

# Распространение слабых возмущений в теплой воде с воздушными пузырьками<sup>1</sup>

Вдовенко И.И., Вдовенко Н.Н.

Башкирский государственный университет, Уфа

Изучены особенности отражения и преломления гармонических волн на границе раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками с парогазовой смесью при прямом и косом их падении. Проведен численный анализ влияния начального объемного содержания газа  $\alpha_{g0}$  для двух начальных размеров пузырьков  $a_0 = 10^{-6}$  м и  $10^{-3}$  м. Изучено влияние частот возмущений на коэффициенты отражения и преломления звука при прямом падении и на зависимость угла преломления от угла падения.

**Ключевые слова:** гармоническая волна, пузырьки, коэффициент отражения, коэффициент преломления, пузырьковая жидкость

## 1. Введение

Значительный интерес исследователей к проблемам и задачам механики многофазных сред обусловлен широким распространением таких систем в природе и их интенсивным использованием в современной технике. Давно уже известно, что пузырьковая жидкость — система с уникальными волновыми свойствами [1, 2]. И эти уникальные свойства и вопросы распространения возмущений в таких средах вот уже в течение почти полувека вызывает большой интерес исследователей.

В работах [3–7] рассмотрено стационарное течение пузырьковой газожидкостной смеси в сопле кругового сечения. Численно проанализирована возможность реализации супервысоких температур и давлений в газовой фазе на участке сопла вблизи минимального сечения. Изучено влияние параметров (начального радиуса и объемного содержания пузырьков, определяющих состав объемного расхода жидкости, подаваемого в сопло) на картину течения. Проанализировано влияние фазовых переходов на реализацию высоких давлений при течении многофазного потока в сопле. В работе [5] исследо-

ваны особенности инициирования детонационных волн в химически активных пузырьковых средах, находящихся в каналах переменного сечения. Выявлено, что в зависимости от начального объемного содержания горючей смеси протекание детонации в сужающихся каналах возможно с возникновением одного или двух детонационных солитонов. В каналах с закрытым дном показана возможность возникновения устойчивой детонационной волны при отражении от дна канала.

В следующих работах представлены разработанные модели газожидкостной смеси для исследования волн давления малой амплитуды [8–15] и сильных ударных волн [16–18] в пузырьковых средах. Для волн давления малой интенсивности в двумерной постановке определены критерии гашения и усиления волнового сигнала в пузырьковых областях конечных размеров [8, 10–13, 15]. Установлено, что при эволюции в однородной пузырьковой жидкости колоколообразного по поперечной координате импульсного сигнала могут образовываться как лидирующая волна, так и расходящийся пакет волн [9, 14]. Для достоверного описания термодинамических свойств пузырьковой жидкости в условиях сильных ударных волн использовалось широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара в аналитической форме. Проведено сравнение расчетов с экспериментами для ударной волны с амплитудой давлений  $p_1 = 2.4$  МПа в воде с пузырька-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект №16-01-00432).

ми азота с начальным газосодержанием  $\alpha_{20} = 4\%$ , проанализированы процессы распространения и отражения от жесткой стенки ударной волны при изменении  $\alpha_{20}$  от 0.5 до 6 % и амплитуды ударной волны от 2 до 100 МПа [16, 17]. Диапазон давлений от 100 МПа до 100 ГПа был рассмотрен в [18].

В работах [19–22] проведены численное моделирование и исследование динамических процессов для пространственных задач, связанных с распространением волнового импульса в водной пене и с взаимодействием воздушной ударной волны с пенным барьером. Проведена верификация двумерной осесимметричной модели сравнением с расчетами, полученными на основе одномерной модели в случае сферической симметрии. Проанализированы режимы течения, приводящие к блокировке воздушных ударных волн пенными завесами, сопровождающейся образованием вихревых структур. Исследованы особенности и оценена эффективность демпфирующих свойств пены.

В [23] рассматривается отражение и преломление акустических волн на границе раздела между воздухом и туманом. Вычислены фазовая скорость и коэффициент затухания звука для тумана, а также коэффициенты отражения и преломления при нормальном и косом падении волны. Изучена зависимость угла преломления от частоты и угла падения акустической волны на границу раздела «воздух–туман». На основе полученных аналитических выражений и анализа численных расчетов установлено, что в случае, когда волна падает со стороны тумана на границу раздела, существует критический угол падения, такой что при больших углах происходит полное внутреннее отражение. Показано, что полное внутреннее отражение не происходит, когда волна падает со стороны воздуха на границу раздела «воздух–туман».

В [24] изучено распространение малых возмущений в перегретой жидкости, содержащей газовые зародыши. На основе полученного дисперсионного уравнения исследовано влияние величин температуры, концентрации зародышей на скорость распространения и коэффициент затухания возмущения

В работе [25] изучены особенности отражения и преломления акустической волны при различных углах падения на границу раздела между парогазокапельной средой и воздухом. Показано, что при определенном выборе угла падения волны на границу раздела со стороны смеси может наблюдаться полное внутреннее отражение акустической волны.

В [26] изучены особенности отражения и преломления при косом падении акустической волны на границу раздела между чистой и пузырьковой

холодной водой. На основе анализа полученных аналитических решений установлено, что в случае падения волны на границу раздела со стороны пузырьковой жидкости существует критический угол падения, зависящий от частоты и параметров дисперсной системы. При углах больших критического волна также полностью отражается от границы.

## 2. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть в жидкости, находящейся при температуре  $T_0$  и давлении  $p_0$ , имеются сферические пузырьки радиусом  $a_0$ , которые содержат пар и не растворимый в жидкой фазе газ. Рассмотрим распространение малых возмущений в рассматриваемой системе в плоскоодномерном и односкоростном приближении. Полагая, что жидкость является акустически сжимаемой, можем записать следующее линеаризованное уравнение для возмущений давления  $p_l$ , скорости и радиуса пузырьков [2]:

$$\frac{1 - \alpha_0}{C_l^0} \frac{\partial p_l}{\partial t} + \rho_{l0}^0 \frac{\partial v}{\partial x} - 3\rho_{l0}^0 \frac{\alpha_0}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} = 0.$$

Здесь  $\alpha_0$  — начальное объемное содержание пузырьков;  $C_l^0$  — замороженная скорость звука в жидкости;  $p_l$  — давление в жидкости;  $\rho_{l0}^0$  — истинная плотность жидкости;  $v$  — скорость среды;  $a_0$  — начальный радиус пузырьков.

Уравнение импульсов примем в следующем виде:

$$\rho_{l0}^0 (1 - \alpha_0) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p_l}{\partial x} = 0.$$

Примем, что возмущения давления в жидкости  $p_l$  и пузырьках  $p_g = p_v + p_a$  связаны уравнением Рэлея–Ламба, которое после линеаризации с учетом капиллярных сил имеет вид [2]:

$$\rho_{l0}^0 a_0 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 4 \frac{\rho_{l0}^0 \nu_l^{(u)}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} = p_g - p_l + \frac{2\sigma}{a_0^2} a.$$

Здесь  $\nu_l^{(u)}$  — кинематическая вязкость жидкости;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения воды.

В дальнейшем давление парогазовой смеси в пузырьках  $p_g$  будем считать однородным ( $\partial p_g / \partial r = 0$  — условие гомобаричности [2]), парциальные плотности пара, газа и температуры газа неоднородными ( $\partial \rho_v' / \partial r \neq 0$ ,  $\partial \rho_a' / \partial r \neq 0$ ,  $\partial T_g' / \partial r \neq 0$ ). Знак штрих наверху означает, что эти параметры зависят, помимо  $x$  и  $t$ , еще от радиальной координаты, отсчитываемой от центра пузырька.

Для учета межфазного теплообмена запишем уравнение теплопроводности и диффузии

внутри пузырька, а также уравнение теплопроводности в жидкости вокруг пузырька:

$$\rho_{g0}^0 c_g \frac{\partial T'_g}{\partial t} = \frac{\lambda_g}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_g r^2 \frac{\partial T'_g}{\partial r}) + \frac{\partial p_g}{\partial t},$$

$$\frac{\partial k'}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial k'}{\partial r}) \quad (0 < r < a_0),$$

$$\rho_{l0}^0 c_l \frac{\partial T'_l}{\partial t} = \frac{\lambda_l}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T'_l}{\partial r}) \quad (a_0 < r < a_0 \alpha_{g0}^{-1/3}),$$

где  $c_i$ ,  $\lambda_i$  и  $T'_i$  — теплоемкость при постоянном давлении, коэффициент теплопроводности и температура  $i$ -ой фазы ( $i = l, g$ );  $k'$  — массовая концентрация пара в пузырьках;  $D$  — коэффициент диффузии;  $\rho_{g0}^0$  — истинная плотность газа.

На поверхности раздела фаз ( $r = a_0$ ) зададим граничные условия, следующие из условий баланса тепла и массы:

$$T'_g = T'_l = T'_{(a)}, \quad k' = k_{(a)}, \quad \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial r} - \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial r} = j_l,$$

$$j = \frac{D}{1 - k_0} \left( \frac{\partial k'}{\partial r} \right)_{r=a_0},$$

где  $l$  — удельная теплота парообразования воды;  $T_{(a)}$  и  $k_{(a)}$  — возмущения температуры и концентрации пара на поверхности пузырька.

Для давления газа внутри пузырька получим:

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = -3\gamma \frac{p_{g0}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} + 3(\gamma - 1) \frac{\lambda_g}{a_0} \left( \frac{\partial T'_g}{\partial r} \right)_{r=a},$$

$$+ 3 \frac{\gamma p_{g0}}{a_0} \frac{B_v}{(1 - k_0) B_{g0}} \left( \frac{\partial k'}{\partial r} \right)_{r=a_0},$$

$$(\gamma = c_{g0}/(c_{g0} - B_0)), \quad c_{g0} = c_v k_0 - c_a (1 - k_0),$$

где  $B_i$  — приведенная газовая постоянная ( $i = v$  — пар и  $g$  — газ).

Для исходного равновесного состояния запишем следующее уравнение:

$$\frac{p_s(T_0)}{p_{g0}} = \frac{B_v k_0}{B_g + (B_v - B_g) k_0},$$

которое однозначно связывает массовую концентрацию пара в пузырьке с температурой  $T_0$ . Для зависимости  $p_s(T)$  используется формула  $p_s(T) = p_* \exp(-T_*/T)$ , где  $p_*$  и  $T_*$  — эмпирические параметры, зависящие от вида жидкости.

### 3. Дисперсионный анализ

Решение вышеприведенной системы будем искать в виде затухающей бегущей волны:

$$p_l, \quad p_g, \quad v, \quad a \sim \exp[i(Kx - \omega t)],$$

$$T'_i = T_i(r) \exp[i(Kx - \omega t)] \quad (i = g, l),$$

$$k' = k(r) \exp[i(Kx - \omega t)],$$

$$(K = k + i\delta, \quad C_p = \omega/k, \quad i = \sqrt{-1}),$$

где  $K$  — волновой вектор;  $\delta$  и  $C_p$  — соответственно коэффициент затухания и фазовая скорость волны. Из условия существования решения такого вида с учетом эффектов акустической разгрузки [27] пузырьков получим дисперсионное уравнение:

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{(1 - \alpha_0)^2}{C_l^2} + 3 \frac{\rho_{l0}^0 \alpha_0 (1 - \alpha_0)}{\Psi}, \quad (1)$$

где

$$\Psi = \frac{3\gamma p_{g0}}{Q} - \frac{\rho_{l0}^0 \omega^2 a_0^2}{\xi} - 4i \rho_{l0}^0 v_l^{(\mu)} \omega - \frac{2\sigma}{a_0},$$

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \xi = 1 - i\omega t_A, \quad t_A = \frac{a_0}{\alpha_{v0}^{1/3} C_l},$$

$$Q = 1 + \left( \frac{\gamma - 1}{k_0} H_a kh(y_g) + \frac{\gamma}{1 - k_0} H_v kh(z) \right) \times \\ \times \left( \frac{H_a}{k_0} + \frac{\gamma kh(z)}{(1 - k_0)\beta \operatorname{sh} v(y_l)} \right)^{-1},$$

$$kh(x) = 3(x \operatorname{cth} x - 1)x^{-2},$$

$$\operatorname{sh} v(x) = 3(1 + x(A_0 x \operatorname{th} x(A_0 - 1) - 1) \times \\ \times (A_0 x - \operatorname{th} x(A_0 - 1))^{-1})x^{-2}$$

или

$$\operatorname{sh} v(x) = 3(1 + x)x^{-2}, \quad A_0 = \alpha_0^{-1/3},$$

$$y_l = \sqrt{-i\omega a_0^2 / v_l^{(T)}}, \quad y_g = \sqrt{-i\omega a_0^2 / v_g^{(T)}},$$

$$z = \sqrt{-i\omega a_0^2 / D}, \quad \beta = (\gamma - 1)\eta H_v \chi^2,$$

$$\eta = \rho_{l0}^0 c_l / \rho_{g0}^0 c_g, \quad \chi = c_g T_0 / l, \quad H_v = B_v / B_0,$$

$$H_a = B_a / B_0, \quad H = H_v - H_a.$$

Из дисперсионного уравнения (1) при  $\omega \rightarrow 0$  следует следующая формула для равновесной скорости звука:

$$C_e = \sqrt{\frac{p_{g0}}{\rho_{l0}^0 \alpha_0} \left( (1 - k_0) H_a + \frac{k_0 \alpha_0 \gamma}{\beta} \right) - \frac{2}{3} \frac{\sigma}{a_0 \rho_{l0}^0 \alpha_0}}, \quad (2)$$

которая обобщает известные формулы Мэллока [27] и Ландау [28]. В частности, при точке кипения  $T_0 = T_s(p_0)$ , откуда, с учетом выражений из дисперсионного уравнения, получим:

$$C_e = \sqrt{k_0 \left( \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{l0}^0} \right)^2 \left( \frac{B_0}{B_v} \right)^2 \frac{l^2}{C_l T_0} + \frac{4}{3} \frac{\sigma}{a_0 \rho_{l0}^0 \alpha_0}}.$$

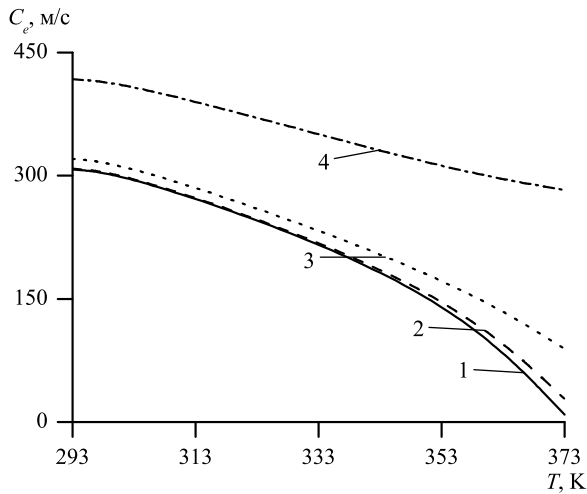


Рис. 1. Зависимость равновесной скорости звука от температуры. Линии 1, 2, 3 и 4 получены при  $a_0 = 10^3, 10^4, 10^5$  и  $10^6$  м

#### 4. Результаты расчетов

На основе вышеполученного дисперсионного уравнения были проведены численные расчеты для воды с парогазовыми пузырьками. В качестве значений физических и теплофизических параметров были использованы данные из [29].

Все расчеты проводились для жидкости, находящейся под давлением  $p_0 = 0.1$  МПа и при температуре  $T_0 = 373$  К.

На рис. 1 приведены зависимости равновесной скорости звука, определенной формулой (2), реализующиеся при выполнении условия  $\omega \leq \omega_i^{(T)}$  ( $\omega_i^{(T)} = v_i^{(T)} / (a_0 / (\alpha_{g0}^{1/3})^2)$ ), от температуры воды  $T_0$  для  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ . Линии 1, 2, 3 и 4 получены при  $a_0 = 10^3, 10^4, 10^5$  и  $10^6$  м соответственно. Видно, что с уменьшением радиуса пузырьков величина равновесной скорости растет. Это связано с увеличением «жесткости» пузырьков, которая зависит от капиллярных сил на межфазной поверхности и фазовых переходов.

На рис. 2 представлена зависимость фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от равновесной температуры для мелкодисперсной смеси ( $a_0 = 10^{-6}$  м) для  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ . Линии 1, 2 и 3 соответствуют значениям частоты  $\omega = 10^5, 10^6$  и  $10^7$  с $^{-1}$ . Численные расчеты показали, что в низкочастотной области ( $\omega \ll \omega_R$ , где  $\omega_R = a_0^{-1} \sqrt{3\gamma p_0 / \rho_{l0}^0}$  — частота Миннаэрта собственных колебаний пузырьков) влияние частоты возмущений на фазовую скорость незначительно, о чем свидетельствует практическое совпадение линий 1 и 2. Также из представленных диаграмм видно, что с

ростом равновесной температуры происходит снижение фазовой скорости примерно в два раза в низкочастотной области ( $\omega \ll \omega_R$ ). По результатам расчета, представленным на рис. 2 (б), наблюдается некоторое повышение значения коэффициента затухания  $\delta$  для каждого равновесного радиуса  $a_0$ .

На рис. 3 представлена зависимость фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от частоты возмущений при различных значениях равновесного радиуса  $a_0$ . Обозначение линий на рисунке соответствуют рис. 1. При рассматриваемых значениях  $a_0$  и  $T_0$  соответствующие равновесные концентрации пара в пузырьках равны  $k_0 = 0.998, 0.982, 0.842$  и  $0.347$ . Численные расчеты показали, что в низкочастотной области ( $\omega \ll \omega_R$ ) фазовая скорость для значения радиуса  $a_0 = 10^{-6}$  м равна  $C_p \approx 178.091$  м/с. Это связано с тем, что при  $a_0 = 10^{-6}$  м парциальное давление газа в пузырьках начинает играть определенную роль для упругости пузырька. Также стоит отметить, что при небольших изменениях фазовой скорости возмож-

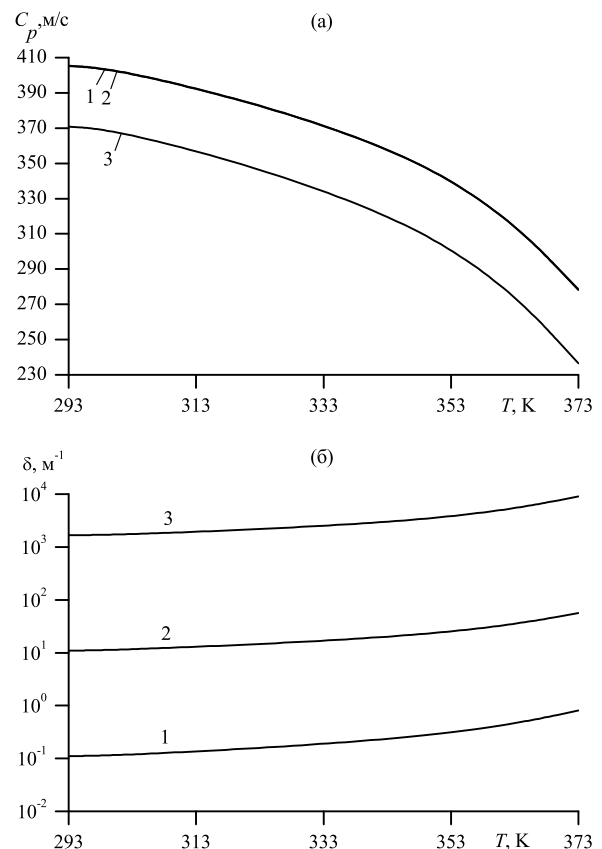


Рис. 2. Дисперсионные кривые при различных значениях частоты возмущений  $\omega$ . Линии 1, 2 и 3 соответствуют значениям частоты  $\omega = 10^5, 10^6$  и  $10^7$  с $^{-1}$

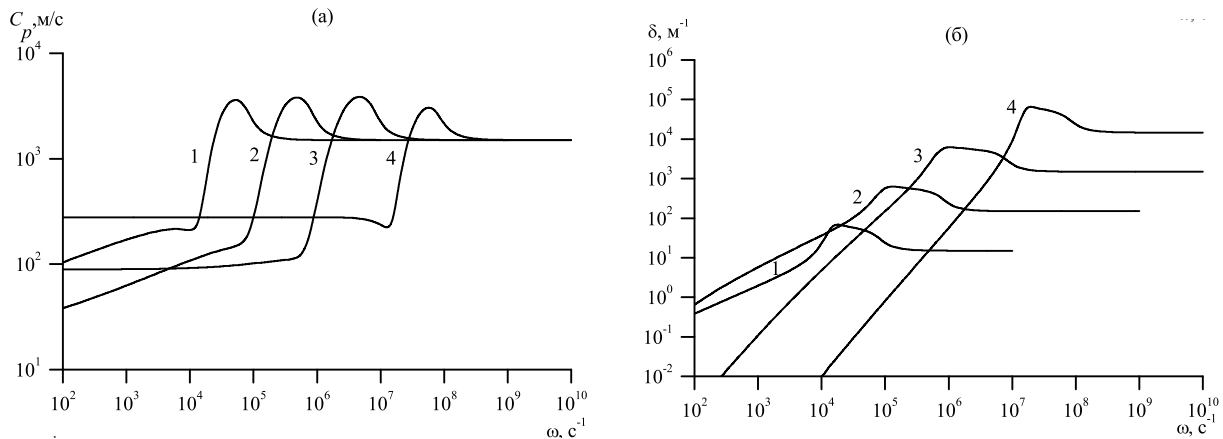


Рис. 3. Дисперсионные кривые при различных значениях равновесного радиуса  $a_0$ . Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют обозначениям на рис. 1

ны сильные изменения коэффициента затухания, например, для равновесного радиуса  $a_0 = 10^{-5}$  м он может меняться в диапазоне от  $10^{-1}$  м<sup>-1</sup> до  $10^3$  м<sup>-1</sup>, а для  $a_0 = 10^{-6}$  м — в диапазоне от  $10^0$  м<sup>-1</sup> до  $10^4$  м<sup>-1</sup>

На рис. 4 и 5 представлены зависимости фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от частоты возмущений при различных значениях начального объемного содержания  $\alpha_{g0}$  для крупнодисперсной смеси ( $a_0 = 10^{-3}$  м) (рис. 4) и мелкодисперсной смеси ( $a_0 = 10^{-6}$  м) (рис. 5). Линии 1, 2, 3 и 4 получены при  $\alpha_{g0} = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  и  $10^{-4}$ . Из представленных диаграмм видно, что с уменьшением объемного содержания фазовая скорость возрастает примерно в 5 раз в низкочастотной области ( $\omega \ll \omega_R$ ). Для крупнодисперсной смеси (рис. 4) также характерно некоторое увеличение фазовой скорости от частоты возмущений, а для мелкодисперсной смеси (рис. 5) наблюдается постоянство фазовой скорости. Это связано с тем, что при низких частотах повышается роль фазо-

вых переходов и за счет них парогазовые пузырьки с небольшим массовым содержанием инертного газа становятся менее упругими. Для рассмотренного варианта упругость пузырьков в основном определяется массовым содержанием газа. В зоне, когда частота внешнего возмущения сопоставима с частотой собственных колебаний пузырьков ( $\omega \sim \omega_R$ ), происходит аномальное увеличение фазовой скорости. Причем, чем больше начальное объемное содержание пузырьков  $\alpha_{g0}$ , тем больше изменение фазовой скорости. Аналогичные картины наблюдаются и для коэффициента затухания.

### 5. Заключение

Исследование гармонических волн в жидкости с паровоздушными пузырьками с размерами  $a_0 = 10^{-6}$  м показало, что при изменении начального объемного газосодержания от  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$  до  $\alpha_{g0} = 10^{-1}$  при равновесной температуре  $T_0 = 373$  К, вблизи низких частот ( $\omega \leq \omega_R$ , где  $\omega_R$  — собственная частота пузырьков), коэффициент за-

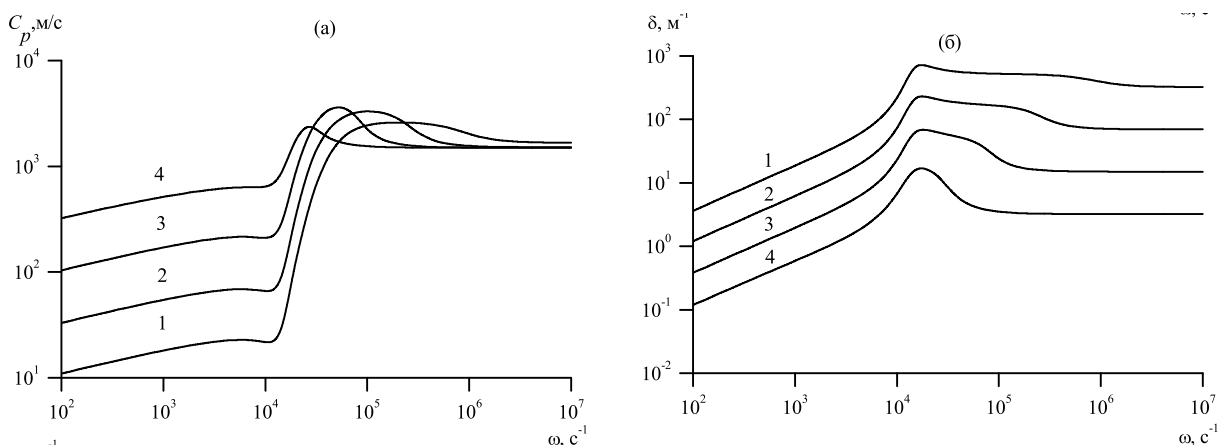


Рис. 4. Дисперсионные кривые при различных значениях начального объемного содержания  $\alpha_0$  для  $a_0 = 10^{-3}$  м. Линии 1, 2, 3 и 4 на рисунке соответствуют значениям частоты  $\alpha_0 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  и  $10^{-4}$

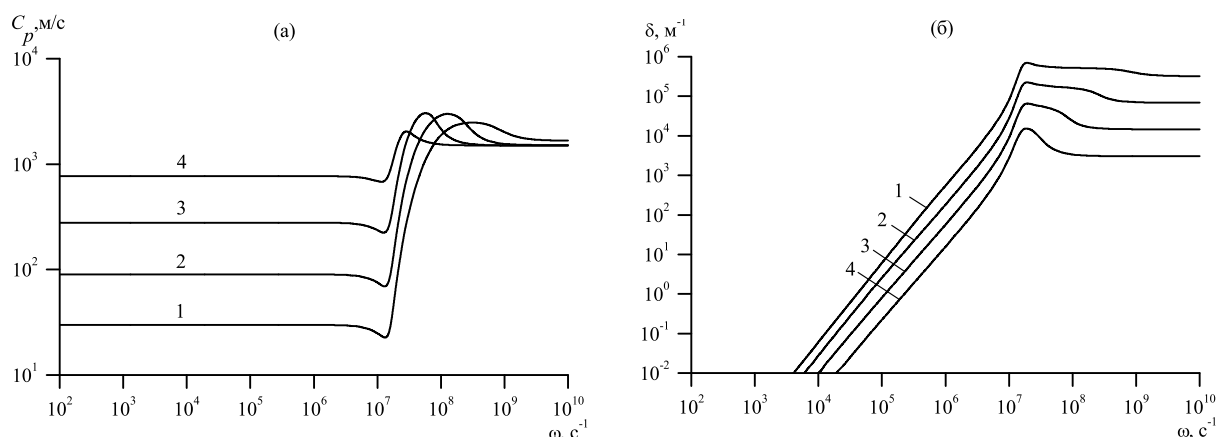


Рис. 5. Дисперсионные кривые при различных значениях начального объемного содержания  $\alpha_0$  для  $a_0 = 10^{-6}$  м. Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют обозначениям на рис. 4

тухания меняется незначительно (в зависимости от частоты возмущений).

Установлено, что с уменьшением равновесного радиуса пузырьков  $a_0$  имеет место небольшое увеличение фазовой скорости в низкочастотной области ( $\omega \ll \omega_R$ ), а коэффициент затухания  $\delta$  при этом может изменяться на несколько порядков. Роль фазовых переходов значительно снижается.

Отмеченные особенности фазовой скорости в зависимости от дисперсности и объемного содержания газовой фазы предсказывают наличие определенных эффектов при прямом и косом падении гармонических волн на границу раздела между жидкостью и ее смесью с газовыми пузырьками.

Авторы выражают благодарность академику АН РБ, д.ф.-м.н., профессору Владиславу Шайхулагзамовичу Шагапову и к.ф.-м.н., доценту Марату Назиповичу Галимзянову за полезные замечания и постоянный интерес к исследовательской работе.

Данная статья является продолжением исследований, которые будут опубликованы в [30].

## Список литературы

- [1] Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Теплообмен и волны в газожидкостных системах, Новосибирск: Наука, 1984.
- [2] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987. 360 с., 464 с.
- [3] Шагапов В.Ш., Лепихин С.А., Галимзянов М.Н. Реализация высоких давлений и температур в газовой фазе при истечении пузырьковой жидкости через сопло // Инженерно-физический журнал. 2007. Т. 80, № 6. С. 134–137. DOI: 10.1007/s10891-007-0155-0
- [4] Галимзянов М.Н., Лепихин С.А. Истечение двухфазной смеси через сопло с учетом фазовых переходов // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. Механика. 2010. № 2(76). С. 96–104.
- [5] Лепихин С.А., Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К. Иницирование детонационных волн в каналах переменного сечения заполненных жидкостью с пузырьками горючего газа // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48, № 2. С. 234–240. DOI: 10.1134/S0018151X10020124.
- [6] Галимзянов М.Н., Лепихин С.А., Чиглинцев И.А. Распространение нелинейных волн в каналах переменного сечения, сопровождаемое образованием гидрата газа // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 3–1(94). С. 103–115.
- [7] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Topolnikov A.S., Agisheva U.O., Buzina V.A. The Hydrodynamic Processes in Bubbly Liquid Flowing in Tubes and Nozzles // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2012. V. 68. PP. 1992–1999. DAI: 10.1999/1307-6892/1179.
- [8] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Гималтдинов И.К., Галимзянов М.Н. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны // Доклады Академии наук. 2001. Т. 378, № 6. С. 763–768. DOI: 10.1134/1.1384945.
- [9] Galimzyanov M.N., Gimaltidinov I.K., Shagapov V.Sh. Two-dimensional pressure waves in a fluid with bubbles // Fluid Dynamics. 2002. Т. 37, No. 2. С. 294–301. DOI: 10.1023/A:1015818602291.
- [10] Галимзянов М.Н. Распространение волн сжатия в пузырьковых зонах конечных размеров // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 2. С. 57–66.
- [11] Галимзянов М.Н. Распространение волн давления в пузырьковых зонах конечных размеров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, № 4. С. 27–35.

- [12] Bolotnova R.Kh., Galimzianov M.N., Topolnikov A.S., Agisheva U.O., Buzina V.A. Nonlinear Effects in Bubbly Liquid with Shock Waves // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2012. V. 68. PP. 2000–2007. DOI: 10.1999/1307-6892/14192.
- [13] Галимзянов М.Н. Усиление и гашение волн конечной длительности посредством пузырьковой области в одномерном приближении // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2012. Т. 9, № 2. С. 33–37. DOI: 10.21662/uim2012.2.044.
- [14] Гималтдинов И.К., Галимзянов М.Н. Динамика локализованного импульса в пузырьковой жидкости // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2014. Т. 10. С. 38–43. DOI: 10.21662/uim2014.1.007.
- [15] Болотнова Р.Х., Агишева У.О., Бузина В.А. Особенности пространственных ударно-волновых течений в паро-газожидкостных смесях // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2014. Т. 10. С. 27–31. DOI: 10.21662/uim2014.1.005.
- [16] Болотнова Р.Х., Галимзянов М.Н., Агишева У.О. Моделирование ударных волн в газожидкостных смесях // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2011. № 2. С. 3–14.
- [17] Агишева У.О., Болотнова Р.Х., Бузина В.А., Галимзянов М.Н. Параметрический анализ режимов ударно-волнового воздействия на газожидкостные среды // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2013. № 2. С. 15–28. DOI: 10.1134/S0015462813020038.
- [18] Hawker N.A., Ventikos Y. Interaction of a strong shockwave with a gas bubble in a liquid medium: a numerical study // *Journal of Fluid Mechanics*. 2012. V. 701. Pp. 59–97. DOI: 10.1017/jfm.2012.132.
- [19] Болотнова Р.Х., Агишева У.О. Особенности распространения ударных волн в водных пенах с неоднородной плотностью // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2012. Т. 9, № 1. С. 41–46. DOI: 10.21662/uim2012.1.007.
- [20] Агишева У.О. Воздействие ударных волн на пузырьковые и пенные структуры в двумерных осесимметричных объемах // *Вестник Башкирского университета*. 2013. Т. 18, № 3. С. 640–645.
- [21] Болотнова Р.Х., Агишева У.О. Пространственное моделирование динамики газожидкостной пены на подвижных лагранжевых сетках в условиях ударно-волнового воздействия // *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*. 2014. Т. 15, № 3. С. 427–440.
- [22] Агишева У.О., Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Коробчинская В.А. Особенности вихреобразования при воздействии импульса давления на газовую область, ограниченную пенным слоем // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2016. № 6. С. 47–56. DOI: 10.7868/S0568528116060025.
- [23] Шагапов В. Ш., Зайнуллина О. А. Распространение малых возмущений во вскипающей жидкости, содержащей газовые зародыши // *Теплофизика высоких температур*. 2015. Т. 53, № 1. С. 91–97. DOI: 10.1134/S0018151X14050162.
- [24] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности преломления звука в атмосфере при тумане // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. 2014. Т. 50, № 6. С. 683–691. DOI: 10.7868/S0002351514060145.
- [25] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности отражения и преломления акустических волн на границе раздела между газом и дисперсной системой // *Прикладная механика и техническая физика*. 2015. Т. 56, № 5(334). С. 119–129. DOI: 10.1134/S0021894415050107.
- [26] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности преломления и отражения звука на границе пузырьковой жидкости // *Акустический журнал*. 2015. Т. 61, № 1. С. 40–48. DOI: 10.1134/S1063771014060153.
- [27] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волны в пузырьковой среде // *Доклады АН СССР*. 1989. Т. 304, № 5. С. 1077–1081.
- [28] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. М.: Физматлит, 2006. 736 с.
- [29] Варгафтик Н.Б. *Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей*. 2-е изд.: Наука. 1972. 720 с.
- [30] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И., Хабеев Н.С. Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками // *Инженерно-физический журнал*. 2018. Т. 91, № 2. (в печати)

## Propagation of weak disturbances in warm water with air bubbles

Vdovenko I.I., Vdovenko N.N.

Bashkir state university, Ufa

The features of reflection and refraction of harmonic waves at the interface between a "pure" liquid and a liquid with bubbles with a vapor-gas mixture under direct and oblique incidence are studied. A numerical analysis is made of the effect of the initial volumetric gas content  $\alpha_{g0}$  for two initial bubble sizes  $a_0 = 10^{-6}$  m and  $10^{-3}$  m. The influence of the disturbance frequencies on the reflection and refraction coefficients of sound in direct incidence and on the dependence of the angle of refraction on the angle of incidence is studied.

**Keywords:** harmonic wave, bubbles, reflection coefficient, refractive index, bubble liquid



**Многофазные системы:**  
модели, эксперимент, приложения

ИМех им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН

Статья рекомендована к публикации  
Программным комитетом VI Российской конференции  
«Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения»