

# Нелинейные колебания трубопровода под действием внутреннего ударного давления в жидкости<sup>1</sup>

Зарипов Д.М.\*,\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова, Уфа

\*\*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

Рассмотрен нелинейный изгиб пролета горизонтального трубопровода на двух опорах под воздействием ударного давления во внутренней жидкости с учетом влияния продольной силы на изгиб. Решение нелинейного уравнения задачи получено численным методом. Приводится сравнение результатов в линейной и нелинейной постановках. Показано, что в нелинейном случае возникает колебательный режим движения трубопровода в отличие от линейного случая, когда происходит экспоненциальный рост амплитуды прогиба трубопровода.

**Ключевые слова:** трубопровод, ударное давление, колебания

## 1. Введение

Исследованию взаимодействия труб и цилиндрических оболочек и содержащихся в них жидкости или газа посвящено большое количество работ. В этих работах рассматриваются различные факторы, влияющие на поведение гидроупругих систем. Так, например, в работе Н.Е. Жуковского [1] учитывается сжимаемость жидкости. Показано, что в данной осесимметричной задаче несущественно влияние инерционных и моментных членов в уравнении движения трубы. В последующих работах учитывались различные уточняющие модель факторы, в том числе среднее течение жидкости и неосесимметричные деформации. Обзор литературы приведен, например, в [2].

Вопросы статики и динамики трубопроводов рассмотрены в [3] и в других изданиях. В [2–6] определено влияние внутреннего перепада давления в трубе на ее статический и динамический изгиб, экспериментальное изучение которого дано в [6]. Самовозбуждение периодических и хаотических колебаний при стоячих и бегущих волнах давления в транспортируемой жидкости рассмотрено в [7, 8] и последующих работах. Для изучения этих режимов

колебаний нужно исходить из нелинейных соотношений. В частности, в работе [8] найдено критическое значение внутреннего давления  $p_*$ , при превышении которого происходит потеря устойчивости статического положения равновесия трубопровода, и при периодическом возбуждении волн давления могут возникать сложные колебания, в том числе и хаотические.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается изгиб пролета горизонтального трубопровода на двух опорах под воздействием ударного давления во внутренней жидкости. Предполагается, что трубопровод испытывает только упругие деформации, расстояние между опорами  $L$  на порядок больше радиуса трубопровода  $R$ , который на порядок больше толщины стенки  $h$ . Принимается также, что при изгибе поперечное сечение сохраняет круговую форму, остается плоским и перпендикулярным к изогнутой осевой линии. Влияние течения жидкости в трубопроводе не учитывается. Жидкость принимается идеальной и несжимаемой, поэтому давление в жидкости по длине трубопровода устанавливается мгновенно и состоит из постоянной и переменной частей  $p = p_0 + p(t)$  ( $t$  — время). Расчетная схема представлена на рис. 1.

Функция переменной части давления, прини-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00740-а).

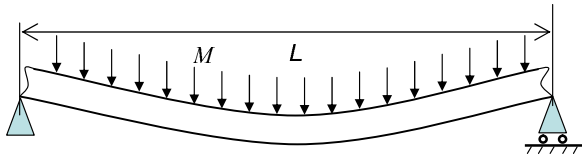


Рис. 1. Расчетная схема трубопровода

мается в виде [9]:

$$p = 6.75p_e \tau(1 - \tau)^2. \quad (1)$$

Здесь безразмерное время  $\tau = t/t_e$ , где  $t_e$  — длительность ударной волны. Максимальное значение  $p = p_e$  достигается при  $\tau = 1/3$ . Будет рассмотрен и случай, когда давление после достижения максимального значения остается постоянным ( $p_0 + p_e$ ). Функции переменной части давления представлены на рис. 2.

Уравнение движения трубопровода относительно прогиба записывается в виде [9]:

$$D \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + M \frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} + \left[ \pi R^2 \left( 1 - \frac{2\nu}{1+\lambda} \right) (p_0 + p) - \frac{EF}{2L(1+\lambda)} \int_0^L \left( \frac{\partial w_*}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} = Mg. \quad (2)$$

Здесь  $D = pERh$  — изгибная жесткость трубопровода;  $M = pR(2h\rho + R\rho_f)$  — масса трубопровода единичной длины с внутренним радиусом  $R$ , толщиной стенки  $h$ , плотностями материала трубы  $\rho$  и жидкости  $\rho_f$ ;  $EF$  — продольная жесткость трубопровода. При записи  $D$  и  $M$  пренебрегаем величиной  $h/R$  по сравнению с единицей. Положительное направление гравитационного ускорения  $g$  и прогиба принято вниз;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Коэффициент линейно-упругой податливости опор  $\lambda = CL/(2\pi RhE)$ , где  $C$  — жесткость опоры в продольном направлении. Если жесткость опоры мала по сравнению с продольной жесткостью трубы, то  $\lambda \rightarrow 0$ , при большой жесткости опоры  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Прогиб  $w_* = w_0(x) + w(x, t)$  состоит из статической части  $w_0(x)$ , вызываемой собственным весом  $gM$  и давлением  $p_0$ , и динамической части  $w(x, t)$ , вызываемой давлением  $p$ .

Первый член уравнения (2) характеризует упругие силы, второй — инерционные силы. Изгиб трубы с внутренним давлением  $p_0 + p$  и кривизной  $\partial^2 w_*/\partial x^2$  приводит к образованию распределенной боковой силы [3]

$$\pi R^2 \left( 1 - \frac{2\nu}{1+\lambda} \right) (p_0 + p) \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2},$$

направленной в сторону выпуклости осевой линии. При изгибе трубопровода возникает продольная си-

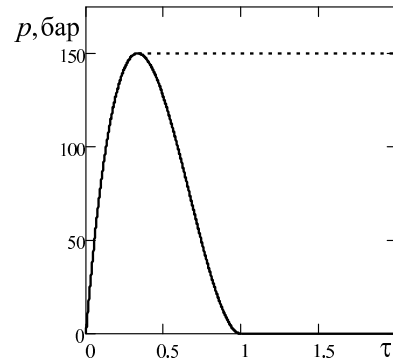


Рис. 2. Функции переменной части давления

ла вследствие удлинения его осевой линии, которая равна

$$N = \frac{EF}{2L(1+\lambda)} \int_0^L \left( \frac{\partial w_*}{\partial x} \right)^2 dx,$$

Настоящая работа отличается от исследования, приведенного в [9], учетом этой продольной силы.

Граничные условия относительно функции прогиба записываются в виде:

$$w_* = \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, L. \quad (3)$$

### 3. Решение нелинейного уравнения движения трубопровода

Приближенные выражения  $w_0$  и  $w$  для случая свободного опирания концов (3) принимаются в виде:

$$w_0 = W_0 \sin \beta x, \quad w = W \sin \beta x \quad (\beta = \pi/L). \quad (4)$$

Статическая составляющая прогиба трубопровода под действием собственного веса и давления  $p_0$  описывается следующим уравнением (в линейном случае):

$$D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \pi R^2 \left( 1 - \frac{2\nu}{1+\lambda} \right) p_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = gM, \quad (5)$$

решение которого относительно амплитуды прогиба (4) имеет вид:

$$W_0 = \frac{\pi g M}{2D\beta^4(1-\eta_0^2)}, \quad \eta_0^2 = \frac{p_0}{p_0^*}, \quad (6)$$

$$p_0^* = \frac{D\beta^2}{\left( 1 - \frac{2\nu}{1+\lambda} \right) \pi R^2}.$$

Здесь  $p_0^*$  — критическое значение давления  $p_0$ , когда линейное решение возрастает неограниченно. Предполагается, что  $\eta_0^2 < 1$ .

Нелинейное уравнение статики имеет следующий вид:

$$D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \left[ \pi R^2 \left( 1 - \frac{2\nu}{1+\lambda} \right) p_0 - \frac{EF}{2L(1+\lambda)} \int_0^L \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = gM. \quad (7)$$

Решение этого уравнения сводится к решению следующего алгебраического уравнения:

$$W_0^3 + a_1 W_0 + a_0 = 0, \quad (8)$$

где введены следующие обозначения

$$a_0 = -\frac{2gLM(1+\lambda)}{EF\beta^3},$$

$$a_1 = \frac{4D(1+\lambda)}{EF} + 3 \left( \frac{gLM(1+\lambda)}{EF\beta^3} \right)^{2/3}.$$

Как известно, при  $Q = (a_1/3)^3 + (a_0/2)^2 > 0$  существует единственный действительный корень уравнения (8):

$$W_0^{(1)} = A+B, \quad A = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{Q}}.$$

При  $Q = 0$  имеются два действительных корня, один из которых совпадает с приведенным выше, а второй равен

$$W_0^{(2)} = -(A+B)/2.$$

В этом случае  $A = B = (-a_0/2)^{1/3}$  и потому

$$W_0^{(1)} = 2(-a_0/2)^{1/3}, \quad W_0^{(2)} = -W_0^{(1)}/2.$$

При  $Q < 0$  действительных корней три:

$$W_0^{(1)} = 2\sqrt[3]{-\frac{a_1}{3}} \cos \frac{\alpha}{3},$$

$$W_0^{(2,3)} = -2\sqrt[3]{-\frac{a_1}{3}} \cos \left( \frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3} \right),$$

где  $\cos \alpha = -\frac{a_0}{2\sqrt[3]{-a_1/3}}$ .

Можно выписать формулу для критического значения  $p_0$ , при превышении которого появляются второе и третье статические положения равновесия:

$$p_{cr}^* = p_0^* \left[ 1 + \frac{3}{4D\beta^2} \left( \frac{EF(gLM)^2}{1+\lambda} \right)^{1/3} \right]. \quad (9)$$

Примем следующие исходные данные:  $L = 4$  м,  $R = 0.05$  м,  $h = 0.002$  м,  $E = 2 \cdot 10^6$  бар=

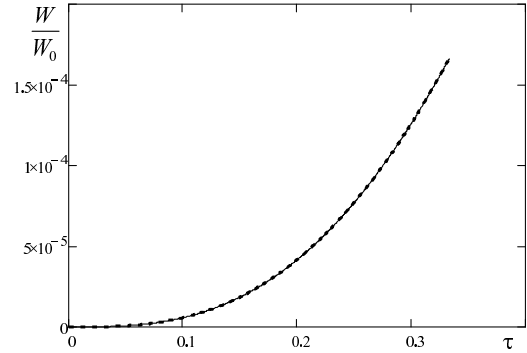


Рис. 3. Сравнение численного и аналитического методов решения на начальной стадии процесса ( $t < t_e$ ) для давления, заданного по закону (1)

$2 \cdot 10^{11}$  кг/м·с<sup>2</sup>,  $p_0 = 30$  бар,  $p_e = 150$  бар,  $\rho = 7800$  кг/м·с<sup>2</sup>,  $\rho_f = 1000$  кг/м·с<sup>2</sup>,  $t_e = 0.001$  с,  $\nu = 0.3$ .

Значение статического прогиба в линейном случае равно  $W_0 = 0.019$  ( $p^* = 137.1$  бар), а в нелинейном случае  $W_0 = 0.021$  ( $p_{cr}^* = 236,4$  бар).

Решение исходной задачи строится для уравнения относительно амплитуды динамического прогиба, которое получается вычитанием из (2) уравнения (7), с учетом выражения для давления (1) и приближений (4). Получается уравнение относительно амплитуды динамического прогиба:

$$\frac{d^2 W}{d\tau^2} + [\omega^2 - \mu^2 \tau(1-\tau)^2 - \gamma^2 W^2] \times$$

$$\times W = \mu^2 \tau(1-\tau)^2 W_0,$$

$$\mu^2 \equiv \frac{27 \left( 1 - \frac{2\nu}{1+\lambda} \right) \pi R^2 p_e \beta^2 t_e^2}{4M}, \quad (10)$$

$$\omega^2 = \Omega^2 (1 - \eta_0^2), \quad \Omega^2 = \frac{D\beta^4 t_e^2}{M},$$

$$\gamma^2 = \frac{\pi EF}{4L(1+\lambda)M},$$

где  $\Omega$  и  $\omega$  – собственные частоты колебаний трубопровода при нулевом перепаде давления и внутреннем перепаде  $p_0$ , умноженные на  $t_e$ .

Для решения уравнения (10) используется методика, подробно описанная в работе [8].

#### 4. Обсуждение результатов моделирования

Для тестирования программы использовались аналитические решения для линейного уравнения, полученные в работе [10]. Как видно из рис. 3–5 численное интегрирование хорошо согласуется с аналитическими решениями как для функции ударного давления по формуле (1), так и для случая установления в системе постоянного внутреннего дав-

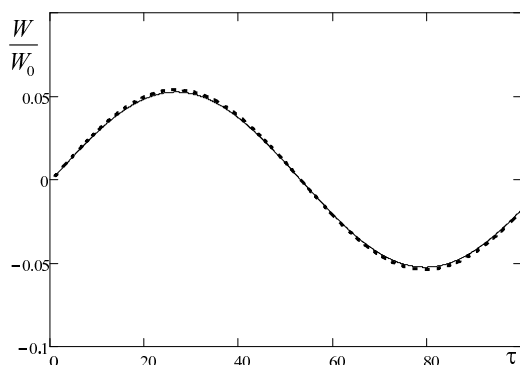


Рис. 4. Сравнение численного и аналитического методов решения при  $t > t_e$  для давления заданного по закону (1)

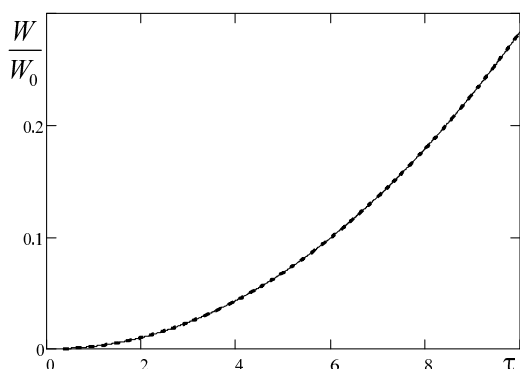


Рис. 5. Сравнение численного и аналитического методов решения при  $t > t_e$  для давления равного  $p_0 + p_e$

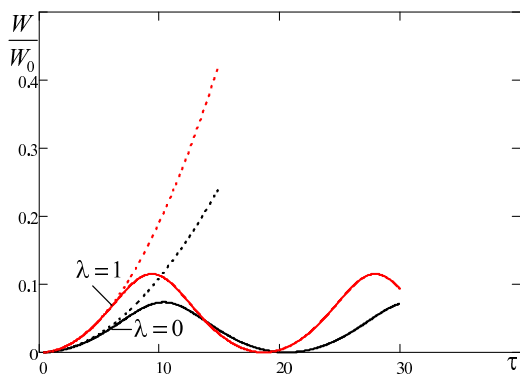


Рис. 6. Зависимость динамического прогиба по линейной и нелинейной теориям для  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$

ления  $p_0 + p_e$  после достижения максимального значения ударного давления ( $\tau \geq 1/3$ , рис. 2 штриховая линия). В первом случае в системе устанавливается колебательный режим (рис. 3, 4). Во втором случае вместо осциллирующего решения име-

ется экспоненциальный рост динамического прогиба (в рамках линейной теории изгиба, рис. 5).

На рис. 6 дана зависимость динамического прогиба в рамках линейной теории изгиба (штриховая линия) и с учетом продольной силы (сплошная кривая) для значений коэффициента линейно-упругой податливости опор равных:  $\lambda = 0$  — неподвижные опоры и  $\lambda = 1$  ( $\nu = 0.3$ ). Как видно из рисунка, в случае учета нелинейной продольной силы возникает колебательный режим, т.е. решение ограничено, и не происходит экспоненциального роста динамического прогиба. Для  $\lambda = 1$  амплитуда колебаний возрастает, при этом частота падает.

Таким образом, в статье проведен сравнительный анализ динамической реакции и напряженно-деформированного состояния трубопровода при действии внутренней ударной волны в линейной [10] и нелинейной постановках.

## Список литературы

- [1] Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 107 с.
- [2] Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184 с.
- [3] Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
- [4] Ilgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. Fluids and Structures. 1993. Vol. 8. P. 139–156.
- [5] Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. Moscow: Nauka. Fizmatlit, 1998. 208 p.
- [6] Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and post-buckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure // Journal of Applied Mechanics: Transactions ASME. 1995. Vol. 62, No 3. P. 595–600.
- [7] Ильгамов М.А., Мишин В.Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв.РАН, Механика твердого тела. 1997. № 1. С. 181–192.
- [8] Ильгамов М.А., Лукманов Р.Л., Зарипов Д.М. Механизм возбуждения гидроупругих колебаний трубопровода // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 3. Уфа: Гилем. 2003. С. 21–52.
- [9] Павлов А.А., Ильгамов М.А. Исследование ударной волны в жидкости // Труды семинара по теории оболочек. КФТИ АН СССР. 1974. Вып. IV. С. 181–195.
- [10] Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А. Упругая реакция трубопровода на внутреннее ударное давление // ДАН. 2016. Т. 470, № 2. С. 162–165.

# Non-linear vibrations of the pipeline under the action of impact pressure in internal fluid

Zaripov D.M.<sup>\*,\*\*</sup>

\* Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

\*\* Ufa State Petroleum Technological University, Ufa

The non-linear bend of flight of the horizontal pipeline on two support under the influence of impact pressure in internal liquid with taking note of longitudinal force on a bend is considered. The solution of the non-linear equation of the task is received by the numerical method. Comparing of results is given in the linear and non-linear settings. It is shown that in a non-linear case there is an oscillatory mode of movement of the pipeline, in difference from the linear case when there is an exponential growth of amplitude of a bending of the pipeline.

**Keywords:** pipeline, impact pressure, vibrations

