

Сгущение газа с последующим разлетом

Шаяхметова Р.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Рассматривается система уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа. Система допускает группу преобразований с 14-мерной алгеброй Ли. Проективный оператор является спецификой этой алгебры. Рассматривается инвариантная подмодель на двумерной подалгебре, содержащей проективный оператор. Для безвихревых движений подмодель сведена к переопределенной системе из трех уравнений. Для нее найдено частное решение, дана его физическая интерпретация, графически представлены траектории движения частиц газа. Решение задает сгущение газа с последующим разлетом.

Ключевые слова: одноатомный газ, инвариантное решение, безвихревое движение

1. Введение

Модель движения одноатомного газа описывается системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \rho D\vec{u} + \nabla p &= 0, \\ D\rho + \rho(\nabla \cdot \vec{u}) &= 0, \\ DS &= 0, S = p\rho^{-\frac{5}{3}}, \end{aligned}$$

где $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — оператор градиента в декартовой системе координат; $\vec{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; S — энтропия.

Система допускает группу преобразований с 14-мерной алгеброй Ли. Характерной особенностью этой алгебры является наличие проективного оператора. В работе [2] построены инвариантные подмодели на двумерных подалгебрах, содержащих проективный оператор.

Рассматривается подмодель 2.5*, построенная в работе [2] в каноническом виде ($D_1 = u_1\partial_{x_1} + v_1\partial_{y_1}$):

$$\begin{aligned} D_1 u_1 + \rho_1^{-1} p_{1x_1} &= -x_1, \\ D_1 v_1 + \rho_1^{-1} p_{1y_1} &= 2w_1, \\ D_1 w_1 &= -2(v_1 + b) - c\rho_1^{-1} p_1, \\ D_1 \rho_1 + \rho_1(u_{1x_1} + v_{1y_1}) &= c\rho_1(a - w_1), \\ D_1 S_1 &= \frac{2}{3} c S_1 (w_1 - a), S_1 = p_1 \rho_1^{-\frac{5}{3}}, \end{aligned} \quad (1)$$

по следующему представлению решения:

$$\begin{aligned} u &= u_1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + tx(1+t^2)^{-1}, \\ v &= (-w_1 t + v_1 + ty - z + b)(1+t^2)^{-1}, \\ w &= ((v_1 + b)t + w_1 + tz + y)(1+t^2)^{-1}, \\ S &= S_1 \exp\left(\frac{2}{3} c(a\tau + (ty - z)(1+t^2)^{-1})\right), \\ \rho &= \rho_1(1+t^2)^{-\frac{2}{3}} \exp(c(-a\tau + (z - ty)(1+t^2)^{-1})), \\ p &= p_1(1+t^2)^{-\frac{5}{3}} \exp(c(-a\tau + (z - ty)(1+t^2)^{-1})), \\ x_1 &= x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau = \arctg t, \\ y_1 &= -b\tau + (y + tz)(1+t^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_1, v_1, w_1, \rho_1, p_1, S_1$ есть функции x_1 и y_1 .

Представление для вихря скорости имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = \text{rot} \vec{u} &= (w_{1y_1} + 2)(1+t^2)^{-1} \vec{i} + \\ &+ (t(u_{1y_1} - v_{1x_1}) - w_{1x_1})(1+t^2)^{-\frac{3}{2}} \vec{j} + \\ &+ (v_{1x_1} - u_{1y_1} - tw_{1x_1})(1+t^2)^{-\frac{3}{2}} \vec{k}. \end{aligned}$$

2. Безвихревые движения

Рассмотрим безвихревые движения $\vec{\omega} = 0$:

$$w_{1y_1} = -2, \quad w_{1x_1} = 0, \quad (3)$$

$$u_{1y_1} = v_{1x_1}. \quad (4)$$

Из (3) и из третьего уравнения системы (1) следует

$$w_1 = -2y_1, \quad p_1 = -\frac{2b}{c} \rho_1 \quad (5)$$

с точностью до переноса по y_1 , допускаемого системой (1).

Первые два уравнения системы (1) в силу (4) и (5) запишем в виде:

$$\begin{aligned} u_1 u_{1x_1} + v_1 v_{1x_1} - \frac{2b}{c} p_1^{-1} p_{1x_1} &= -x_1, \\ u_1 u_{1y_1} + v_1 v_{1y_1} - \frac{2b}{c} p_1^{-1} p_{1y_1} &= -4y_1 \end{aligned}$$

и проинтегрируем их

$$u_1^2 + v_1^2 + x_1^2 + 4y_1^2 - \frac{4b}{c} \ln |p_1| = C_1. \quad (6)$$

Из уравнения состояния определяется энтропия $S_1 = -\frac{2b}{c} \rho_1^{-\frac{2}{3}}$, и пятое уравнение системы (1) перепишется в виде:

$$\rho_1^{-1} D_1 \rho_1 = c(a + 2y_1). \quad (7)$$

Исключая ρ_1 из (7) в силу (5) и (6), получим

$$D_1(u_1^2 + v_1^2 + x_1^2 + 4y_1^2) = 4b(a + 2y_1). \quad (8)$$

Четвертое уравнение системы (1) принимает вид:

$$u_{1x_1} + v_{1y_1} = 0 \quad (9)$$

и вместе с (4) получим, что u_1, v_1 — сопряженные гармонические функции.

Таким образом, система (1) для безвихревых движений сведена к переопределенной системе из трех уравнений (4), (8), (9). Покажем, что она совместна.

3. Частное решение

Уравнение (9) выполняется при $a = 0, u_1 = 0, v_1 = b$. Тогда

$$\begin{aligned} w_1 &= -2y_1, \quad p_1 = C_2 \exp\left(\frac{c}{4b}(x_1^2 + 4y_1^2)\right), \\ \rho_1 &= -\frac{c}{2b} p_1, \quad S_1 = -\frac{2b}{c} \rho_1^{-\frac{2}{3}}, \\ C_2 &= \exp\left(\frac{c}{4b}(b^2 - C_1)\right), \end{aligned}$$

что соответствует решению уравнений газовой динамики, полученному по формулам (2):

$$\begin{aligned} u &= tx(1+t^2)^{-1}, \\ v &= (2b(1-t\tau) + ty - z)(1+t^2)^{-1} + \\ &\quad + 2t(y+tz)(1+t^2)^{-2}, \\ w &= 2b(t+\tau)(1+t^2)^{-1} + \\ &\quad + (y+tz)(t^2-1)(1+t^2)^{-2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{c}{2b} C_2 (1+t^2)^{-\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{c}{4b}(x^2(1+t^2)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + 4((y+tz)(1+t^2)^{-1} - b\tau)^2) + c(z-ty)(1+t^2)^{-1}\right), \\ p &= C_2 (1+t^2)^{-\frac{5}{3}} \exp\left(\frac{c}{4b}(x^2(1+t^2)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + 4((y+tz)(1+t^2)^{-1} - b\tau)^2) + c(z-ty)(1+t^2)^{-1}\right), \\ S &= \left(-\frac{2b}{c}\right)^{\frac{5}{3}} C_2^{-\frac{2}{3}} \exp\left(-\frac{c}{6b}(x^2(1+t^2)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + 4((y+tz)(1+t^2)^{-1} - b\tau)^2) - \frac{2}{3}c(z-ty)(1+t^2)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Для физичности решения необходимо, чтобы выполнялось условие $bc < 0$.

Температура газа определяется формулой $T = p(\rho R)^{-1} = -2b(cR(1+t^2))^{-1}$ и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. При $t \rightarrow \infty$ газ растекается до вакуума $p, \rho \rightarrow 0$.

Движение частиц

Движение частицы определяется системой уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t).$$

С формулами (10) она имеет интегралы:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \sqrt{1+t^2}, \\ y &= y_0 + 2b\tau - t(z_0 - 2y_0\tau - b\tau^2), \\ z &= z_0 - 2y_0\tau - b\tau^2 + t(y_0 + 2b\tau). \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (11) задают мировые линии частиц в R^4 . Постоянные x_0, y_0, z_0 — локальные лагранжевы координаты. Якобиан перехода от лагранжевых координат к эйлеровым равен $J = (1+t^2)^{\frac{3}{2}} > 0$. Мировые линии частиц не пересекаются. Локальные лагранжевы координаты являются глобальными для всего R^4 . Система (11) допускает два отражения $y \rightarrow -y, y_0 \rightarrow -y_0, t \rightarrow -t$ и $z \rightarrow -z, z_0 \rightarrow -z_0, t \rightarrow -t, b \rightarrow -b$.

В равенстве (11) вместо времени t удобно ввести новое время $\tau = \arctg t$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{\cos \tau}, \\ y \cos \tau + z \sin \tau &= \frac{y_0 + 2b\tau}{\cos \tau}, \\ -y \sin \tau + z \cos \tau &= \frac{z_0 - 2y_0\tau - b\tau^2}{\cos \tau}, \\ -\frac{\pi}{2} &< \tau < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Введем новые переменные $\xi = y \cos \tau + z \sin \tau$ и $\eta = -y \sin \tau + z \cos \tau$, т.е. систему координат, поворачивающуюся на угол τ относительно исходных осей Oy и Oz .

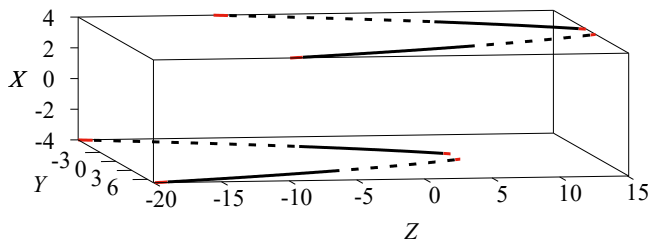


Рис. 1. Траектории в системе координат $OXYZ$

Дополнительно рассмотрим изменяющуюся систему координат $OXYZ$, где $X = kx$, $Y = k\xi$, $Z = k\eta$, $k = \cos \tau$, которая в начальный момент времени будет совпадать с $Oxyz$ и со временем будет поворачиваться на угол τ вокруг оси Ox и равномерно растягиваться в k^{-1} раз. В этой системе координат уравнения (11) примут вид:

$$\begin{aligned} X &= x_0, \\ Y &= y_0 + 2b\tau, \\ Z &= z_0 - 2y_0\tau - b\tau^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Исключая τ в (12), получим траекторию движения частицы (x_0, y_0, z_0) во вращающейся системе координат X, Y, Z . Траектория есть фрагмент параболы в плоскости $X = x_0$:

$$Z = -\frac{1}{4b}(Y + y_0)^2 + \frac{y_0^2}{b} + z_0$$

с вершиной $Y_B = -y_0$, $Z_B = \frac{y_0^2}{b} + z_0$ при $\tau = -\frac{y_0}{b}$,

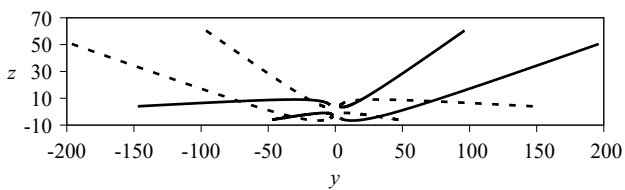


Рис. 2. Проекция траекторий на плоскость Oyz

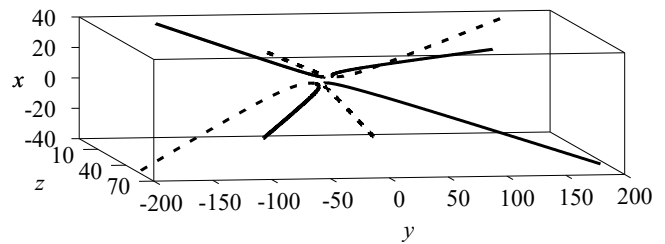


Рис. 3. Траектории в системе координат $Oxyz$

соединяющий точки $(x_0, y_0 - b\pi, z_0 + y_0\pi - b\frac{\pi^2}{4})$ и $(x_0, y_0 + b\pi, z_0 - y_0\pi - b\frac{\pi^2}{4})$.

На рис. 1 представлены 4-е траектории частиц в системе координат $OXYZ$ с начальными значениями $(x_0, y_0, z_0) = (4, 4, 5); (4, -4, 5); (-4, 4, -5); (-4, -4, -5)$ при $b = 1$. Черным цветом со штриховкой обозначена часть траекторий при $-\arctg 10 \leq \tau < 0$, черным цветом сплошной линией — при $0 \leq \tau \leq \arctg 10$. Красным цветом обозначен оставшийся фрагмент траекторий $(-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2})$.

На рис. 2, 3 представлены соответствующие траектории частиц в физическом пространстве $Oxyz$ и их проекции на плоскость Oyz с теми же начальными условиями и значениями параметров. Черным цветом со штриховкой обозначены траектории при $-10 \leq t < 0$, черным цветом сплошной линией — при $0 \leq t \leq 10$.

4. Заключение

Таким образом, полученное решение уравнений газовой динамики задает безвихревое сгущение газа с последующим разлетом до вакуума по пространственным кривым.

Список литературы

- [1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. № 58(4). С. 30–55.
- [2] Шаяхметова Р.Ф. Инвариантные подмодели ранга 3 и ранга 2 одноатомного газа с проективным оператором // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 127–135.

The compression of gas followed by expansion

Shayakhmetova R.F.

Mavlutov Institute of Mechanics, Ufa

We consider the system of gas dynamics equations with the state equation of the monatomic gas. The system admits a group of transformations with a 14-dimensional Lie algebra. A projective operator is specific to this algebra. We consider the invariant submodel on two-dimensional subalgebra containing the projective operator. For the vorticity-free motions, the submodel is reduced to an overdetermined system of three equations. A particular solution is found for it, physical interpretation is given, and trajectories of gas particles are depicted. The solution gives the gas compression followed by expansion.

Keywords: monatomic gas, invariant solution, vorticity-free motion

