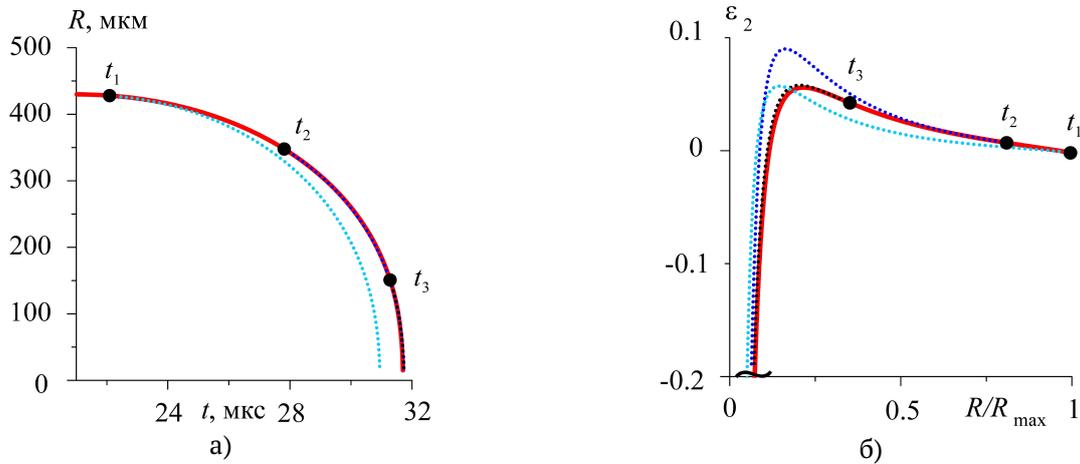


Рис. 3. Изменение радиуса центрального пузырька (а) и деформаций его поверхности в виде второй поверхностной гармоники (б) в ходе коллапса этого пузырька с учетом взаимодействия с соседними пузырьками (сплошные кривые) и без его учета (пунктирные кривые), начиная с моментов времени $t_1 - t_3$, указанных точками

по модели одиночного пузырька до тех пор, пока временная зависимость радиуса центрального пузырька $R(t)$ на отрезке $t_{max} < t < t_{cr}$ не окажется достаточно близкой к аналогичной зависимости радиуса центрального пузырька по модели взаимодействующих пузырьков.

На рис. 4 продемонстрировано, что временные зависимости радиуса центрального пузырька в ходе его коллапса до момента t_{cr} , рассчитанные по модели взаимодействующих пузырьков (1)–(5) и по одномерному (сферически симметричному) варианту модели динамики одиночного пузырька

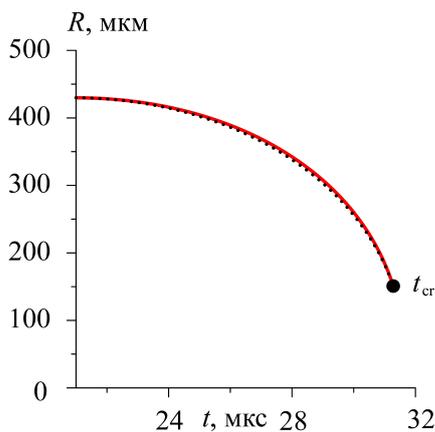


Рис. 4. Изменение радиуса центрального пузырька в ходе его коллапса до момента t_{cr} по модели взаимодействующих пузырьков (1)–(5) (сплошная красная кривая) и по одномерной версии модели одиночного пузырька (6)–(7) при $p_{\infty}^* = 12.9$ бар (штриховая черная кривая)

ка (6)–(7) при $p_{\infty}^* = 12.9$ бар, являются достаточно близкими. Это означает, что для уточнения радиальной составляющей динамики центрального пузырька на отрезке $t_{max} < t < t_{cr}$, где взаимодействие пузырьков существенно, можно использовать результаты расчетов динамики пузырька по одномерному (сферически симметричному) варианту модели динамики одиночного пузырька при давлении жидкости $p_{\infty} = p_{\infty}^* = 12.9$ бар.

4.4. Квазиодномерная аппроксимация начальной стадии коллапса пузырька

Завершающим шагом при использовании предлагаемой методики является переход к модели динамики одиночного осесимметричного пузырька (6)–(7) в момент $t = t_{cr}$. Входные данные для этой модели (двумерные поля давления, плотности, температуры как в жидкости, так и в паре, форма межфазной поверхности и другие необходимые характеристики) определяются по результатам расчетов сферической составляющей по одномерному варианту этой модели и несферической составляющей по модели взаимодействующих пузырьков. Фактически здесь происходит переход от квазиодномерного моделирования к полностью двумерному.

Возможность такого перехода иллюстрируют рис. 5 и 6, на которых сопоставляются результаты расчетов коллапса одиночного пузырька, полученные с применением квазиодномерной модели до момента t_{cr} с последующим переходом на двумерную модель, с результатами расчетов этой же задачи с использованием двумерной модели с самого начала коллапса. Как и в разделе 3.1, начальные условия (параметры сферической и несфери-

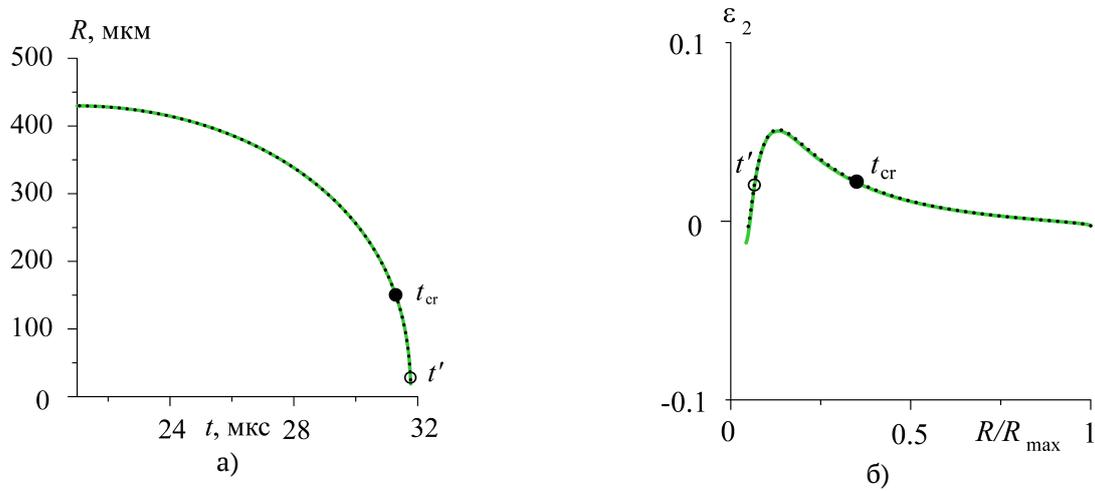


Рис. 5. Изменение радиуса пузырька (а) и деформаций его поверхности в виде второй поверхностной гармоники (б) в ходе коллапса одиночного пузырька при его расчете с применением двумерной модели (сплошные зеленые кривые) и с использованием квазиодномерной модели при $t \leq t_{cr}$ и двумерной при $t > t_{cr}$ (штриховые черные кривые). Момент t' соответствует данным рис. 6

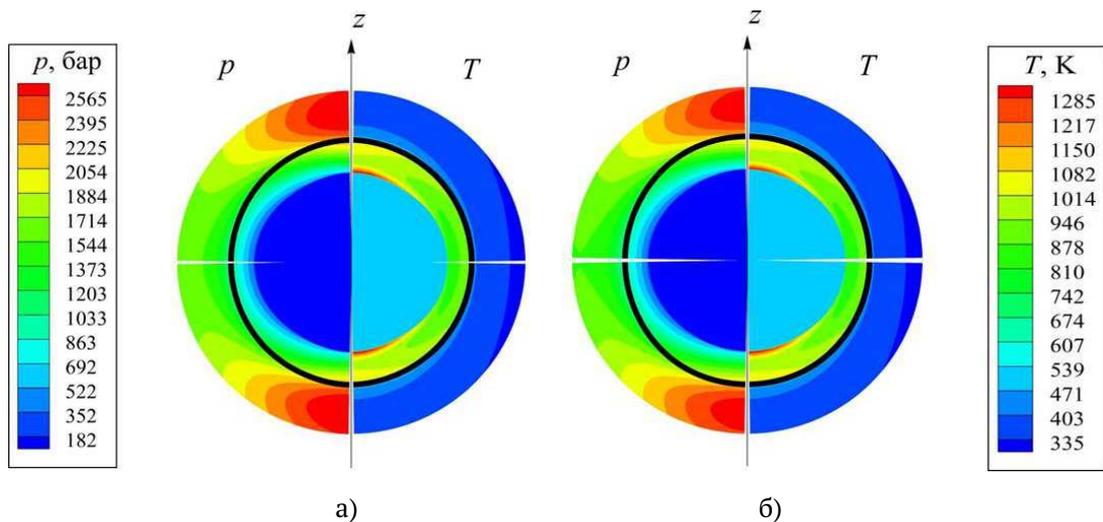


Рис. 6. Поля давления и температуры в пузырьке и окружающей жидкости в момент времени t' (указан на рис. 5), $t' > t_{cr}$, финальной стадии коллапса пузырька при его расчете с применением двумерной модели (а) и с использованием квазиодномерной модели при $t \leq t_{cr}$ и двумерной при $t > t_{cr}$ (б). Жирная черная линия — поверхность пузырька

ческой составляющих) соответствуют результатам расчетов стадии расширения пузырьков по модели с учетом их взаимодействия. Аналогично разделу 3.2 при квазиодномерном моделировании коллапса сферическая составляющая рассчитывается по одномерному варианту модели динамики одиночного пузырька, несферическая — по модели взаимодействующих пузырьков, но без учета их взаимодействия, а давление жидкости при коллапсе полагается постоянным и равным $p_{\infty}^* = 12.9$ бар. Рис. 5 и 6 показывают, что погрешности используемого в методике перехода от квазиодномерного

моделирования к двумерному вполне приемлемы.

4.5. Динамика центрального пузырька при однократном сильном расширении–сжатии в стримере из трех пузырьков

Рис. 7 и 8 иллюстрируют ряд важных особенностей динамики центрального пузырька при его однократном сильном расширении–сжатии в стримере из трех пузырьков в принятых условиях. На большей части расширения и сжатия форма пузырька определяется второй поверхностной гармоникой. На рис. 7 видно, что в ходе расширения относитель-

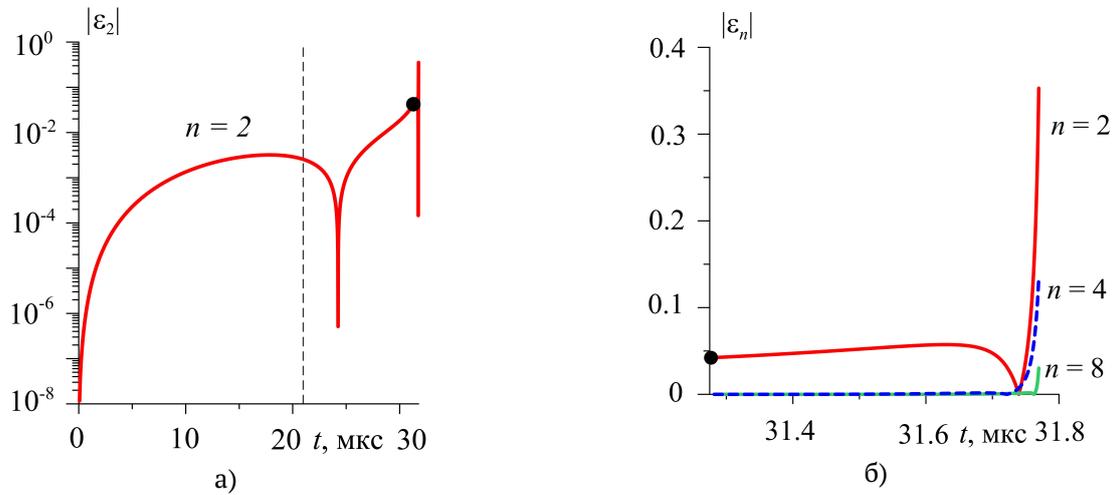


Рис. 7. Изменение амплитуд деформаций центрального пузырька: (а) в виде второй поверхностной гармоники при его расширении–сжатии, (б) в виде второй (красная кривая), четвертой (синяя кривая) и восьмой (зеленая кривая) гармоник в финальной стадии сжатия. Вертикальной линией указана граница между расширением пузырька и его сжатием, а точкой – момент, после которого влияние соседних пузырьков несущественно

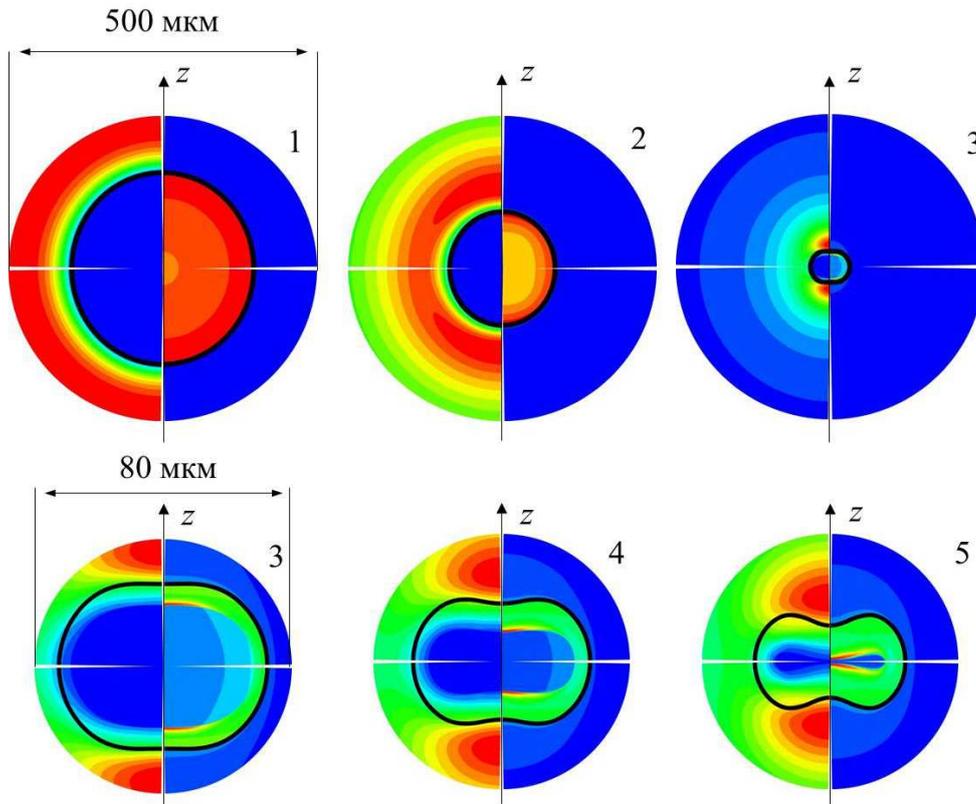


Рис. 8. Изменение полей давления (слева) и температуры (справа) в центральном пузырьке и окружающей жидкости в пять последовательных моментов времени $t_k, k = 1 - 5$ финальной стадии сжатия. Жирная черная линия – поверхность пузырька. Числовые значения границ между цветами определяются по формуле $f_i = f_m + (f_M - f_m) i / 16$, где $i = 1, 2, \dots, 15, f \equiv p, T$, а максимальные и минимальные значения p и T приведены в табл. 1

Таблица 1

k	t_k , мкс	p_m , бар	p_M , бар	T_m , К	T_M , К
1	31.282	0.08	36.7	273	362
2	31.629	2.9	140.5	273	444
3	31.760	5.8	2477	273	1382
4	31.765	6	3843	273	1938
5	31.770	6.8	6084	273	2257

ная амплитуда деформаций центрального пузырька $|\varepsilon_2|$ в виде второй поверхностной гармоники (деформации по другим гармоника в рамках принятой модели малы) монотонно возрастает, что обусловлено влиянием соседних пузырьков. При этом изначально сферический пузырек становится все более сплюснутым вдоль оси симметрии z .

В ходе сжатия (рис. 7(а),(б)) величина $|\varepsilon_2|$ сначала уменьшается до нуля, затем возрастает до некоторого максимума, после чего вновь падает до нуля и вновь возрастает. Другими словами, пузырек при сжатии из сплюснутого превращается в сферический, затем в вытянутый вдоль оси z , после чего вновь преобразуется в сферический, а далее — вновь в сплюснутый.

В конце финальной стадии сжатия в силу малости деформаций поверхности пузырька в его форму вносит вклад не только вторая, но и другие гармоники. На рис. 7(б) представлено изменение амплитуд трех наибольших по величине поверхностных гармоник в финале сжатия: $|\varepsilon_2|$, $|\varepsilon_4|$ и $|\varepsilon_8|$. Видно, что при $t > 31.7$ мкс амплитуда $|\varepsilon_4|$ примерно в 3 раза меньше, чем $|\varepsilon_2|$, а $|\varepsilon_8|$ в 10 раз меньше, чем $|\varepsilon_2|$.

На рис. 8 видно, что в момент 1 финальной стадии сжатия поверхность пузырька, поля давления и температуры в пузырьке и окружающей жидкости близки к сферическим. Затем их несферичность довольно быстро и сильно нарастает. При этом нарастает и неоднородность как по угловой координате, так и в радиальном направлении. К моменту 3 пузырек становится сплюснутым, что соответствует росту амплитуды деформаций пузырька по второй гармонике. Дальнейшее увеличение сплюснутости приводит к образованию вмятин (моменты 4–5). Форма этих вмятин определяется в большей степени гармоникой с номером $n = 4$ и в меньшей степени гармониками с $n = 6, 8$. В полости пузырька к моменту 4 сформировалась сильно несферическая сходящаяся к центру ударная волна с неоднородным распределением давления и температуры по ее фронту. Последующая фокусировка волны оказывается весьма далекой от сферической. В частности, начинающееся в мо-

мент 5 смыкание полости перед фронтом ударной волны реализуется в виде столкновения двух близких к плоским ударных волн. Эти волны распространяются навстречу друг к другу вдоль прямой, проходящей через центры пузырьков. Очевидно, что достигаемые при такой фокусировке максимальные степени сжатия будут намного ниже, чем при чисто сферической фокусировке.

Таким образом, показано, что при сильном расширении–сжатии изначально сферического кавитационного пузырька при наличии соседних пузырьков динамика пара в его полости может существенно отклоняться от того, что реализуется внутри аналогичного одиночного пузырька.

5. Заключение

Разработаны математическая модель и методика расчета сильного расширения–сжатия кавитационных пузырьков, находящихся в центральной области стримера, где пузырьки остаются практически неподвижными. По существу данные модели и методики представляют собой эффективное сочетание созданных ранее авторами для расчета динамики взаимодействующих слабонесферических пузырьков в стримере и динамики одиночного осесимметричного пузырька. Эффективность такого сочетания обусловлена учетом особенностей задачи. На стадии низкоскоростного расширения и сжатия гидродинамическое взаимодействие пузырьков существенно влияет на эволюцию их формы, в то время, как пузырьки остаются близкими к гомобарическим, а деформации их поверхности — малыми. Здесь применяется экономичная упрощенная модель динамики слабонесферических пузырьков. В финальной высокоскоростной стадии сжатия пузырьков их взаимодействие несущественно. Вместе с тем здесь нужно учитывать сжимаемость жидкости, неоднородность пара в пузырьках, испарение–конденсацию на межфазной поверхности, образование и фокусировку несферических ударных волн в центральной области пузырька. С учетом этого в финальной высокоскоростной стадии сжатия применяется модель динамики одиночного осесимметричного пузырька.

Приведен пример, иллюстрирующий особенности применения разработанных модели и методики для расчета динамики центрального пузырька при его сильном расширении–сжатии в простейшем стримере, состоящем из трех пузырьков. Показано, что при сильном расширении–сжатии изначально сферического кавитационного пузырька наличие соседних пузырьков может существенно отклонять динамику пара в его полости от аналогичного одиночного пузырька.

Список литературы

- [1] Flannigan D. J., Suslick K. S. Inertially confined plasma in an imploding bubble // *Nature Physics*. 2010. V. 6. P. 598–601. (DOI: [10.1038/nphys1701](https://doi.org/10.1038/nphys1701))
- [2] Taleyarkhan R.P. et al. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science*. 2002. V. 295, no. 5561. P. 1868–1873. (DOI: [10.1126/science.1067589](https://doi.org/10.1126/science.1067589))
- [3] Taleyarkhan R.P. et al. Nuclear emissions during self-nucleated acoustic cavitation // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 96. P. 034301. (DOI: [10.1103/PhysRevLett.96.034301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.034301))
- [4] Suslick K.S. Sonochemistry // *Science*. 1990. V. 247. P. 1439–1445. (DOI: [10.1126/science.247.4949.1439](https://doi.org/10.1126/science.247.4949.1439))
- [5] Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Ильгамов М.А. Образование сходящихся ударных волн в пузырьке при его сжатии // *ДАН*. 2014. Т. 458, № 3. С. 282–286. (DOI: [10.7868/S0869565214270115](https://doi.org/10.7868/S0869565214270115))
- [6] Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S. et. al. The theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17, no. 10. P. 1–31. (DOI: [10.1063/1.2104556](https://doi.org/10.1063/1.2104556))
- [7] Hilgenfeldt S., Grossmann S., Lohse D. Sonoluminescence light emission // *Phys. Fluids*. 1999. V. 11, no. 6. P. 1318–1330. (DOI: [10.1063/1.869997](https://doi.org/10.1063/1.869997))
- [8] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Нигматулин Р.И., Топорков Д.Ю. Эволюция искажений сферичности кавитационного пузырька при акустическом сверхсжатии // *Известия РАН. МЖГ*. 2010. № 1. С. 57–69. (<https://elibrary.ru/item.asp?id=13001975>)
- [9] Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Численное моделирование радиально сходящихся ударных волн в полости пузырька // *Математическое моделирование*. 2014. Т. 26, № 4. С. 3–20. (DOI: [10.1134/S2070048214060027](https://doi.org/10.1134/S2070048214060027))
- [10] Аганин А.А., Халитова Т.Ф. Деформация ударной волны при сильном сжатии несферических пузырьков // *Теплофизика высоких температур*. 2015. Т. 53, № 6. С. 923–927. (DOI: [10.1134/S0018151X15050016](https://doi.org/10.1134/S0018151X15050016))
- [11] Xu Y., Butt A. Confirmatory experiments for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Nuclear Engin. and Design*. 2005. V. 235, № 11–12. P. 1317–1324. (DOI: [10.1016/j.nucengdes.2005.02.021](https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2005.02.021))
- [12] Аганин А.А., Давлетшин А.И., Топорков Д.Ю. Динамика расположенных в линию кавитационных пузырьков в интенсивной акустической волне // *Вычислительные технологии*. 2014. Т. 19, № 1. С. 3–19. (<http://www.ict.nsc.ru/jct/annotation/1587>)
- [13] Аганин А.А., Давлетшин А.И. Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности // *Математическое моделирование*. 2009. Т. 21, № 6. С. 89–102. (<http://mi.mathnet.ru/mm2847>)
- [14] Gavriluyk S.L., Teshukov V.M. Drag force acting on a bubble in a cloud of compressible spherical bubbles at large Reynolds number // *European Journal of Mechanics B/Fluids*. 2005. V. 24, № 4. P. 468–477. (DOI: [10.1016/j.euromechflu.2004.12.001](https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2004.12.001))
- [15] Doinikov A.A. Equations of coupled radial and translational motions of a bubble in a weakly compressible liquid // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17, № 12. P. 128101. (DOI: [10.1063/1.2145430](https://doi.org/10.1063/1.2145430))
- [16] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.



Numerical simulation of bubble dynamics in central region of streamer

Aganin A.A., Davletshin A.I., Khalitova T.F.

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center of the RAS, Kazan

A mathematical model and a numerical technique for studying strong expansion and collapse of cavitation bubbles located in the central region of a streamer where the bubbles are almost motionless are developed. They are essentially efficient combinations of the models and techniques previously created by the authors for calculating the dynamics of interacting weakly-non-spherical bubbles in a streamer and the dynamics of a single axisymmetric bubble. The first model and technique are applied at the low-speed stage of expansion and compression of bubbles where their hydrodynamic interaction is significant. The second ones are used at the final high-speed stage of their collapse where the interaction is inessential. The simplest case of the streamer comprising three bubbles is considered as an example to illustrate the features of the developed model and numerical technique. It is shown that under the strong expansion and collapse of an initially spherical cavitation bubble, the presence of neighboring bubbles can substantially deflect the bubble cavity vapor dynamics from what is realized inside a similar but single bubble.

Keywords: cavitation bubble, hydrodynamic interaction of bubbles, shock waves, deformation of bubbles