

# Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией<sup>1</sup>

Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе изучается течение жидкости в плоском канале с гидросопротивлением для двух случаев динамического изменения геометрии канала: поперечное сжатие проходного отверстия гидросопротивления (течение вызывается приложенным к слою перепадом давления) и продольное движение гидросопротивления вдоль канала (течение вызывается этим движением). Получено, что в геометрии с поперечным сжатием течение является ламинарным без образования вихрей. При продольном перемещении гидросопротивления расход жидкости остается постоянным с образованием устойчивых вихрей, перемещающихся вдоль канала со скоростью движения гидросопротивления. На основе результатов моделирования построена аналитическая модель, учитывающая расход жидкости от ширины проходного отверстия гидросопротивления, которая содержит четыре интерполяционных параметра. Данную модель можно использовать в качестве элемента вычислительного стенда для определения обобщенного расхода жидкости в рассматриваемой системе.

**Ключевые слова:** гидродинамика, подвижная геометрия, метод конечных элементов, вычислительный стенд

## 1. Введение

В различных технических устройствах (ТУ), использующих жидкости или газы, широко применяются элементы с калиброванными отверстиями, так называемые гидросопротивления, позволяющие дозировать расход рабочего тела за счет изменения проходного сечения на определенном участке системы. Расход через гидросопротивление по существующим инженерным методикам, как правило, рассчитывается по эмпирическим формулам с различными поправочными коэффициентами. Если для устройств, имеющих «классические» размеры, грубость расчетов по этим формулам вполне допустима и может быть компенсирована за счет различных технических решений, то для микроэлектромеханических систем (МЭМС), имеющих характерные размеры менее 0.2–0.5 мм, требуется более высокая точность расчетов. Поэтому актуальным представляется синтез более точных математических моделей, позволяющих, благодаря использо-

ванию современных вычислительных средств и методов, получить требуемые результаты за приемлемое время.

Ранее авторами настоящей работы были разработаны компьютерные модели, которые могут быть использованы в качестве элемента вычислительного стенда, для одного элемента ТУ (поршень и гидросопротивление). Модель поршня для осциллирующего перепада давления была построена в работе [1] методами факторного вычислительного эксперимента второго порядка, которая учитывает пять параметров (амплитуда и частота перепада давления, трение поршня, жесткость пружины, отношение силы трения покоя и трения скольжения). В работе [2] была построена модель стационарного течения жидкости через цилиндрическое гидросопротивление с учетом перепада давления и радиуса проходного отверстия гидросопротивления, но без учета зависимости модели материала жидкости от температуры. В работе [3] представлено расширение данной модели для описания работы элемента во всей рабочей области температур. В работе [4] изучалось течение жидкости через систему трех элементов. Во всех этих исследованиях геометрия канала была фиксированной.

В настоящей работе моделируются и исследу-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН № П-31.

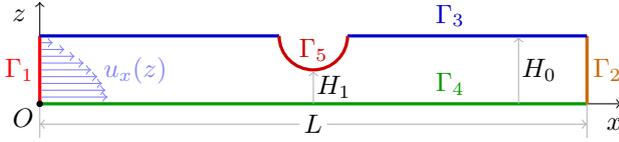


Рис. 1. Геометрия плоского канала с подвижным гидросопротивлением

ются особенности течения жидкости в плоском канале с гидросопротивлением для двух случаев динамического изменения геометрии канала: поперечного сжатия проходного отверстия гидросопротивления (течение вызывается приложенным к слою перепадом давления) и продольного движения гидросопротивления вдоль канала (течение вызывается этим движением).

Целью работы является построение элемента вычислительного стенда для плоского канала с гидросопротивлением изменяющейся геометрии, позволяющего по заданным входным параметрам найти расход жидкости с помощью простых интерполяционных формул.

## 2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается течение жидкости через плоский канал с проходным отверстием шириной  $H_0$  и длиной  $L$  и гидродинамическим сопротивлением, имеющим обтекаемую форму. На рис. 1 представлена геометрия в случае зеркальной симметрии и введены следующие обозначения:  $\Gamma_1$  — входное отверстие канала;  $\Gamma_2$  — выходное отверстие канала;  $\Gamma_3$  — стенка канала;  $\Gamma_4$  — центральная ось канала (ось зеркальной симметрии);  $\Gamma_5$  — подвижная граница;  $u_x(z)$  — профиль скорости жидкости в продольном направлении;  $H_1$  — радиус проходного отверстия гидросопротивления. Были рассмотрены следующие два вида подвижной границы  $\Gamma_5$ :

- $\Gamma_5$  перемещается перпендикулярно слою, и ширина проходного отверстия гидросопротивления  $H_1$  меняется от  $H_0$  до 0;
- $\Gamma_5$  движется вдоль стенки канала вправо.

В первом случае течение жидкости создается за счет разности давлений на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , а во втором случае — за счет поступательного перемещения самого гидросопротивления.

Течение вязкой несжимаемой жидкости в канале в отсутствии внешних сил описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности, которые имеют следующий вид [5]:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$  — вектор скорости жидкости;  $t$  — время;  $\nabla$  — оператор набла;  $\nabla p$  — градиент давления;  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости;  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Для численного решения уравнений (1) проводится дискретизация по времени; для метода конечных элементов применяется слабая формулировка.

Дискретизация по времени уравнения вида  $\partial u / \partial t = F(\mathbf{x}, \dots)$  проводится в виде неявной схемы Кранка–Николсон 2-го порядка [6]:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{\tau}{2} (F^{n+1} + F^n),$$

где  $\tau$  — шаг по времени. Тогда вариационная форма уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности с данной дискретизацией по времени будет иметь вид:

$$\begin{aligned} F \left( \begin{matrix} \mathbf{u} \\ p \end{matrix} \right) &= \int_{\Omega} \frac{2}{\tau} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \mathbf{v} + ((\mathbf{u}^{n+1} \nabla) \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{v} + \\ &+ p^{n+1} \nabla \mathbf{q} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u}^{n+1} \nabla \mathbf{v} + ((\mathbf{u}^n \nabla) \mathbf{u}^n) \mathbf{v} + \\ &+ p^n \nabla \mathbf{q} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u}^n \nabla \mathbf{v}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$  и  $p$  — переменные;  $\mathbf{v} = (v_x, v_z)$  и  $q$  — тестовые функции;  $\text{Re}$  — число Рейнольдса.

Последняя система уравнений является нелинейной из-за конвективного слагаемого  $\int ((\mathbf{u}^{n+1} \nabla) \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{v}$  и может быть решена итерационным методом Ньютона. Для этого функция  $F$  разлагается в ряд Тейлора относительно малых изменений решения  $(\delta \mathbf{u}, \delta p)$  следующим образом:

$$F \left( \begin{matrix} \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \\ p + \delta p \end{matrix} \right) = F \left( \begin{matrix} \mathbf{u} \\ p \end{matrix} \right) + dF \left( \begin{matrix} \mathbf{u} \\ p \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta p \end{pmatrix} + o \left( \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta p \end{pmatrix} \right),$$

где левая часть полагается равной нулю (уравнения удовлетворяют обновленному решению) и нелинейные слагаемые  $o(\dots)$  в разложении отбрасываются; дифференциал  $dF$  равен

$$\begin{aligned} dF \left( \begin{matrix} \mathbf{u} \\ p \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta p \end{pmatrix} &= \int_{\Omega} \frac{2}{\tau} \delta \mathbf{u} \mathbf{v} + ((\delta \mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{v} + \\ &+ ((\mathbf{u}^{n+1} \nabla) \delta \mathbf{u}) \mathbf{v} - \delta p \nabla \mathbf{q} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \nabla \mathbf{v}. \end{aligned}$$

На каждом шаге итерации Ньютона решается уравнение  $F + dF(\delta \mathbf{u}, \delta p) = 0$  и решение обновляется на величину поправки  $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$ ,  $p = p + \delta p$  до тех пор, пока невязка  $\|F\|$  не станет больше  $\epsilon_F$  или норма поправки решения  $\max(\|\delta \mathbf{u}\|, \|\delta p\|)$  — больше  $\epsilon_\delta$ .

Начальные условия имеют вид:

$$u_x = 0, \quad u_z = 0,$$

т.е. в начальный момент времени жидкость во всей области покоится.

Граничные условия в геометрии со сжимающимся гидросопротивлением:

- $\Gamma_1: p = \Delta p, u_z = 0$  (отсутствие поперечного течения);
- $\Gamma_2: p = 0, u_z = 0$ ;
- $\Gamma_3: u_x = 0$  и  $u_z = 0$  (условие залипания на неподвижной границе);
- $\Gamma_4: u_z = 0$ ;
- $\Gamma_5: u_x = 0$  и  $u_z = u_c$  (условие залипания на подвижной границе).

Здесь  $\Delta p$  — приложенный к слою перепад давления;  $u_c$  — скорость движения границы перпендикулярно каналу.

Граничные условия в геометрии с продольным движением границы:

- $\Gamma_1, \Gamma_2$  и  $\Gamma_4: u_z = 0$ ;
- $\Gamma_3: u_x = 0$  и  $u_z = 0$  (условие залипания на неподвижной границе);
- $\Gamma_5: u_x = u_s$  и  $u_z = 0$  (условие залипания на подвижной границе).

Здесь  $u_s$  — скорость движения границы вдоль канала.

### 3. Моделирование движения границы

Многие задачи гидродинамики связаны с течением жидкости в канале, имеющем неизменную геометрию. Однако в ТУ канал может со временем изменять свою геометрию под действием жидкости или под действием внешнего воздействия. При численном моделировании в системах с изменяемой геометрией необходимо контролировать перестроения расчетной сетки с сохранением точности расчетов. В настоящей работе разработан алгоритм с заданной динамикой изменения геометрии для определения диапазона возможностей решения такого рода задач.

Граничные условия для скорости жидкости на поверхности определяются условием залипания — скорость жидкости на границе совпадает со скоростью движения границы. После перемещения границы необходимо провести адаптацию сетки во всей модели. Если за шаг по времени  $\tau$  перемещение  $\Delta x$  составляет величину, превышающую характерный размер конечного элемента  $\Delta \ell$ , то шаг по времени необходимо уменьшить не менее, чем в  $\Delta x / \Delta \ell$  раз для избежания появления конечных элементов с отрицательными объемами. Если перемещение границы намного меньше, чем характерный размер конечного элемента, то адаптацию расчетной сетки

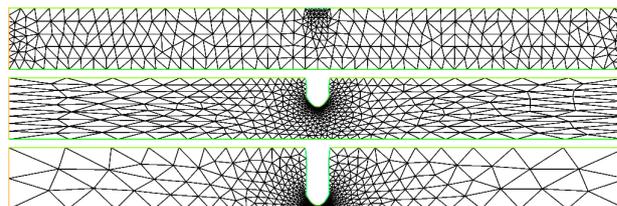


Рис. 2. Адаптивная расчетная сетка в различные моменты времени при стационарном поперечном сжатии границы

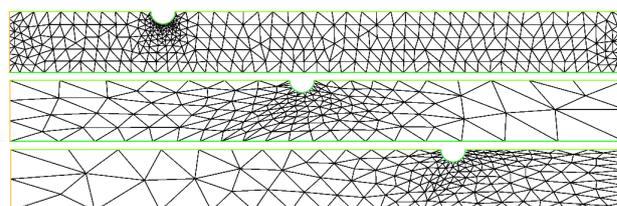


Рис. 3. Адаптивная расчетная сетка в различные моменты времени при стационарном продольном движении границы

можно проводить один раз за несколько перемещений границы для повышения скорости моделирования.

Таким образом, перед перемещением границы необходимо провести проверку того, что это перемещение не приведет к появлению отрицательных объемов и, при необходимости, уменьшить шаг по времени и, соответственно, величину смещения границы. Адаптация сетки должна проводиться с оптимизацией количества используемых элементов. В качестве критериев для адаптации используются:

- сохранение плотности элементов на подвижной границе (для предотвращения нарушения формы границы);
- градиент скорости жидкости ( $\nabla \mathbf{u}$ ) (области с большим градиентом скорости имеют большую плотность сетки, что позволяет уменьшить количество элементов там, где распределение скорости равномерно).

В начале моделирования расчетная сетка строится без учета градиентов скоростей, поскольку в начальный момент времени жидкость покоится. Примеры изменения расчетной сетки в различные моменты времени представлены на рис. 2 для поперечного сжатия проходного отверстия и на рис. 3 для продольного перемещения гидросопротивления. Моделирование проводилось с помощью пакета компьютерного решения уравнений в частных производных методом конечных элементов FreeFem++ [7].

## 4. Результаты

Численное моделирование проводилось в плоском канале длиной  $L = 200$  мкм, шириной  $H_0 = 20$  мкм с рабочей жидкостью с плотностью  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и вязкостью  $\mu = 10^{-3}$  Па·с. Уравнения (1) решались методом конечных элементов с помощью итерационного метода Ньютона (относительная погрешность  $10^{-8}$ ) с предварительным расчетом по методу Пикарда (решение линейной задачи для повышения устойчивости метода Ньютона). Дополнительно устойчивость схемы повышалась введением искусственной сжимаемости (слагаемое с давлением  $p$  в явном виде в уравнении неразрывности с малым множителем  $10^{-8}$ ).

### 4.1. Случай поперечного сжатия гидросопротивления

При моделировании задачи с поперечным сжатием гидросопротивления ширина проходного отверстия  $H_1$  варьировалась от  $H_0$  до  $0.094H_0$ ; длина основания гидросопротивления  $L_g = 0.4H_0$ ; перепад давления  $\Delta p = 1$  Па; скорость сжатия гидросопротивления  $u_c = 2 \cdot 10^{-3}$  м/с, тогда максимальное сжатие происходит за время  $T = (1 - 0.096)H_0/u_c = 9.06 \cdot 10^{-3}$  с.

При течении жидкости в плоском канале под действием перепада давления  $\Delta p/L$  стационарное решение уравнений (1) имеет вид:

$$u_x(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} (H_0^2 - z_0^2). \quad (2)$$

Расход жидкости  $Q_c$  (размерность [м<sup>2</sup>/с]) определяется по следующей формуле:

$$Q_c(H_0) = \int_0^H u_x(z) dz = \frac{1}{3\mu} \frac{\Delta p}{L} H_0^3. \quad (3)$$

Моделирование задачи проводилось следующим образом. Для установления стационарного течения в плоском канале первые 10 итераций рассчитывались без учета изменения геометрии системы. Затем начинался процесс линейного сжатия проходного отверстия гидросопротивления от значения величины  $H_1 = H_0$  (полное открытие отверстия) до значения  $H_1 = 0.094H_0$ , поскольку полное закрытие отверстия без нарушения целостности расчетной сетки невозможно, с перерасчетом течения жидкости в измененной геометрии и расчетом расхода жидкости. После каждого перемещения границы производилась адаптация расчетной сетки по полю градиента скоростей. Для примера на рис. 2 показана расчетная сетка в различные моменты времени: полное открытие проходного отверстия (сверху), промежуточный вариант (в

середине), максимальное закрытие (снизу). Затем весь процесс повторялся в обратном направлении (от максимального закрытия до полного открытия проходного отверстия гидросопротивления).

Форма границы проходного отверстия рассчитывалась близкой к овальной с сохранением длины основания гидросопротивления по формуле  $\Delta z \cdot (1 - 4z^2/L_g^2)$ , где  $\Delta z$  — изменение проходного отверстия за один шаг по времени;  $L_g$  — длина основания гидросопротивления. При сужении проходного отверстия на величину  $L_g/2$  форма становится близкой к полукругу с радиусом  $L_g/2$  и дальнейшее сжатие происходило поперечным перемещением границы на величину  $\Delta z$  без изменения формы. Таким образом, на протяжении всего процесса моделирования сохранялась обтекаемая форма гидросопротивления для предотвращения образования вихревых течений.

В начале процесса сжатия проходного отверстия за время порядка 10 мс устанавливается стационарное течение. Зависимость расхода жидкости  $Q_c$  от ширины проходного отверстия  $H_1$  будет линейной для значений  $H_1$  в диапазоне  $(0.1H_0, 0.4H_0)$  и нелинейной для других значений. Наличие области линейной зависимости может быть использовано для создания устройства точного регулирования расхода жидкости.

По результатам моделирования были определены следующие особенности течения в плоском канале при поперечном сжатии гидросопротивления, позволяющие построить элемент вычислительного стенда для расхода жидкости  $Q_c(H_0, H_1)$  в зависимости от произвольного значения проходного сечения гидросопротивления  $H_1$  и фиксированного значения ширины канала  $H_0$ :

1. Динамика течения жидкости в плоском канале с гидросопротивлением переменной ширины является квазистационарной, т.е. течение жидкости, вызываемое изменением геометрии канала, мало меняется со временем. На входе и выходе канала профиль скорости  $u_x(z)$  остается параболическим, следовательно, скорость можно определить по формуле (2). Отклонение от параболической формы профиля скорости во время всего процесса не превышает 3% от аналитического профиля (2) для перепадов давления до  $\Delta p = 10^4$  Па, которое можно считать предельным в разрабатываемом элементе. Дальнейшее повышение давления приводит к потере устойчивости течения, которое становится нестационарным, а профиль скорости — не параболическим.
2. Поскольку расход несжимаемой жидкости на входе или выходе канала, или в любом попе-

речном сечении не меняется, то для расчета расхода жидкости за основу можно взять формулу (3). Численно расход жидкости определялся интегрированием профиля скорости по границе  $\Gamma_1$  или  $\Gamma_2$ . Сравнение расходов жидкости, вычисленных на входе и выходе, является дополнительной проверкой точности расчета. В расчетах эти значения совпадали в пределах ошибок округления (относительная погрешность не превышала  $10^{-5}\%$ ).

3. Из формулы (3) следует, что расход жидкости пропорционален градиенту давления  $G = \Delta p/L$  и обратно пропорционален вязкости  $\mu$ .
4. Плотность жидкости  $\rho$  влияет только на установление течения жидкости, а на расход жидкости не влияет совсем (см., формулу (3)).
5. Расход жидкости в зависимости от ширины проходного отверстия  $H_1$  нелинеен. Нелинейность можно учесть с помощью модификации формулы (3) в следующем виде:

$$Q_c(H_0, H_1) = Q_c(H_0)f_c(H_0, H_1),$$

где расход жидкости в канале постоянной ширины  $Q_c(H_0)$  определяется по формуле (3); функция  $f_c(H_0, H_1)$  (рис. 4, черная линия) определяется из результатов численного моделирования. В случае  $H_1 = H_0$  функция равна единице и результаты совпадают с течением в плоском канале; если  $H_1 = 0$ , то проходного отверстия нет и течение отсутствует. Результаты расчета можно использовать для построения интерполяции функции  $f_c(H_0, H_1)$  в виде:

$$f_c(H_0, H_1) = \frac{H_1}{H_0} \times \frac{H_0^2 + a_1(H_0 - H_1) + a_2(H_0 - H_1)^2}{H_0^2 + a_3(H_0 - H_1) + a_4(H_0 - H_1)^2}, \quad (4)$$

где коэффициенты интерполяции  $a_1 = -11.46$ ,  $a_2 = -0.4526$ ,  $a_3 = -29.96$ ,  $a_4 = 0.7701$  находятся решением системы линейных уравнений для четырех различных значений  $H_1$ . Предельные значения функции при  $H_1 = 0$  мкм и  $H_1 = 20$  мкм обеспечиваются видом функции; промежуточные значения определялись в точках  $H_1 = \{1.2, 5, 10, 15\}$  мкм, для которых  $f_c = \{0.01353, 0.2549, 0.6769, 0.9224\}$ . Интерполяционная формула с высокой точностью согласуется с численным моделированием (см. рис. 4).

Отметим, что на рис. 4 представлены две кривые: для этапа сжатия ( $H_1$  меняется от максимального до минимального значения) и этапа расширения ( $H_1$  меняется в обратном направлении) гидросопротивления. Видно, что кривые практически

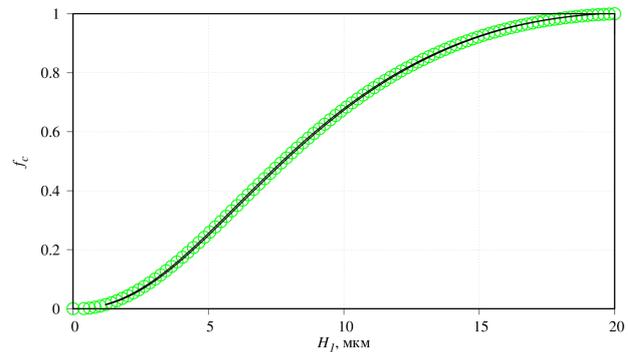


Рис. 4. Зависимость функции  $f_c$  от ширины проходного отверстия  $H_1$  при стационарном поперечном сжатии границы. Черные линии — результаты моделирования, зеленые круги — интерполяция (4)

совпадают (относительная погрешность не превышает 0.9%), т.е. ошибки округления при перестроении расчетной сетки (за весь процесс моделирования расчетная сетка перестраивалась 940 раз) влияют на результат незначительно.

Выявленные особенности течения позволяют построить элемент вычислительного стенда для обобщенного расхода жидкости  $Q_c(H_0, H_1)$  в случае произвольных градиентов давления  $G_1$ , вязкости  $\mu_1$  и ширины проходного отверстия  $H_1$  в виде:

$$Q_c(H_0, H_1) = Q_c(H_0)f_c(H_0, H_1) \frac{G_1}{G} \frac{\mu}{\mu_1}, \quad (5)$$

где  $Q_c(H_0)$  определяется по формуле (3) при фиксированных значениях градиента давления  $G = \Delta p_0/L$ , вязкости  $\mu$  и ширины канала  $H_0$ , а интерполяционная функция  $f_c(H_0, H_1)$  определяется выражением (4).

## 4.2. Случай продольного перемещения гидросопротивления

При моделировании течения жидкости под действием продольного перемещения гидросопротивления со скоростью  $u_s$  используются те же геометрические параметры и физические свойства жидкости, как в предыдущей задаче. Гидросопротивление рассматривалось в форме полукруга радиуса  $R_g = L_g/2 = 0.2H_0$ ; при перемещении форма гидросопротивления не менялась. В рассматриваемом случае вместо градиента давления задаются скорость перемещения границы  $u_s = 10^{-4}$  м/с и время процесса  $T = 10^{-4}$  с.

Движение границы гидросопротивления с постоянной скоростью  $u_s$  вызывает течение жидкости вдоль канала. За время порядка 1.5 мс после начала движения устанавливается постоянный расход

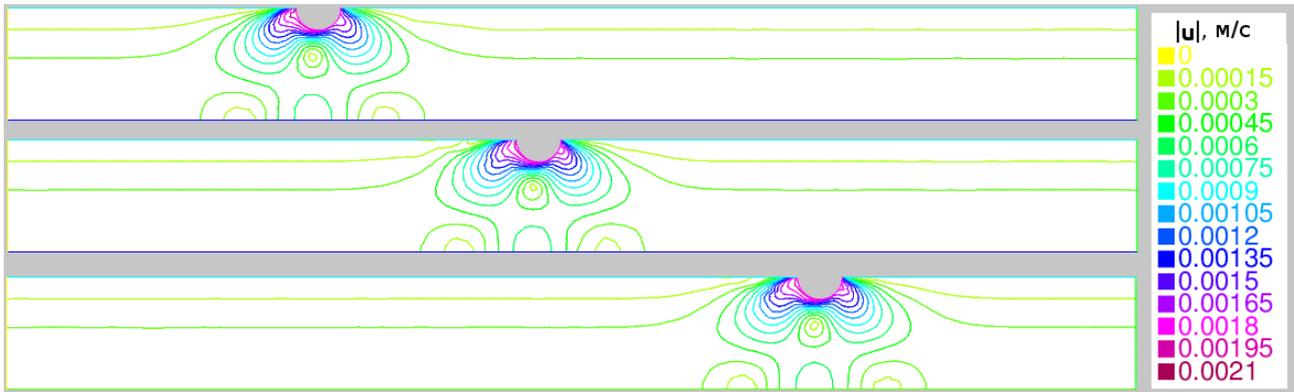


Рис. 5. Изолинии модуля скорости  $|u|$  в различные моменты времени при стационарном продольном движении границы

жидкости. Поскольку скорость течения жидкости мала, то течение остается ламинарным. Профиль скорости на входе и выходе канала имеет параболическую форму и не меняется со временем. В проходном отверстии устанавливается ламинарное течение с образованием устойчивых вихрей (рис. 5), движущихся поступательно вдоль слоя со скоростью движения границы, но с неизменной формой. Физически образование вихрей можно объяснить местным резким изменением скорости жидкости при проходе в гидросопротивлении, обусловленным тем что, с одной стороны, на границе  $\Gamma_3$  скорость жидкости равна нулю, а при удалении возрастает; с другой стороны, на границе гидросопротивления  $\Gamma_5$  скорость жидкости максимальна (равна скорости  $u_s$ ), а при удалении от него, наоборот, убывает.

По результатам моделирования были определены следующие особенности течения в плоском канале при продольном перемещении гидросопротивления, позволяющие построить элемент вычислительного стенда для расхода жидкости  $Q_s(H_0, H_1)$  при фиксированных значениях ширины канала  $H_0$  и проходного сечения гидросопротивления  $H_1$ :

1. Движение жидкости происходит благодаря энергии, передаваемой движущейся границей, следовательно, изменение физических параметров жидкости из-за изменения температуры практически не влияет на динамику течения. Расход жидкости пропорционален скорости движения границы  $Q_s \sim u_s$ . Максимум скорости  $u_m$  достигается на оси симметрии ( $z_0 = 0$  в формуле (2)) и пропорционален скорости границы, т.е.  $u_m = f_s u_s$ , где  $f_s$  — коэффициент пропорциональности.
2. Профиль скорости на входе и выходе канала остается параболическим и пропорциональным

скорости движения границы

$$u_x(z) = u_m \left(1 - \frac{z^2}{H_0^2}\right) = f_s u_s \left(1 - \frac{z^2}{H_0^2}\right)$$

до скоростей  $u_s < 1$  м/с (деформация профиля скорости не превышает 0.1%) и при перемещении гидросопротивления к границе  $\Gamma_2$  не ближе, чем на  $5R_g$ , следовательно, расход жидкости вычисляется следующим образом:

$$Q_s(H_0) = \int_0^H u_x(z) dz = \frac{2}{3} f_s u_s H_0. \quad (6)$$

3. Зависимость расхода жидкости от ширины проходного отверстия гидросопротивления нелинейна. При  $H_1 = H_0$  радиус  $R_g$  подвижной границы равен нулю, течение жидкости отсутствует, следовательно, расход жидкости  $Q_s = 0$  и значение функции  $f_s = 0$ . При  $H_1 = 0$  зазор отсутствует и расход жидкости равен количеству выталкиваемого границей объема жидкости  $Q_s = u_s H_0$  (гидросопротивление действует как поршень), тогда по формуле (6) получим  $f_s = 1.5$ . Результаты моделирования функции  $f_s$  показаны на рис. 6 черной линией.

Выявленные особенности течения позволяют построить элемент вычислительного стенда для обобщенного расхода жидкости  $Q_s(H_0, H_1)$  в случае движения границы со скоростью  $u_s$  в следующем виде:

$$Q_s(H_0, H_1) = \frac{2}{3} f_s(H_0, H_1) u_s H_0. \quad (7)$$

Здесь  $f_s(H_0, H_1)$  определяется как:

$$f_s(H_0, H_1) = \frac{3}{2} \frac{H_0 - H_1}{H_0} \frac{H_0^2 + b_1 H_1 + b_2 H_1^2}{H_0^2 + b_3 H_1 + b_4 H_1^2}, \quad (8)$$

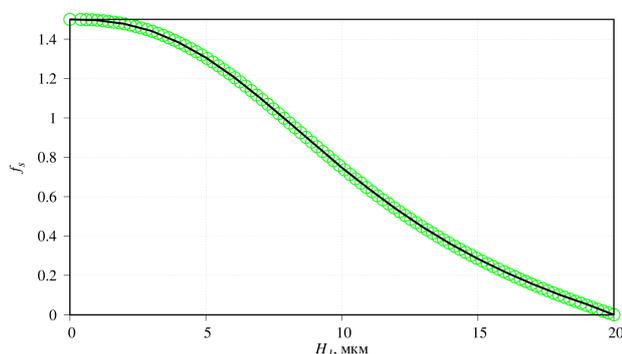


Рис. 6. Зависимость функции  $f_s$  от ширины проходного отверстия  $H_1$  при стационарном продольном движении границы. Черные линии — результаты моделирования, зеленые круги — интерполяция (8)

где коэффициенты интерполяции  $b_1 = -13.62$ ,  $b_2 = 1.2914$ ,  $b_3 = -33.96$ ,  $b_4 = 3.339$  определяются решением системы линейных уравнений по четырем расчетным точкам для ширины проходного отверстия в точках  $H_1 = \{1, 5, 10, 15\}$  мкм, в которых соответствующие значения  $f_s$  равны  $f_s = \{1.496, 1.306, 0.7473, 0.2840\}$ . Предельные значения  $f_s(H_0, 0) = 1.5$  и  $f_s(H_0, H_0) = 0$  обеспечиваются выбором вида интерполяционной функции. Интерполяционная формула с высокой точностью согласуется с численным моделированием (рис. 6).

При построении вычислительного стенда для обеих задач необходимо проведение численного моделирования для определения четырех точек для построения интерполяций (4) и (8). После этого расход жидкости можно определять аналитически по формулам (5) и (7) в широком диапазоне параметров системы. Пределом применимости формулы (5) является ограничение перепада давления  $\Delta p < 10^4$  Па, а формулы (7) — скорость движения границы  $u_s < 1$  м/с, что лежит в пределах параметров типичных МЭМС.

## 5. Выводы

В работе изучена возможность управления течением жидкости с помощью динамического изменения геометрии канала на основе подвижного гидросопротивления. Разработана компьютерная модель с адаптивной расчетной сеткой, позволяющая достигать высокой точности расчета течения жидкости.

Получено, что в геометрии с поперечным сжатием гидросопротивления течение является ламинарным без образования вихрей. При продольном перемещении гидросопротивления расход жидкости остается постоянным с образованием устойчи-

вых вихрей, перемещающихся вдоль канала со скоростью движения гидросопротивления. Поскольку профиль скорости в широком диапазоне параметров системы остается параболическим, была предложена аналитическая формула расхода жидкости, который зависит от ширины отверстия нелинейно (в обеих геометриях канала). На основе результатов моделирования построена аналитическая модель, учитывающая расход жидкости от ширины проходного отверстия гидросопротивления, которая содержит четыре интерполяционных параметра (расчитываемых по четырем точкам из одного моделирования полной модели). Полученную модель можно использовать в качестве элемента вычислительного стенда для определения расхода жидкости в рассматриваемой системе.

Моделирование динамического изменения геометрии открывает большие возможности при разработке новых ТУ. Например, продольное движение гидросопротивления можно использовать для создания течения в канале с постоянным давлением, а поперечное сжатие — для регулирования расхода жидкости в канале с ненулевым перепадом давления.

## Список литературы

- [1] Насибуллаев И.Ш. Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 26–41.
- [2] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В. Динамика течения жидкости в технических системах с жиклерами // Известия Уфимского научного центра РАН. № 4. 2015. С. 20–25.
- [3] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–9.
- [4] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через систему связанных элементов технического устройства типа труба–гидросопротивление–труба // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 2. С. 141–149.
- [5] Ландау Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [6] Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type // Proc. Camb. Phil. Soc. 1947. V. 43, № 1. P. 50–67.
- [7] Hecht, F. New development in FreeFem++. J. Numer. Math. 20 (2012), no. 3–4, 251–265. 65Y15.

## Fluid flow through the hydraulic resistance with a dynamically variable geometry

Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh.

Mavlutov Institute of Mechanics, Ufa

In this paper the fluid flow in a flat channel with a hydraulic resistance is studied for two cases of a dynamic change in the channel geometry: transverse compression of the opening of the hydraulic resistance (the flow is caused by a pressure drop applied to the layer) and longitudinal movement of the hydraulic resistance along the channel (the flow is caused by this movement). It is obtained that in a geometry with transverse compression the flow is laminar without the formation of vortices. In a geometry with longitudinal movement of the hydraulic resistance the flow rate of the liquid remains constant with the formation of stable vortices that move along the channel at the rate of motion of the hydraulic resistance. On the base of the modeling results an analytical model that takes into account the flow rate of the fluid from the width of the through hole of the resistance is constructed. This model contains four interpolation parameters and it can be used as an element of a computational stand for determining the generalized flow of liquid in the system under consideration.

**Keywords:** hydrodynamics, movable geometry, finite element method, a computer stand



**Многофазные системы:**  
модели, эксперимент, приложения

ИМех им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН

Статья рекомендована к публикации  
Программным комитетом VI Российской конференции  
«Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения»