

Об упругом режиме фильтрации в гидроразрывной трещине¹

Шагапов В.Ш.^{*,**}, Нагаева З.М.^{***}

* Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

** Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

*** Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

На основе теоретической модели, описывающей фильтрационное течение в трещине, находящейся в нефтяном или газовом пластах, рассмотрены задачи об отборе флюидов из скважины в режимах постоянного перепада давления и постоянного расхода. Для рассмотренных задач получены точные аналитические решения, на основе которых проанализировано влияние коллекторских характеристик пласта и трещины (например, их пористости, проницаемости и ширины трещины), а также реологических свойств насыщающего флюида на эволюцию давления в трещине, дебит скважины в режиме постоянного перепада и на динамику давления в скважине.

Ключевые слова: гидроразрыв пласта, трещина, фильтрация, интегро-дифференциальное уравнение, волны давления

1. Введение

Одним из основных способов интенсификации добычи нефти из низкопроницаемых пластов является гидроразрыв пластов (ГРП) повышением давления в призабойных зонах скважин и наполнение образовавшихся трещин специальным составом (пропантом), исключаящим их последующее полное смыкание. Теоретические основы технологий проведения ГРП, а также методика инженерных расчетов продуктивных пластов после ГРП подробно описаны в книге [1]. Теория гидроразрыва пластов, представляющая совместные решения уравнений гидродинамики и теории упругости, заложена в статье Христиановича С.А. и Желтова Ю.П. [2]. В дальнейшем эта теория развивалась в работах [3–12]. Отметим также недавние работы [13–15], посвященные теоретическому моделированию ГРП. Некоторые аспекты расчета дебита скважины при разведке нефтяных и газовых месторождений с применением ГРП рассмотрены в [16].

2. Основные уравнения

Пусть трещина в однородном пласте, созданная ГРП, представляет область пористой и проницаемой среды между двумя параллельными вертикальными полуплоскостями. Расстояние между ними равно d_f . Высота трещины h_f значительно больше ее толщины d_f ($h_f \gg d_f$). Течение флюида в трещине квазиодномерное по оси Ox , отсчитываемое от стенки забойного участка скважины. Скелеты пористой среды в пласте и пористой среды трещины будем считать несжимаемыми. Запишем уравнение сохранения массы для флюида в трещине, отнесенное на единицу высоты трещины, как

$$d_f \left(m_f \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f v_f)}{\partial x} \right) = -2\rho_p v_p \Big|_{y=0} \quad (1) \quad (0 < y < \infty).$$

Здесь m_i , ρ_i , v_i — пористость, плотность и скорость фильтрации флюида, нижние индексы $i = f, p$ соответствуют значениям параметров в трещине и окружающей ее пористой среде. Слагаемое в правой части (1) выражает интенсивность притока флюида через ее стенки в трещину, отнесенное на единицу ее площади. Поэтому для определения этого слагаемого необходимо учитывать процесс фильтрации

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15-11-20022).

в пористой среде вне трещины. Для этого, в свою очередь, запишем уравнение сохранения массы, полагая, что течение в пористой среде происходит в направлении, перпендикулярном к стенкам трещины:

$$m_p \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_p v_p)}{\partial y} = 0 \quad (0 < y < \infty). \quad (2)$$

Здесь ось Oy отсчитывается от стенок трещины.

Таким образом, принято, что в пласте течение одномерное, т.е. для поля скоростей выполняется гипотеза плоских сечений. В защиту такого упрощения отметим следующее: если протяженность трещины составляет несколько десятков метров, то зона трещины вокруг скважины, где течение существенно трехмерное, составляет ничтожно малую долю общей протяженности трещины. Поэтому, в плане оценок расходов флюида через трещину, пренебрежение этим прискважинным участком трещины представляется вполне оправданным. Что касается пренебрежения двумерными эффектами, то это связано с большим различием значений коэффициентов проницаемости в пласте и в трещине. Вследствие этого, на начальной стадии процесса фильтрации очевидно, что в пористой среде вблизи стенок трещины составляющая скорости фильтрации флюида u_p вдоль стенок трещины значительно меньше, чем перпендикулярная к стенке составляющая v_p ($v_p \gg u_p$). Ниже это обстоятельство будет обосновано на конкретных примерах.

Для описания процесса фильтрации в трещине и окружающем ее пористом пространстве примем закон Дарси

$$\begin{aligned} v_f &= -\frac{k'_f}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial x} & (0 < x < \infty), \\ v_p &= -\frac{k'_p}{\mu} \frac{\partial P_p}{\partial y} & (0 < y < \infty), \end{aligned} \quad (3)$$

Сжимаемость флюида будем учитывать в акустическом приближении

$$P_i - P_0 = C^2(\rho_i - \rho_0) \quad (i = f, p), \quad (4)$$

где C — скорость звука для флюида, нижний индекс 0 определяет давление и плотность, соответствующих их невозмущенным значениям. Кроме того, жидкость будем считать слабо сжимаемой [17] ($|\rho_i - \rho_0| \ll \rho_0$). Тогда уравнения (1) и (2) с учетом (3) и (4) можно привести к виду:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p \alpha_p}{m_f d_f} \left(\frac{\partial P_p}{\partial y} \right) \Bigg|_{y=0} \quad (0 < x < \infty), \quad (5)$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \alpha_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} \quad (0 < x < \infty, 0 < y < \infty), \quad (6)$$

где

$$\alpha_i = \frac{k'_i \rho_0 C^2}{m_i \mu} \quad (i = f, p).$$

Отметим, что P_f является функцией от переменных t и x , а P_p — функция от переменных t , x и y . Система (5) и (6) может быть сведена к одному интегро-дифференциальному уравнению для P_f . Действительно, величина давления P_p на поверхности стенки должна быть равна P_f . Это условие запишется, как

$$P_p = P_f \quad (y = 0).$$

Вдали от трещины будем считать, что в пористой среде давление однородное и равно P_0 . Тогда будем иметь

$$P_p = P_0 \quad (y \rightarrow \infty).$$

Согласно принципу Дюамеля [18] решение уравнения (6), удовлетворяющее начальному и граничному условиям

$$\begin{aligned} P_p &= P_0 & (t \leq t_0, 0 < y < \infty), \\ P_p &= P_f & (t > t_0, y = 0), \end{aligned} \quad (7)$$

может быть записано, как

$$P_p - P_0 = \int_{t_0}^t \frac{\partial u(y, t - \tau)}{\partial t} (P_f(\tau, x) - P_0) d\tau, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} u(y, t - \tau) &= 1 - \Phi \left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_p(t - \tau)}} \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y}{2\sqrt{\alpha_p(t - \tau)}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha. \end{aligned}$$

После несложных преобразований с учетом условий (7) решение (8) можно привести к виду:

$$P_p - P_0 = \int_{t_0}^t \frac{\partial(P_f(\tau, x) - P_0)}{\partial \tau} u(y, t - \tau) d\tau. \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (5) и полагая $t_0 = -\infty$, получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_f}{\partial t} &= \alpha_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} - 2 \frac{m_p \alpha_p}{m_f d_f} \times \\ &\times \int_{-\infty}^t \frac{\partial(P_f(\tau, x) - P_0)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p(t - \tau)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае газовых месторождений в качестве уравнения состояния для флюида примем уравнение Клапейрона–Менделеева

$$P = \rho R_g T, \quad (11)$$

где R_g — приведенная газовая постоянная. Процесс течения в пластах и в трещине будем считать изотермическим ($T = \text{const}$). Тогда вместо уравнений (5) и (6) с учетом (11), используя линеаризацию Лейбениона [17], можем получить

$$\frac{\partial P_f^2}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial^2 P_f^2}{\partial x^2} - 2 \frac{m_p \alpha_p}{m_f d_f} \times \int_{-\infty}^t \frac{\partial P_f^2(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p (t - \tau)}}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial P_p^2}{\partial t} = \alpha_p \frac{\partial^2 P_p^2}{\partial y^2} \quad (0 < x < \infty, 0 < y < \infty), \quad (13)$$

где $\alpha_i = \frac{k'_i \tilde{P}}{m_i \mu}$ ($i = f, p$). Здесь \tilde{P} — некоторое характерное значение давления в области фильтрации. В дальнейшем в качестве такого характерного значения примем исходное давление в пласте ($\tilde{P} = P_0$).

Уравнения (10) и (12) (а также (6) и (13)) имеют совершенно аналогичный вид. Если уравнения (6) и (10) являются линейно однородными для P_p и P_f , то (12) и (13) являются линейно однородными для квадратов этих функций.

Из сравнения левой части уравнения (10) и второго слагаемого в правой части нетрудно получить критическое условие для характерного времени \tilde{t} , когда левая часть незначительна. После некоторых простых выкладок получим следующую оценку:

$$\sqrt{\tilde{t}} \gg \sqrt{t_*}, \quad \left(t_* = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{m_f}{m_p} \right)^2 \frac{d_f^2}{\alpha_p} \right). \quad (14)$$

Для рассматриваемых задач условие (14) всегда выполняется, и поэтому в дальнейшем вместо (10) и (12) будем пользоваться упрощенным уравнением

$$\alpha_f \frac{\partial^2 P_f^n}{\partial x^2} = 2 \frac{m_p \alpha_p}{m_f d_f} \times \int_{-\infty}^t \frac{\partial P_f^n(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p (t - \tau)}}, \quad (15)$$

где верхний индекс $n = 1$ и 2 соответствует нефтяным и газовым пластам.

3. Фильтрация к скважине через трещину при внезапном снижении давления

На основе уравнения (15) рассмотрим процесс фильтрации нефти к скважине (или от скважины). Пусть в исходном состоянии ($t \leq 0$) флюид в трещине и окружающей ее пористой среде находится в покое ($v_f = v_p = 0$ и $P = P_0$), и в момент времени $t = 0$ давление в скважине изменяется на величину $\Delta P_{f(w)}$ и далее поддерживается постоянным

$$\Delta P_{f(w)} = \text{const} \quad (\Delta P_{f(w)} = P_{f(w)} - P_0).$$

Причем $\Delta P_{f(w)} > 0$ соответствует повышению давления (т.е. нагнетанию флюида в пласт через трещину), в случае, если $\Delta P_{f(w)} < 0$, то происходит отбор жидкости.

В рамках отмеченных допущений уравнение (15) и система начальных и граничных условий запишутся как:

$$\frac{\partial^2 \Delta P_f^{(n)}}{\partial x^2} = \frac{2 m_p \alpha_p}{d_f m_f \alpha_f} \times \int_0^t \frac{\partial \Delta P_f^{(n)}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p (t - \tau)}} \quad (16)$$

$$(\Delta P_f^{(n)} = P_f^n - P_0^n), \quad (t > 0, x > 0),$$

$$\Delta P_f^{(n)} = 0 \quad (t \leq 0, x > 0), \quad (17)$$

$$\Delta P_f^{(n)} = \Delta P_{f(w)}^{(n)} \quad (t > 0, x = 0). \quad (18)$$

Здесь и в дальнейшем индекс $(n) = (1)$ и (2) наверху соответствует нефтяному и газовому месторождениям.

Далее будем использовать преобразование Лапласа. Для этого обозначим

$$\Delta \bar{P}_f^{(n)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Delta P_f^n dt. \quad (19)$$

Тогда из уравнения (16) с учетом (17) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \Delta \bar{P}_f^{(n)}}{dx^2} = \frac{2 m_p \sqrt{\alpha_p}}{d_f m_f \alpha_f} \sqrt{\lambda} \Delta \bar{P}_f^{(n)}. \quad (20)$$

Из граничного условия (18) следует

$$\Delta \bar{P}_f^{(n)} = \frac{\Delta P_{f(w)}^{(n)}}{\lambda}, \quad (x = 0). \quad (21)$$

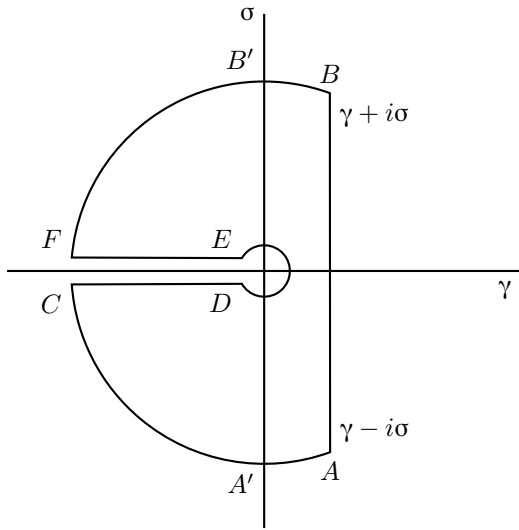


Рис. 1. Контур интегрирования

Из уравнения (20) с учетом (21) и ограниченности ΔP_f на бесконечности ($\Delta P_f \rightarrow 0$, при $x \rightarrow \infty$) можем получить

$$\Delta \bar{P}_f^{(n)} = \frac{\Delta P_{f(w)}^{(n)}}{\lambda} \exp(-\sqrt{A\lambda^{\frac{1}{2}}} x), \quad (22)$$

где $A = \frac{2}{df} \frac{m_p}{m_f} \sqrt{\alpha_p}$. Тогда, используя формулу обращения Меллина [19], для искомого решения можем записать

$$\Delta P_f^{(n)} = \frac{\Delta P_{f(w)}^{(n)}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} \frac{\exp(\lambda t - \sqrt{A\lambda^{\frac{1}{2}}} x)}{\lambda} d\lambda. \quad (23)$$

Для дальнейших выкладок решение (23) запишем:

$$\Delta P_f^{(n)} = \frac{\Delta P_{f(w)}^{(n)}}{2\pi i} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} \frac{\exp(\lambda t - \sqrt{A\lambda^{\frac{1}{2}}} x)}{\lambda} d\lambda. \quad (24)$$

Здесь подынтегральная функция аналитична на всей плоскости комплексного переменного λ за исключением начала координат, поэтому она является однозначной и аналитической в плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Поэтому, согласно теореме Коши, интегрирование вдоль прямой $(\gamma - i\sigma; \gamma + i\sigma)$ может быть заменено интегрированием вдоль любой кривой, которая оканчивается точками $\gamma \pm i\sigma$ и не пересекает разрез. В частности, удобно воспользоваться контуром [19], показанным на рис. 1.

Имеем

$$\int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FB}$$

Аналогично случаю, рассмотренному в [19], при $t > 0$ и $R \rightarrow \infty$ интегралы вдоль дуг AC и FB стремятся к нулю. На прямых CD и EF имеет место

$$\lambda^{\frac{1}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} |\lambda|^{\frac{1}{4}} \quad \text{и} \quad \lambda^{\frac{1}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} |\lambda|^{\frac{1}{4}}$$

соответственно. Полагая $\rho = |\lambda|$, будем иметь

$$\int_{CD} + \int_{EF} = -2i \int_r^R \rho^{-1} \sin\left(\frac{\sqrt{A} x \rho^{\frac{1}{4}}}{2}\right) \times \exp\left(-t\rho - \frac{\sqrt{A} x \rho^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\right) d\rho.$$

Отсюда, переходя к пределу при $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0, \\ R \rightarrow \infty}} \left\{ \int_{CD} + \int_{EF} \right\} = -2i \int_0^\infty \rho^{-1} \sin\left(\sqrt{\frac{A}{2}} x \rho^{\frac{1}{4}}\right) \times \exp\left(-t\rho - \sqrt{\frac{A}{2}} x \rho^{\frac{1}{4}}\right) d\rho = -8i \int_0^\infty \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{A}{2}} x \xi\right)}{\xi} \exp\left(-t\xi^4 - \sqrt{\frac{A}{2}} x \xi\right) d\xi.$$

Наконец, для окружности DE , принимая $r = \epsilon e^{i\varphi}$, можем получить

$$\int_{DE} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(-\sqrt{A} x \epsilon^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\varphi}{4}} - t\epsilon e^{i\varphi}\right) \epsilon e^{i\varphi} i}{\epsilon e^{i\varphi}} d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\sqrt{A} x \epsilon^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\varphi}{4}} - t\epsilon e^{i\varphi}\right) i d\varphi.$$

Таким образом, $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{DE} = 2\pi i$.

Итак, решение (23) может быть записано в виде:

$$\Delta P_f^{(n)} = \Delta P_{f(w)}^{(n)} \text{Gil}(t, x), \quad (25)$$

где

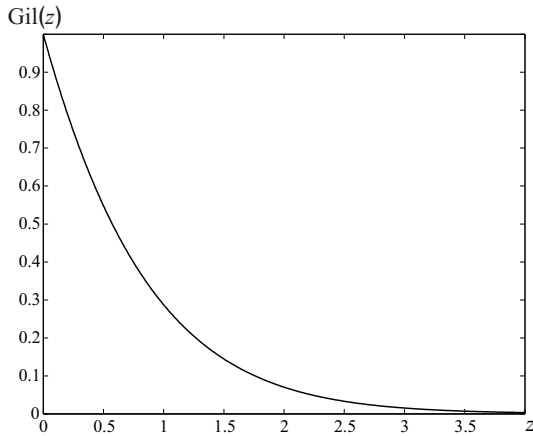
$$\text{Gil}(t, x) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{A}{2}} x \xi\right)}{\xi} \exp\left(-t\xi^4 - \sqrt{\frac{A}{2}} x \xi\right) d\xi.$$

Это решение можно записать, как

$$\text{Gil}(z) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(z\eta^{\frac{1}{4}})}{\eta} \exp\left(-\eta - z\eta^{\frac{1}{4}}\right) d\eta, \quad (26)$$

где

$$z = \sqrt{\frac{A}{2}} x t^{-\frac{1}{4}}, \quad \eta = t\xi^4.$$

Рис. 2. График функции $Gil(z)$

Из (26) следует, что решение для распространения давления является автомодельным, поскольку оно приводится к функции от одного безразмерного переменного z . На рис. 2 представлен график функции $Gil(z)$.

На основе представления (26) можно получить распределение давления в физических координатах для любого момента времени $t > 0$. На рис. 3 показаны графики, иллюстрирующие эволюцию волновых полей при следующих параметрах системы $d_f = 10^{-2}$ м, $k'_f = 10^{-10}$ м², $k'_p = 10^{-14}$ м², $m_f = 10^{-1}$, $m_p = 10^{-1}$. Для плотности, скорости звука и динамической вязкости нефти здесь и в дальнейшем приняты величины: $\rho_0 = 860$ кг/м³, $C = 10^3$ м/с, $\mu = 1.6 \cdot 10^{-3}$ Па·с, динамическая вязкость газа $\mu = 10^{-5}$ Па·с ($A = 0.0863$ и 0.0632 с^{1/2}/м² для нефти и газа соответственно). Сплошная и пунктирная линии соответствуют нефтяному и газовому пластам. Для исходного давления и температуры газового пласта примем $P_0 = 10$ МПа и $T = 300$ К ($R_g = 476.2$ Дж/кг·К). Линии 1, 2, и 3 соответствуют моментам времени $t = 10^3$, 10^4 и 10^5 с.

Для объемного расхода нефти, отнесенного на единицу высоты трещины, определяемого как

$$q = \frac{d_f k'_f}{\mu} \left(\frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}, \quad (27)$$

на основе решения (25) можем получить

$$q = -\frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{A}{2}} \frac{d_f k'_f}{\mu} \Delta P_{f(w)} \int_0^\infty \exp(-t\xi^4) d\xi. \quad (28)$$

После замены переменной $t\xi^4 = z^4$, интегральный

множитель в (28) примет вид:

$$\int_0^\infty \exp(-t\xi^4) d\xi = \frac{1}{t^{1/4}} \int_0^\infty \exp(-z^4) dz = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{t^{1/4}}, \quad (29)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция; $\Gamma(\frac{5}{4}) \approx 0,906$.

Подставляя (29) в (28), получим

$$q = -\frac{3,6}{\pi} \sqrt{\frac{A}{2}} \frac{d_f k'_f}{\mu} \frac{\Delta P_{f(w)}}{t^{1/4}}. \quad (30)$$

Отсюда для добытого объема нефти за время t через одну радиальную трещину

$$V = h_f \int_0^t q dt$$

скважины с высотой трещины h_f , будем иметь

$$V = -\frac{4,8}{\pi} \sqrt{\frac{A}{2}} \frac{d_f h_f k'_f}{\mu} \Delta P_{f(w)} t^{3/4}.$$

На рис. 4 представлена зависимость объема добытой нефти от времени. Для высоты и ширины трещины приняты величины $h_f = 10$ м, $d_f = 1$ см, давление пласта и скважины $P_0 = 10$ МПа и $P_{f(w)} = 5$ МПа (перепад давления $\Delta P_{f(w)} = -5$ МПа). Линии 1, 2 и 3 соответствуют проницаемости пласта $k'_p = 10^{-13}$, 10^{-14} и 10^{-15} м².

Согласно решений (25) и (26), а также графику на рис. 2, основное затухание давления в трещине в рассматриваемой задаче происходит при $z \approx 1$ (на

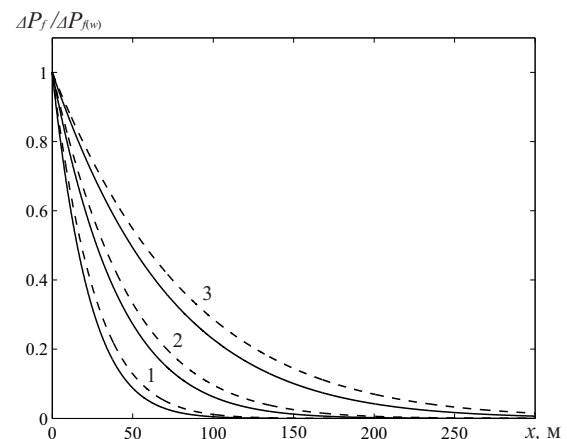


Рис. 3. Эволюция волновых полей. Сплошная и пунктирная линии соответствуют нефтяному и газовому пластам. Линии 1, 2, и 3 соответствуют моментам времени $t = 10^3$, $t = 10^4$ и $t = 10^5$ с

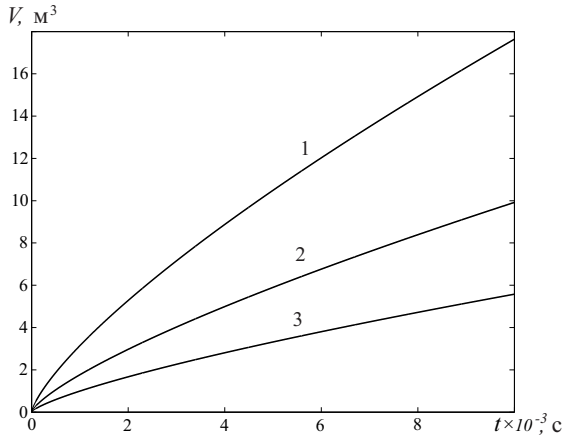


Рис. 4. Зависимость объема добытой нефти от времени. Линии 1, 2 и 3 соответствуют проницаемости пласта $k'_p = 10^{-13}, 10^{-14}$ и 10^{-15} м^2

участке от 0 до 1 давление снижается примерно в пять раз). Согласно формуле для z из (26) физическая координата x и время t , соответствующие значению $z = 1$, связаны как

$$x \approx \sqrt{\frac{2}{A}} t^{\frac{1}{4}}. \quad (31)$$

Для аналогичной физической координаты y можно записать оценку [18]

$$y \approx \sqrt{\alpha_p t}. \quad (32)$$

Тогда для составляющих скоростей фильтрации в пористой среде вблизи стенок трещины для момента времени t можно записать оценки:

$$u_p \approx -\frac{k'_p}{\mu} \frac{\Delta P_{f(w)}}{x} \quad \text{и} \quad v_p \approx -\frac{k'_p}{\mu} \frac{\Delta P_{f(w)}}{y}. \quad (33)$$

С учетом (31) и (32) для отношения скоростей получим

$$\frac{u_p}{v_p} \approx (t/\tilde{t})^{\frac{1}{4}} \quad \text{и} \quad \tilde{t} = \left(\frac{2}{A\alpha_p}\right)^2. \quad (34)$$

Отсюда видно, что неравенство $|u_p| \ll |v_p|$ выполняется для времен, удовлетворяющих условию

$$(t/\tilde{t})^{\frac{1}{4}} \ll 1. \quad (35)$$

Для критического времени \tilde{t} с учетом выражений для α_p и A из (6) и (22) можем получить

$$\tilde{t} = m_p d_f^2 \frac{k'_f{}^2}{k'_p{}^3} \frac{\mu}{\rho C^2}.$$

Условие (35) можно ослабить. Для этого запишем уравнение неразрывности в пласте в двумерном приближении

$$m_p \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} \right) = 0. \quad (36)$$

Для слагаемых этого уравнения запишем аналогичные с (33) оценки:

$$\frac{\partial u_p}{\partial x} \approx -\frac{k'_p}{\mu} \frac{\Delta P_{f(w)}}{x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_p}{\partial y} \approx -\frac{k'_p}{\mu} \frac{\Delta P_{f(w)}}{y^2}. \quad (37)$$

Используя (31) и (32), получим следующую оценку для слагаемых уравнения (37)

$$\frac{\partial u_p}{\partial x} / \frac{\partial v_p}{\partial y} \approx \sqrt{t/\tilde{t}}.$$

Следовательно, слагаемое в (36), связанное с течением в пористой среде вблизи стенки трещины вдоль нее, ничтожно мало по сравнению с другими слагаемыми, если

$$\sqrt{\frac{t}{\tilde{t}}} \ll 1. \quad (38)$$

В частности, при значениях $m_p = 10^{-1}$, $k'_p = 10^{-15} \text{ м}^2$, $k'_f = 10^{-10} \text{ м}^2$, $d_f = 10^{-2} \text{ м}$, $\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\rho C^2 = 10^9 \text{ Па}$ параметров пористой среды, трещины и флюида имеем $\tilde{t} = 2 \cdot 10^8 \text{ с}$. В большинстве случаев, представляющих практический интерес, условие (38) выполняется, поэтому двумерностью течения в пористой среде можно пренебречь.

Здесь также отметим, что, согласно решениям (25) и (26), эволюция поля давления в трещине в физических координатах полностью определяется значением параметра A . При этом закон распространения безразмерного значения перепада давления $\Delta_f = \Delta P_f / \Delta P_{f(w)}$ в соответствии с выражением для z из (26) запишется, как

$$x = z(\Delta_f) \sqrt{\frac{2}{A}} t^{\frac{1}{4}}. \quad (39)$$

Здесь значение $z(\Delta_f)$ определяется на основе графика, представленного на рис. 2. Подставляя вместо A выражение из (22), с учетом формул для коэффициентов пьезопроводности α_i ($i = f, p$) из (39), получим

$$x = z(\Delta_f) \left(\frac{d_f k'_f}{\sqrt{m_p k'_p}} \sqrt{\frac{\rho_0 C^2}{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}}. \quad (40)$$

Аналогично, из (30) можем получить формулу для расхода

$$q = -\frac{3,6}{\pi} \left(\frac{d_f k'_f \sqrt{m_p k'_p}}{\sqrt{\mu^3 \rho_0 C^2}} \right) \frac{\Delta P_{f(w)}}{t^{\frac{1}{4}}}. \quad (41)$$

Из формул (40) и (41) следует, что закон распространения давления в трещине и расход наиболее сильно зависят от толщины трещины и проницаемости в ней (как $\sqrt{d_f}$ и $\sqrt{k'_f}$). Примечательно, что пористость в трещине m_f в эти формулы не входит.

Для массового расхода газа, отнесенного на единицу длины трещины, аналогично с (27) можем записать

$$m = \frac{d_f k'_f}{\mu} \left(\rho_f \frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x \rightarrow 0}.$$

Отсюда, используя уравнение состояния газа (11), будем иметь

$$m = \frac{d_f k'_f}{2\mu R_g T} \left(\frac{\partial P_f^2}{\partial x} \right) \Big|_{x \rightarrow 0}. \quad (42)$$

Используя решение (25), соответствующее $n = 2$, из (42) имеем

$$m = -\frac{1,8}{\pi} \sqrt{\frac{A}{2}} \frac{d_f k'_f}{\mu R_g T} \frac{\Delta P_{f(w)}^{(2)}}{t^{\frac{1}{4}}}.$$

Отсюда, для массового отбора газа за время t из трещины высотой h_f ($M = h_f \int_0^t m dt$), будем иметь

$$M = -\frac{2,4}{\pi} \sqrt{\frac{A}{2}} \frac{d_f h_f k'_f}{\mu R_g T} \Delta P_{f(w)}^{(2)} t^{\frac{3}{4}}.$$

На рис. 5 представлен график, иллюстрирующий массу добытого газа за время t . Параметры пласта и трещины, а также значения давления здесь и в дальнейшем такие же, как для рис. 4. Линии 1, 2, и 3 соответствуют величинам пористости пласта $k'_p = 10^{-13}, 10^{-14}, 10^{-15} \text{ м}^2$.

4. Фильтрация в режиме постоянного расхода

Пусть объемный расход жидкости в (27) постоянный ($q = \text{const}, t > 0$), исходное состояние пласта и в трещине аналогично предыдущему случаю ($v_f = v_p = 0$ и $P = P_0$). Требуется определить поле давления в трещине P_f и закон изменения давления $P_{f(w)}$ в скважине.

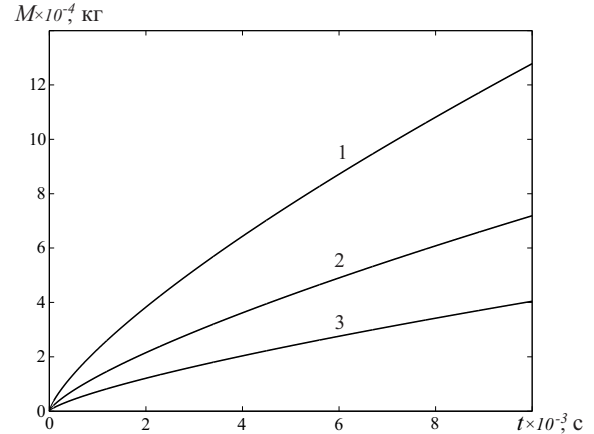


Рис. 5. Зависимость массы добытого газа от времени. Линии 1, 2, и 3 соответствуют величинам пористости пласта $k'_p = 10^{-13}, 10^{-14}, 10^{-15} \text{ м}^2$

Поскольку уравнение (16) является линейным и однородным для ΔP_f , и ΔP_f — его решение, то функция

$$Q = \frac{d_f k'_f}{\mu} \frac{\partial \Delta P_f}{\partial x} \quad (43)$$

также является решением уравнения (16), т.е. имеет место

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \frac{\alpha_p}{\alpha_f} \int_0^t \frac{\partial Q}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p (t - \tau)}} \quad (44)$$

$(0 < t, 0 < x < \infty).$

Запишем решение вида (25) для этого уравнения

$$Q = q \text{Gil}(t, x). \quad (45)$$

Подставляя (45) в (43), получим уравнение для определения ΔP_f в виде

$$\frac{\partial \Delta P_f}{\partial x} = \frac{q\mu}{d_f k'_f} \text{Gil}(t, x). \quad (46)$$

Очевидно, что функция ΔP_f , полученная из этого уравнения, удовлетворяет граничному условию

$$q = \frac{d_f k'_f}{\mu} \left(\frac{\partial \Delta P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}.$$

Из уравнения (46), интегрируя по x и учитывая, что $\Delta P_f(t, \infty) = 0$, получим

$$\Delta P_f = -\frac{q\mu}{d_f k'_f} \int_x^\infty \text{Gil}(t, x') dx'.$$

Проведя замену переменных аналогично (26), будем иметь

$$P_f = P_0 + \Delta P_f, \quad \Delta P_f = -\frac{t^{\frac{1}{4}} q \mu}{\sqrt{A/2} d_f k'_f} \text{Zil}(z) \quad (0 < t, 0 < z < \infty), \quad (47)$$

где

$$\text{Zil}(z) = \int_z^\infty \text{Gil}(z') dz',$$

$$\text{Gil}(z') = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(z' \eta^{\frac{1}{4}})}{\eta} \exp(-\eta - z' \eta^{\frac{1}{4}}) d\eta.$$

Из (47), полагая $z = 0$, получим закон изменения перепада давления между пластом и скважиной, как

$$P_{f(w)} = P_0 + \Delta P_{f(w)},$$

$$\Delta P_{f(w)} = -\frac{\text{Zil}(0) t^{\frac{1}{4}} q \mu}{\sqrt{A/2} d_f k'_f}, \quad (48)$$

где

$$\text{Zil}(0) = \int_0^\infty \text{Gil}(z') dz' \approx 0,83.$$

На рис. 6 представлен график функции $\text{Zil}(z)$, позволяющий согласно (47) определить распределения давления по координате x для любого момента времени, а также закон изменения давления в скважине по формуле (48).

На рис. 7 представлена эволюция давления $P_f(t, x)$ в трещине согласно решению (47) при $q = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. Линии 1, 2 и 3 соответствуют моментам времени $t = 10^3, 10^4$ и 10^5 с .

Подставляя в формулу (48) выражение параметра A через характеристики пласта, трещины и флюида для закона падения давления в скважине, можем получить

$$P_{f(w)} = P_0 - 0,83 \left(\frac{\sqrt{\mu^3 \rho_0 C^2}}{d_f k'_f \sqrt{m_p k'_p}} \right)^{\frac{1}{2}} q t^{\frac{1}{4}}.$$

Отсюда видно влияние величин параметров пласта, трещины и флюида на закон падения давления при фиксированном расходе q .

На рис. 8 представлен закон снижения давления $P_{f(w)}(t)$ в скважине при дебите $q = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. Линии 1, 2, и 3 соответствуют величинам пористости пласта $k'_p = 10^{-13}, 10^{-14}$ и 10^{-15} м^2 .

Аналогично предыдущему, в случае газовых месторождений, функция

$$M = \frac{d_f k'_f}{\mu R_g T} \frac{\partial P_f^2}{\partial x} \quad (49)$$

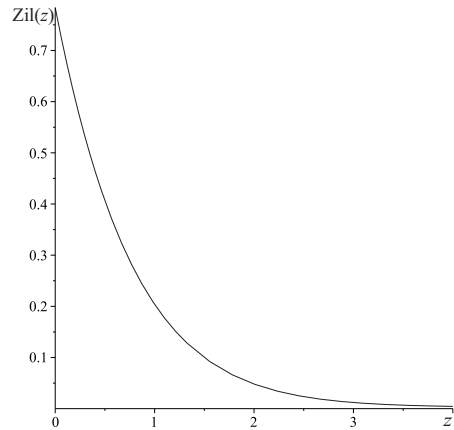


Рис. 6. График функции $\text{Zil}(z)$

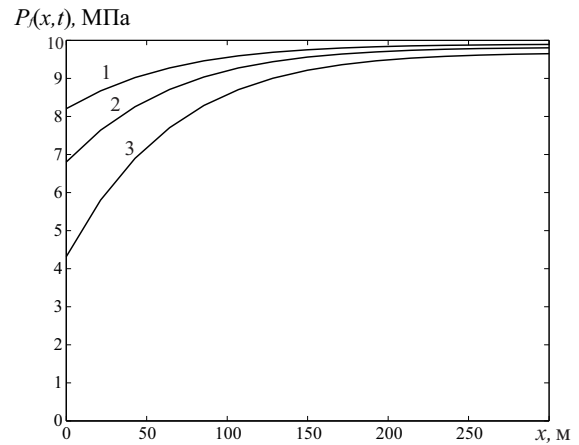


Рис. 7. Эволюция давления в трещине для нефтяных месторождений. Линии 1, 2 и 3 соответствуют моментам времени $t = 10^3, 10^4$ и 10^5 с

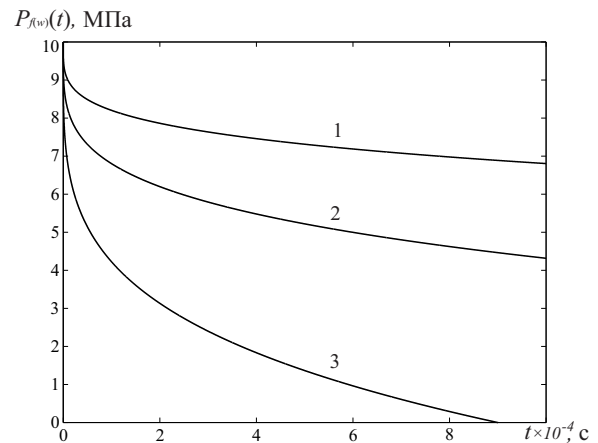


Рис. 8. Закон снижения давления $P_{f(w)}(t)$ в скважине для нефтяных месторождений. Линии 1, 2, и 3 соответствуют величинам пористости пласта $k'_p = 10^{-13}, 10^{-14}$ и 10^{-15} м^2

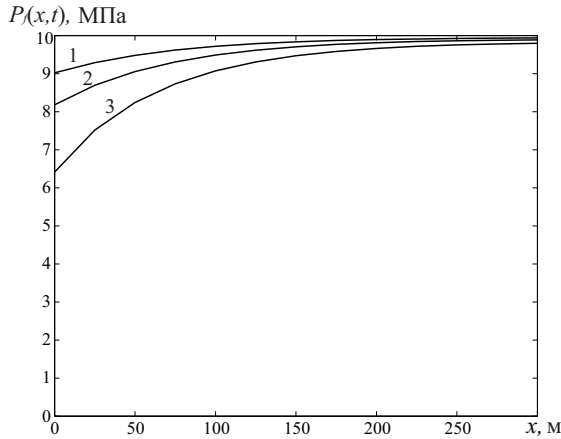


Рис. 9. Эволюция давления в трещине для газовых месторождений. Линии 1, 2 и 3 соответствуют моментам времени $t = 10^3$, 10^4 и 10^5 с

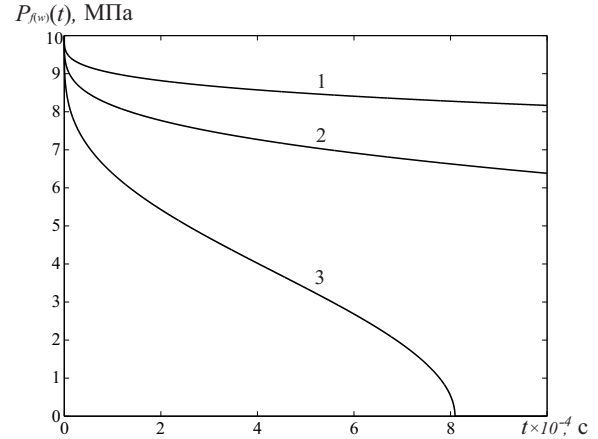


Рис. 10. Закон снижения давления в скважине. Линии 1, 2, и 3 соответствуют величинам пористости пласта $k'_p = 10^{-13}$, 10^{-14} и 10^{-15} м²

также является решением (16) при $n = 2$. Тогда решение вида (25) запишем как

$$M = m \text{Gil}(t, x). \quad (50)$$

Подставляя (50) в (49), получим уравнение для определения $\Delta P_f^{(2)}$ как

$$\frac{\partial \Delta P_f^{(2)}}{\partial x} = \frac{m \mu R_g T}{d_f k'_f} \text{Gil}(t, x). \quad (51)$$

Очевидно также, что функция $\Delta P_f^{(2)}$, полученная из этого уравнения, удовлетворяет граничному условию

$$m = \frac{d_f k'_f}{\mu R_g T} \left. \frac{\partial \Delta P_f^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (52)$$

Из уравнения (51), интегрируя по x и учитывая, что

$$\Delta P_f^{(2)}(t, \infty) = 0,$$

получим решение для поля давления в трещине

$$\begin{aligned} P_f &= \sqrt{P_0^2 + \Delta P_f^{(2)}}, \\ \Delta P_f^{(2)} &= -\frac{m \mu R_g T}{d_f k'_f} \int_0^\infty \text{Gil}(t, x') dx'. \end{aligned} \quad (53)$$

Сделав замену переменных аналогично (26), для $\Delta P_f^{(2)}$ будем иметь

$$\Delta P_f^{(2)} = -\frac{t^{\frac{1}{4}} m \mu R_g T}{\sqrt{\frac{A}{2} d_f k'_f}} \text{Zil}(z) \quad (0 < t, 0 < z < \infty).$$

С учетом этого выражения, полагая $z = 0$, из (53) получим закон изменения давления в скважине как

$$\begin{aligned} P_{f(w)} &= \sqrt{P_0^2 + \Delta P_{f(w)}^{(2)}}, \\ \Delta P_{f(w)}^{(2)} &= -\frac{\text{Zil}(0) t^{\frac{1}{4}} m \mu R_g T}{\sqrt{\frac{A}{2} d_f k'_f}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Из формул (47) и (54) следует, что для некоторого конечного времени t давление в скважине снижается до нуля и, следовательно, при дальнейшем увеличении времени эти решения теряют смысл. Это, в свою очередь, означает, что добыча нефти и газа из неограниченного пласта при постоянном объемном и массовом дебите возможна в течение ограниченного периода времени.

Эволюция давления в трещине при дебите $m = 0.5$ кг/с·м для газовых месторождений иллюстрируется на рис. 9. Линии 1, 2 и 3 соответствуют моментам времени $t = 10^3$, 10^4 и 10^5 с.

На рис. 10 представлен закон снижения давления в скважине. Линии 1, 2, и 3 соответствуют величинам пористости пласта $k'_p = 10^{-13}$, 10^{-14} и 10^{-15} м². Из рис. 10 видно, что в момент времени $t = 8 \cdot 10^4$ с для случая $k'_p = 10^{-15}$ м² давление в скважине снижается до нуля, и дальнейшее извлечение газа с таким дебитом ($m = 0.5$ кг/с·м) исключается.

5. Заключение

Полученные аналитические решения, соответствующие постоянным перепаду давления и дебиту, позволяют анализировать изменения коллекторских характеристик призабойных зон скважин и их

продуктивность при гидроразрыве пластов. Также эти решения могут служить основой для тестирования алгоритмов расчетов при теоретическом описании процессов фильтрации в пластах с гидроразрывными трещинами по более сложным математическим моделям.

Список литературы

- [1] Economides M., Oligney R., Valko P. Unified Fracture Design. Bridging the gap between theory and practice. Alvin, Texas: Orsa Press, 2002. 262 p. = Экономидес М., Олини Р., Валько П. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта. От теории к практике. М.: Институт компьютерных исследований, 2007. 236 с.
- [2] Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3–41.
- [3] Баренблатт Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтяного пласта // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 20. С. 475–486.
- [4] Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975. 216 с.
- [5] Баренблатт Г. И., Христианович С. А. О модуле сцепления в теории трещин // Инженерный журнал. Механика твердого тела. 1968. № 2. С. 69–75.
- [6] Abe H., Mura T., Keer L.M. Growth rate of a penny shaped crack in hydraulic fracturing of rocks // Journal of Geophysical Research. 1976. V. 81, No 29. P. 5335–5340.
- [7] Сарайкин В.А., Слепян Л.И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле // Изв. АН СССР, МГТ. 1979. № 4. С. 54–73.
- [8] Mitchell S.L., Kuske R., Peirce A.P. An asymptotic framework for finite hydraulic fractures including leak-off // A SIAM J. Appl. Math. 2007. V. 67, № 2. P. 364–386.
- [9] Линьков А.М. Аналитическое решение задачи о гидроразрыве для неньютоновской жидкости // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2013. № 1. С. 11–21.
- [10] Астафьев В.И., Федорченко Г.Д. Автомодельное решение задачи о развитии трещины гидроразрыва пласта // Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. 2007. № 4(54). С. 34–41.
- [11] Михин А.С., Славкин В.С. Управление пространственной ориентации гидравлической трещины. Новые возможности для разработки «целиков нефти» // Нефть, газ и бизнес. 2012. № 1–2. С. 50–53.
- [12] Гарипов Т.Г. Моделирование процесса гидроразрыва пласта в упругой среде // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 6. С. 53–59.
- [13] Гордеев Ю.Н., Бабаева Д.О., Сандаков Е.Б. Точное квазистационарное решение задачи о гидравлическом разрыве проницаемого пласта // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 6. С. 87–94.
- [14] Есипов Д.В., Каранакوف П.В., Лапин В.Н., Черный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 33–61.
- [15] Пеньковский В.И., Корсакова Н.К. Феноменологический подход к проблеме моделирования гидравлического разрыва пласта // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 5. С. 139–148.
- [16] Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М.: Недра, 1999. 212 с.
- [17] Баренблатт Г.П., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
- [18] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Издательство МГУ, 1999. 798 с.
- [19] Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1975. 407 с.

On elastic regime of filtration in hydraulic fracture

Shagapov V.Sh.^{*,**}, Nagaeva Z.M.^{***}

* Institute of Mechanics and Engineering, Kazan

** Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

*** Ufa State Petroleum Technological University, Ufa

Fluid recovery from a well in the modes of constant pressure drop and constant flow rate is considered basing on a theoretical model of filtration in a hydraulic fracture. Exact analytical solutions are obtained that allowed analyzing the effect of the reservoir and fracture properties (such as porosity, permeability and crack width) as well as the rheological properties of the saturating fluid upon: pressure evolution in the fracture, well flow rate at constant pressure drop, and pressure evolution in the wellbore.

On the basis of theoretical models describing the filtration for a crack in an oil or gas reservoirs, the considered problem on the selection of fluids from the well in modes constant differential pressure and constant flow. For the considered tasks are received exact analytical solutions, based on which we analyzed the influence of reservoir characteristics of the formation and fractures (for example, their porosity, permeability and width of cracks) and the rheological properties of the saturating fluid on the evolution of the pressure in the fracture, the production rate at a constant differential to the dynamics of the pressure in the well.

Keywords: hydraulic fracturing, fracture, filtration, integral-differential equation, pressure waves

