ТРУДЫ Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН

ISSN 2542–0380
Том 11 (2016), № 1, с. 127–135
УДК 533+517.958

http://proc.uimech.org/uim2016.1.019
DOI: 10.21662/uim2016.1.019

Получена: 16.11.2016
Принята: 12.12.2016

Инвариантные подмодели ранга 3 и ранга 2 одноатомного газа с проективным оператором[1]

Шаяхметова Р.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Система уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа допускает группу преобразований с 14-мерной алгеброй Ли. Особенностью данной алгебры является наличие проективного оператора. Рассматриваются все одномерные подалгебры, содержащие проективный оператор. Для каждой подалгебры вычислены инварианты и построены инвариантные подмодели ранга 3. Все подмодели стационарного типа, они приведены к каноническому виду, для полученных систем выделена область гиперболичности. Вдоль линии тока получен интеграл энтропии. Аналогично интегралу Бернулли для стационарных движений для подмоделей получено обыкновенное дифференциальное уравнение на инвариантные функции вдоль линии тока. Рассмотрены все двумерные подалгебры, содержащие проективный оператор. Для них построены инвариантные подмодели ранга 2 стационарного типа. Подмодели приведены к каноническому виду.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, проективный оператор, инвариантные подмодели

1. Введение

Модель движения одноатомного газа задается системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} &\rho\, D\vec{u} + \nabla p = 0,\\ &D\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0, \qquad (1)\\ &DS = 0, S = p\rho^{-\frac{5}{3}}, \end{aligned}$$

где $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$; $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — оператор градиента в декартовой системе координат; $\vec{u} = (u, v, w)$ — скорость; ρ — плотность; p — давление; S — функция энтропии. Газодинамические функции $\vec{u}$, ρ, p, S зависят от времени t и декартовых координат x, y, z.

Система (1) допускает 14-мерную алгебру Ли операторов. Базисные операторы алгебры L_{14}, записанные в декартовой системе координат имеют вид:

$X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$ — переносы по пространству;

$X_4 = t\partial_x + \partial_u$, $X_5 = t\partial_y + \partial_v$, $X_6 = t\partial_z + \partial_w$ — галилеевы переносы;

$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v$, $X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w$, $X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u$ — вращения;

$X_{10} = \partial_t$ — перенос по времени;

$X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ — равномерное растяжение;

$X_{12} = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v + (z - tw)\partial_w - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p$ — проективный оператор;

$X_{13} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 3\rho\partial_\rho - 5p\partial_p$, $X_{14} = \rho\partial_\rho + p\partial_p$ — растяжения.

Оптимальная система неподобных подалгебр включает 1248 представителей [2]. Особенность этой алгебры заключается в том, что она содержит проективный оператор X_{12}. Подалгебр, содержащих проективный оператор, значительно меньше. Все они представлены в компактном виде (73 представителя) в работе [3], среди них имеются 3 одномерные и 5 двумерных подалгебр.

2. Инвариантные подмодели ранга 3

Рассматриваются одномерные подалгебры работы [3]. Для каждой из подалгебр вычисляются инварианты базисных операторов, по ним строится представление инвариантного решения [4].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-97027-р_поволжье_а).

После подстановки этих представлений в систему (1) получаются инвариантные подмодели ранга 3 (с тремя независимыми переменными). Все подмодели стационарного типа [4].

Инварианты можно выбрать так, чтобы подмодель принимала канонический вид [4]:

$$\begin{gathered}\overline{D}\overline{u}+\frac{b_1}{\overline{\rho}}\overline{p}_{\overline{x}}=a_1,\quad \overline{D}\overline{v}+\frac{b_2}{\overline{\rho}}\overline{p}_{\overline{y}}=a_2,\\ \overline{D}\overline{w}+\frac{b_3}{\overline{\rho}}\overline{p}_{\overline{z}}=a_3,\\ \overline{D}\overline{\rho}+\overline{\rho}(\overline{u}_{\overline{x}}+\overline{v}_{\overline{y}}+\overline{w}_{\overline{z}})=a_4\overline{\rho},\\ \overline{D}\overline{S}=a_5\overline{S},\quad \overline{S}=\overline{p}\overline{\rho}^{-\frac{5}{3}},\end{gathered}\tag{2}$$

где $\overline{D}=\overline{u}\partial_{\overline{x}}+\overline{v}\partial_{\overline{y}}+\overline{w}\partial_{\overline{z}}$; $b_i(\overline{x},\overline{y},\overline{z})>0$; a_i — квадратичные функции по $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$.

Согласно теореме работы [4] для полученных систем выделяется область гиперболичности: $\overline{u}^2+\overline{v}^2+\overline{w}^2>\overline{a}^2=\dfrac{5\overline{p}}{3\overline{\rho}}$ — квадрат инвариантной скорости звука. Для каждой подмодели вводится инвариантная линия тока (i-линия). Вдоль нее определяются интеграл энтропии и обыкновенное дифференциальное уравнение на инвариантные функции (аналог интеграла Бернулли для стационарных движений).

Подмодель для подалгебры 1.1 строится в цилиндрической системе координат: $y=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$, $v=V\cos\theta-W\sin\theta$, $w=V\sin\theta+W\cos\theta$. Инварианты выбраны так, чтобы подмодель принимала немного отличный от формы (2), более удобный вид в цилиндрической системе координат.

2.1. Подмодель 1.1

Вычисления, описанные выше, для подалгебры 1.1 дают следующий результат:

– базисный оператор подалгебры 1.1 имеет вид

$$X_7+a(X_{10}+X_{12})+b(X_{11}-X_{13})+cX_{14}, a\neq 0;$$

– представление инвариантного решения

$$\begin{gathered}u=\overline{u}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{a^{-1}b\tau}+(t+a^{-1}b)x(1+t^2)^{-1},\\ V=\overline{v}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{a^{-1}b\tau}+(t+a^{-1}b)r(1+t^2)^{-1},\\ W=\overline{w}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{a^{-1}b\tau}+a^{-1}r(1+t^2)^{-1},\\ \rho=\overline{\rho}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}e^{a^{-1}(3b+c)\tau},\\ p=\overline{p}(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}e^{a^{-1}(5b+c)\tau},\\ S=\overline{S}e^{-\frac{2}{3}(a)^{-1}c\tau},\\ \overline{x}=x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-a^{-1}b\tau},\ \overline{r}=r(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-a^{-1}b\tau},\\ \overline{\theta}=\theta-a^{-1}\tau,\ \tau=\operatorname{arctg}t,\end{gathered}$$

где $\overline{u},\overline{v},\overline{w},\overline{\rho},\overline{p},\overline{S}$ есть функции $\overline{x},\overline{r},\overline{\theta}$;

– инвариантная подмодель

$$\begin{gathered}\overline{D}\overline{u}+\frac{1}{\overline{\rho}}\overline{p}_{\overline{x}}=-2\frac{b}{a}\overline{u}-\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\overline{x},\\ \overline{D}\overline{v}+\frac{1}{\overline{\rho}}\overline{p}_{\overline{r}}=-2\frac{b}{a}\overline{v}-\left(1+\frac{b^2-1}{a^2}\right)\overline{r}+\frac{1}{\overline{r}}\overline{w}^2+2\frac{\overline{w}}{a},\\ \overline{D}\overline{w}+\frac{1}{\overline{\rho}\overline{r}}\overline{p}_{\overline{\theta}}=-\left(2\frac{b}{a}+\frac{\overline{v}}{\overline{r}}\right)\overline{w}-2\frac{\overline{v}}{a}-2\frac{b}{a^2}\overline{r},\\ \overline{D}\overline{\rho}+\overline{\rho}\left(\overline{u}_{\overline{x}}+\overline{v}_{\overline{r}}+\frac{\overline{v}}{\overline{r}}+\frac{\overline{w}_{\overline{\theta}}}{\overline{r}}\right)=-\frac{6b+c}{a}\overline{\rho},\\ \overline{D}\overline{S}=\frac{2c}{3a}\overline{S}, \overline{S}=\overline{p}\overline{\rho}^{-\frac{5}{3}},\end{gathered}$$

где $\overline{D}=\overline{u}\partial_{\overline{x}}+\overline{v}\partial_{\overline{r}}+\overline{r}^{-1}\overline{w}\partial_{\overline{\theta}}$;

– i-линия тока L определяется уравнениями

$$\frac{d\overline{x}}{\overline{u}}=\frac{d\overline{r}}{\overline{v}}=\frac{d\overline{\theta}}{\overline{r}^{-1}\overline{w}}=ds.$$

Вдоль линии тока справедливы равенства

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(\overline{u}^2+\overline{v}^2+\overline{w}^2+5\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}}\right)_s=\frac{c\overline{p}}{a\overline{\rho}}-2\frac{b}{a}(\overline{u}^2+\overline{v}^2+\overline{w}^2)-\\ -\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\overline{xu}-\left(1+\frac{b^2-1}{a^2}\right)\overline{rv}-2\frac{b}{a^2}\overline{rw},\\ \overline{S}=S_0(L)e^{\frac{2}{3}(a)^{-1}cs}.\end{gathered}$$

Линия в пространстве $R^4(t,x,r,\theta)$, соответствующая постоянным значениям инвариантов $\overline{x}=x_0$, $\overline{r}=r_0$, $\overline{\theta}=\theta_0$, является линией уровня инвариантных функций $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{p}$, $\overline{\rho}$, $\overline{S}$. Исключение времени t дает проекцию этой линии в пространство $R^3(x,r,\theta)$. Проекция есть пересечение конуса $r_0x=x_0r$ и цилиндра с образующей, параллельной оси x, и направляющей кривой

$$r=r_0|\cos(a(\theta-\theta_0))^{-1}|e^{b(\theta-\theta_0)}.$$

График этой кривой схематично показан в плоскости (y,z) на рис. 1. Кривая состоит из бесконечного числа сегментов. Каждый сегмент имеет две асимптоты. Уравнение $\theta=\theta_0+\dfrac{\pi}{2a}+\dfrac{\pi}{a}l$, $l\in Z$ задает асимптоты (пунктирные линии на рис. 1). Асимптоты делят плоскость на $2a$ секторов при a целом. В каждом секторе сегменты кривой не пересекаются. Сегменты касаются логарифмической спирали $r=r_0e^{b(\theta-\theta_0)}$ при $\theta=\theta_0+\dfrac{\pi}{a}k$, $k\in Z$. Штрих-пунктирные линии на рис. 1 есть лучи $\theta=\theta_0+\dfrac{\pi}{a}k$, $k\in Z$. Сегменты кривой имеют минимальное расстояние до начала координат при $\theta=\theta_0-\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}+\dfrac{\pi}{a}m$, $m\in Z$. Штриховые линии на рис. 1 есть лучи $\theta=\theta_0-\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}+\dfrac{\pi}{a}m$, $m\in Z$.

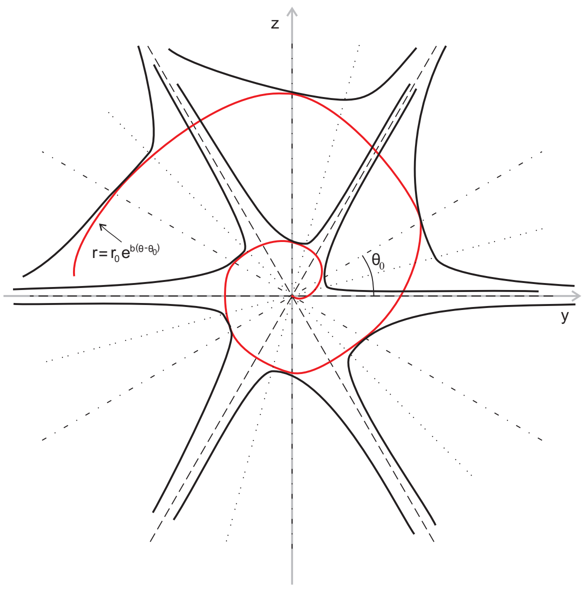

Рис. 1. Направляющая кривая $\theta_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $a = 3$, $b = 3$

Если a не целое, то линии уровня пересекаются в бесконечном числе точек (в счетном числе точек — для рационального a и в несчетном числе точек — для иррационального a).

Из этого рассмотрения следует, что инвариантные функции являются колеблющимися вдоль любого луча, выходящего из начала координат.

2.2. Подмодель 1.2

Базисный оператор подалгебры 1.2 имеет следующий вид:

$$X_{10} + X_{12} + a(X_{11} - X_{13}) + bX_{14}.$$

Представление инвариантного решения задается формулами:

$$u^i = \overline{u}^i(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{a\tau} + (a+t)x^i(1+t^2)^{-1},$$
$$\rho = \overline{\rho}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}e^{(3a+b)\tau},\ p = \overline{p}(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}e^{(5a+b)\tau},$$
$$S = \overline{S}e^{-\frac{2}{3}b\tau},\ \overline{x}^i = x^i(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-a\tau},\ \tau = \operatorname{arctg} t,$$

где $\overline{u}^i, \overline{\rho}, \overline{p}, \overline{S}$ — функции $\overline{x}^i$.

Система (1) редуцируется в инвариантную подмодель вида (2) с коэффициентами:

$$b_1 = b_2 = b_3 = 1,$$
$$a_1 = -2a\overline{u} - (1+a^2)\overline{x},$$
$$a_2 = -2a\overline{v} - (1+a^2)\overline{y},$$
$$a_3 = -2a\overline{w} - (1+a^2)\overline{z},$$
$$a_4 = -(6a+b),\ a_5 = \frac{2}{3}b,$$

i-линия тока L определяется уравнениями

$$\frac{d\overline{x}}{\overline{u}} = \frac{d\overline{y}}{\overline{v}} = \frac{d\overline{z}}{\overline{w}} = ds. \qquad (3)$$

Вдоль линии тока справедливы равенства:

$$\frac{1}{2}\left(\overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2 + 5\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}}\right)_s = b\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}} - 2a(\overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2) -$$
$$-(1+a^2)(\overline{xu} + \overline{yv} + \overline{zw}),$$
$$\overline{\rho}J = e^{-(6a+b)s}B(L),\ \overline{S} = S_0(L)e^{\frac{2}{3}bs},$$

где J — якобиан перехода к новым переменным, одной из которых является параметр i-линии тока s.

Проекция линии уровня инвариантных функций задается равенством $\dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y}{y_0} = \dfrac{z}{z_0}$. Это прямая, проходящая через начало координат и точку (x_0, y_0, z_0). Зависимость расстояния $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ от времени t, определяющая положение точки на этой прямой, имеет вид $r = r_0(1+t^2)^{\frac{1}{2}}e^{a\tau}$. График кривой представлен на рис. 2, он имеет минимум в точке $t = -a$ и две асимптоты $r_+ = r_0e^{\frac{1}{2}a\pi}(t-a), r_- = -r_0e^{-\frac{1}{2}a\pi}(t-a)$.

С течением времени точка с постоянным значением инвариантных функций приближается к началу координат, затем отдаляется от него.

2.3. Подмодель 1.3

Базисный оператор имеет следующий вид:

$$a(X_3 - X_5) + b(X_2 + X_6) + X_7 + X_{10} + X_{12} + cX_{14},$$
$$a^2 + b^2 \neq 0.$$

Представление инвариантного решения задается формулами:

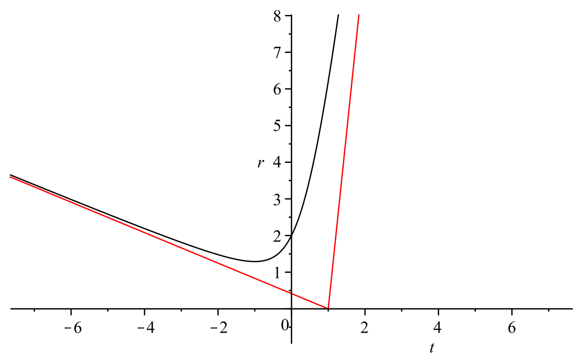

Рис. 2. График зависимости $r(t)$ при $a = 1$, $r_0 = 2$

$$
\begin{gathered}
u = \overline{u}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + tx(1+t^2)^{-1},\\
v = (-(\overline{w}+a)t + \overline{v} + b + ty - z)(1+t^2)^{-1},\\
w = ((\overline{v}+b)t + \overline{w} + a + y + tz)(1+t^2)^{-1},\\
\rho = \overline{\rho}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}e^{c\tau},\\
p = \overline{p}(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}e^{c\tau},\ S = \overline{S}e^{-\frac{2}{3}c\tau},\ \overline{x} = x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}},\\
\overline{y} = -b\tau + (y+tz)(1+t^2)^{-1},\\
\overline{z} = -a\tau + (z-ty)(1+t^2)^{-1},\ \tau = \operatorname{arctg} t,
\end{gathered}
$$

где $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{\rho}$, $\overline{p}$, $\overline{S}$ есть функции $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.

Система (1) дает инвариантную подмодель вида (2) с коэффициентами:

$$
\begin{gathered}
b_1 = b_2 = b_3 = 1, a_1 = -\overline{x}, a_2 = 2(\overline{w}+a),\\
a_3 = -2(\overline{v}+b),\ a_4 = -c,\ a_5 = \frac{2}{3}c,
\end{gathered}
$$

i-линия тока L определяется уравнениями (3).

Вдоль линии тока справедливы равенства:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\left(\overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2 + 5\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}}\right)_s = c\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}} - \overline{x}\overline{u} + 2a\overline{v} - 2b\overline{w},\\
\overline{\rho}J = e^{-cs}B(L),\ \overline{S} = S_0(L)e^{\frac{2}{3}cs},
\end{gathered}
$$

где J — якобиан перехода к новым переменным, одной из которых является параметр i-линии тока s.

Проекция линии уровня инвариантных функций задается равенствами:

$$
\begin{gathered}
x = x_0(1+t^2)^{\frac{1}{2}}, y = y_0 - z_0 t + (b-at)\tau,\\
z = z_0 + y_0 t + (a+bt)\tau.
\end{gathered} \tag{4}
$$

При $a = b = 0$ проекция в плоскость (y, z) дает прямую Y. Для точек этой прямой расстояние до точки (y_0, z_0) равно $y' = \sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_o)^2} = t\sqrt{y_0^2 + z_0^2}$. Тогда проекция линии уровня на плоскость (Y, x) есть гипербола

$$
\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \frac{y'^2}{y_0^2 + z_0^2} = 1.
$$

Значит, проекция линии уровня в пространство $R^3(x, y, z)$ будет гиперболой.

Если в плоскости $(x = x_0)$ начальные точки лежат на окружности

$$
y_0^2 + z_0^2 = k^2, \tag{5}
$$

то исключение параметра t из равенств (4) , в силу (5), дает уравнение конуса

$$
\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \left(\frac{y}{k}\right)^2 + \left(\frac{z}{k}\right)^2.
$$

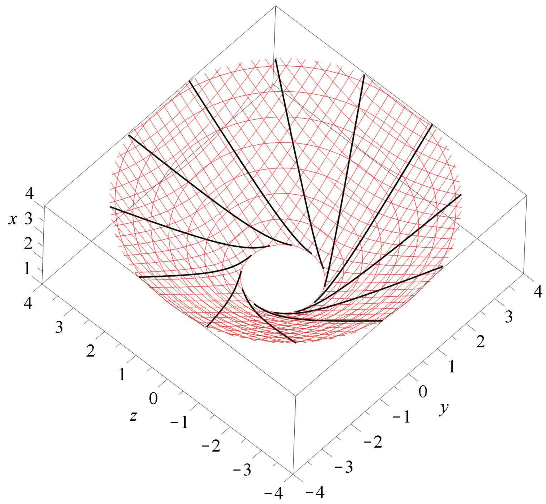

Рис. 3. Проекции в R^3 линий уровня при $a = b = 0$, $x_0 = 1$, $y_0^2 + z_0^2 = 1$, $0 \leqslant t \leqslant 4$

На рис. 3 конус изображен как красная сетчатая поверхность.

Проекции линий уровня инвариантных функций в R^3 являются гиперболами, лежащими на конусе (рис. 3).

3. Инвариантные подмодели ранга 2

Рассматриваются двумерные подалгебры работы [3]. Базисные операторы этих подалгебр не содержат оператора X_{14}. Подалгебры, содержащие оператор X_{14}, восстанавливаются по подалгебрам из работы [3] двумя способами, описанными там же. Подмодели для таких подалгебр имеют те же номера, что и подалгебры работы [3]. Если подмодель построена для подалгебры, полученной вторым способом, она отмечается символ «*» в верхнем индексе после номера. Представление решения для таких подалгебр отличается только представлением функций ρ, p и S.

Для каждой из подалгебр инварианты одного из базисных операторов уже вычислены (для одномерных подалгебр). Другой базисный оператор записывается через инварианты первого и далее вычисляются его инварианты [4]. По ним строится представление инвариантного решения. После подстановки этих представлений в систему (1) получаются инвариантные подмодели ранга 2 (с двумя независимыми переменными). Все подмодели стационарного типа [4].

Инварианты выбираются так, чтобы подмодель принимала канонический вид [4]:

$$
\begin{gathered}
D_1u_1+\varepsilon_1 b_1\rho_1^{-1}p_{1x_1}=a_1,\\
D_1v_1+\varepsilon_2 b_2\rho_1^{-1}p_{1y_1}=a_2,\\
D_1w_1+\varepsilon_3 b_3\rho_1^{-1}p_{1z_1}=a_3,\\
D_1\rho_1+\rho_1(\varepsilon_1u_{1x_1}+\varepsilon_2v_{1y_1}+\varepsilon_3w_{1z_1})=a_4\rho_1,\\
D_1S_1=a_5S_1,\ S_1=p_1\rho_1^{-\frac{5}{3}},
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где $D_1=\varepsilon_1u_1\partial_{x_1}+\varepsilon_2v_1\partial_{y_1}+\varepsilon_3w_1\partial_{z_1}$; $b_i=b_i(y_1,z_1)$; a_i — квадратичные функции по u_1,v_1,w_1; одно из ε_i равно 0 (а два другие равны 1). Инвариантные подмодели, имеющие после номера символ «*» и без него, отличаются только коэффициентами a_i. Приведение подмодели к каноническому виду (выбор инвариантов) производится аналогично алгоритму работы [5].

Подмодели для подалгебр 2.2, 2.2* и 2.3, 2.3* строятся в цилиндрической системе координат. Инварианты выбраны так, чтобы подмодель принимала немного отличный от формы (6), более удобный вид в цилиндрической системе координат.

Для подмоделей, не отмеченных символом «*» после номера, вдоль инвариантной линии тока можно получить интеграл энтропии, ОДУ для одной из компонент скорости и ОДУ для двух других компонент скорости (аналогично интегралу Бернулли для стационарных движений).

3.1. Подмодель 2.1

Базисные операторы берутся в следующем виде:

$$X_{10}+X_{12}+aX_{14}, X_{11}-X_{13}.$$

Представление инвариантного решения таково:

$$
\begin{gathered}
u=(u_1+t)x(1+t^2)^{-1},\\
v=(v_1x+(u_1+t)y)(1+t^2)^{-1},\\
w=(w_1x+(u_1+t)z)(1+t^2)^{-1},\\
\rho=\rho_1x^3(1+t^2)^{-3}e^{a\tau}, p=p_1x^5(1+t^2)^{-5}e^{a\tau},\\
S=S_1e^{-\frac{2}{3}a\tau},\ y_1=\frac{y}{x},\ z_1=\frac{z}{x},\ \tau=\operatorname{arctg}t,
\end{gathered}
$$

где u_1, v_1, w_1, ρ_1, p_1, S_1 — функции переменных y_1, z_1.

Инвариантая подмодель имеет вид:

$$
\begin{gathered}
D_1u_1-\rho_1^{-1}(y_1p_{1y_1}+z_1p_{1z_1})=-1-u_1^2-5\rho_1^{-1}p_1,\\
D_1v_1+\rho_1^{-1}(1+y_1^2)p_{1y_1}+\rho_1^{-1}y_1z_1p_{1z_1}=\\
=-2u_1v_1+5y_1\rho_1^{-1}p_1,\\
D_1w_1+\rho_1^{-1}y_1z_1p_{1y_1}+\rho_1^{-1}(1+z_1^2)p_{1z_1}=\\
=-2u_1w_1+5z_1\rho_1^{-1}p_1,\\
D_1\rho_1+\rho_1(v_{1y_1}+w_{1z_1})=-(a+6u_1)\rho_1,\\
D_1S_1=\frac{2}{3}aS_1,\ S_1=p_1\rho_1^{-\frac{5}{3}},
\end{gathered}
$$

где $D_1=v_1\partial_{y_1}+w_1\partial_{z_1}$.

Замены

$$
\begin{gathered}
y_2=-\frac{z_1}{y_1},\ z_2=y_1^2+z_1^2,\\
v_2=\frac{z_1}{y_1^2}v_1-\frac{1}{y_1}w_1,\ w_2=2(y_1v_1+z_1w_1),
\end{gathered}
\tag{7}
$$

$$u_2=2(1+z_2)u_1+w_2 \tag{8}$$

приводят подмодель к каноническому виду (6) с коэффициентами:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_1=0, b_2=\frac{(1+y_2^2)^2}{z_2}, b_3=4z_2(z_2+1),\\
a_1=-2(1+z_2)-\frac{(u_2-w_2)^2}{2(1+z_2)}+\frac{w_2^2}{2z_2}+\\
+\frac{2z_2v_2^2}{(1+y_2^2)^2}-10\frac{p_1}{\rho_1},\\
a_2=-2\frac{v_2(u_2-w_2)}{2(1+z_2)}+\frac{2y_2v_2^2}{1+y_2^2}-\frac{v_2w_2}{z_2},\\
a_3=-2\frac{w_2(u_2-w_2)}{2(1+z_2)}+\frac{w_2^2}{2z_2}+\\
\frac{2z_2v_2^2}{(1+y_2^2)^2}+10z_2\frac{p_1}{\rho_1},\\
a_4=-b-6\frac{u_2-w_2}{2(1+z_2)}+\frac{2y_2v_2}{1+y_2^2},\ a_5=\frac{2}{3}b,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

если у всех инвариантных функций и инвариантных переменных нижний индекс 2 заменить на 1.

3.2. Подмодель 2.1*

Базисные операторы берутся в следующем виде:

$$X_{10}+X_{12}+a(X_{11}-X_{13}), X_{11}-X_{13}+bX_{14}.$$

Представление инвариантного решения таково:

$$
\begin{gathered}
u=(u_1+t)x(1+t^2)^{-1},\\
v=(v_1x+(u_1+t)y)(1+t^2)^{-1},\\
w=(w_1x+(u_1+t)z)(1+t^2)^{-1},\\
\rho=\rho_1x^{3+b}(1+t^2)^{-3-\frac{b}{2}}e^{-ab\tau},\\
p=p_1x^{5+b}(1+t^2)^{-5-\frac{b}{2}}e^{-ab\tau}\\
S=S_1x^{-\frac{2}{3}b}(1+t^2)^{\frac{b}{3}}e^{\frac{2}{3}ab\tau},\\
y_1=\frac{y}{x},\ z_1=\frac{z}{x},\ \tau=\operatorname{arctg}t,
\end{gathered}
$$

где u_1, v_1, w_1, ρ_1, p_1, S_1 — функции y_1, z_1.

Инвариантая подмодель имеет следующий вид:

$$D_1u_1-\rho_1^{-1}(y_1p_{1y_1}+z_1p_{1z_1})=-1-u_1^2-(5+b)\rho_1^{-1}p_1,$$
$$D_1v_1+\rho_1^{-1}(1+y_1^2)p_{1y_1}+\rho_1^{-1}y_1z_1p_{1z_1}=$$
$$=-2u_1v_1+(5+b)y_1\rho_1^{-1}p_1,$$
$$D_1w_1+\rho_1^{-1}y_1z_1p_{1y_1}+\rho_1^{-1}(1+z_1^2)p_{1z_1}=$$
$$=-2u_1w_1+(5+b)z_1\rho_1^{-1}p_1,$$
$$D_1\rho_1+\rho_1(v_{1y_1}+w_{1z_1})=(ab-(6+b)u_1)\rho_1,$$
$$D_1S_1=\frac{2}{3}b(u_1-a)S_1,\ S_1=p_1\rho_1^{-\frac{5}{3}},$$

где $D_1=v_1\partial_{y_1}+w_1\partial_{z_1}$.

Замены (7) и (8) приводят подмодель к каноническому виду (6) с коэффициентами (9), если у всех инвариантных функций и инвариантных переменных нижний индекс 2 заменить на 1, в a_1 и a_3 слагаемые $-10\dfrac{p_1}{\rho_1}$ и $10z_2\dfrac{p_1}{\rho_1}$ заменить на $-2(5+b)\dfrac{p_1}{\rho_1}$ и $2(5+b)z_2\dfrac{p_1}{\rho_1}$ соответственно, и выбрать

$$a_4=ab-(6+b)\frac{u_2-w_2}{2(1+z_2)}+\frac{2y_2v_2}{1+y_2^2},$$
$$a_5=\frac{2}{3}b\left(\frac{u_2-w_2}{2(1+z_2)}-a\right).$$

3.3. Подмодель 2.2

Базисные операторы берутся в следующем виде:

$$X_7+a(X_{10}+X_{12})+bX_{14},\ X_{11}-X_{13},\ a\neq 0.$$

Представление инвариантного решения имеет вид:

$$u=\left((xu_1-rv_1)\left(1+\frac{r^2}{x^2}\right)^{-1}+tx\right)(1+t^2)^{-1},$$
$$V=\left(v_1x+(xu_1-rv_1)\left(\frac{x}{r}+\frac{r}{x}\right)^{-1}+tr\right)(1+t^2)^{-1},$$
$$W=(w_1x+a^{-1}r)(1+t^2)^{-1},$$
$$\rho=\rho_1x^3(1+t^2)^{-3}e^{\frac{b}{a}\tau},\ p=p_1x^5(1+t^2)^{-5}e^{\frac{b}{a}\tau},$$
$$S=S_1e^{-\frac{2b}{3a}\tau},\ r_1=\frac{r}{x},\ \theta_1=\theta-\frac{\tau}{a},\ \tau=\operatorname{arctg}t,$$

где $u_1,v_1,w_1,\rho_1,p_1,S_1$ есть функции r_1,θ_1.

Подстановкой этого представления в систему (1), записанную в цилиндрической системе координат, получена инвариантая подмодель в следующем виде:

$$D_1u_1=-(1+r_1^2)+v_1^2+(w_1+a^{-1}r_1)^2-$$
$$-(u_1-r_1v_1)^2(1+r_1^2)^{-1}-5\rho_1^{-1}p_1,$$
$$D_1v_1+\rho_1^{-1}(1+r_1^2)p_{1r_1}=-2v_1(u_1-r_1v_1)(1+r_1^2)^{-1}+$$
$$+r_1^{-1}(w_1+a^{-1}r_1)^2+5\rho_1^{-1}r_1p_1,$$
$$D_1w_1+\rho_1^{-1}r_1^{-1}p_{1\theta_1}=-2a^{-1}v_1-r_1^{-1}v_1w_1-$$
$$-2(w_1+a^{-1}r_1)(u_1-r_1v_1)(1+r_1^2)^{-1},$$
$$D_1\rho_1+\rho_1(v_{1r_1}+r_1^{-1}v_1+r_1^{-1}w_{1\theta_1})=$$
$$=-\left(a^{-1}b+6(u_1-r_1v_1)(1+r_1^2)^{-1}\right)\rho_1,$$
$$D_1S_1=\frac{2b}{3a}S_1,\ S_1=p_1\rho_1^{-\frac{5}{3}},$$

где

$$D_1=v_1\partial_{r_1}+r_1^{-1}w_1\partial_{\theta_1}. \tag{10}$$

3.4. Подмодель 2.2*

Базисные операторы берутся в следующем виде:

$$X_7+a(X_{10}+X_{12})+b(X_{11}-X_{13}),X_{11}-X_{13}+cX_{14},a\neq 0.$$

Представление инвариантного решения таково:

$$u=\left((xu_1-rv_1)\left(1+\frac{r^2}{x^2}\right)^{-1}+tx\right)(1+t^2)^{-1},$$
$$V=\left(v_1x+(xu_1-rv_1)\left(\frac{x}{r}+\frac{r}{x}\right)^{-1}+tr\right)(1+t^2)^{-1},$$
$$W=(w_1x+a^{-1}r)(1+t^2)^{-1},$$
$$\rho=\rho_1x^{3+c}(1+t^2)^{-3-\frac{c}{2}}e^{g\tau},p=p_1x^{5+c}(1+t^2)^{-5-\frac{c}{2}}e^{g\tau},$$
$$S=S_1x^{-\frac{2}{3}c}(1+t^2)^{\frac{c}{3}}e^{-\frac{2}{3}g\tau},r_1=\frac{r}{x},$$
$$\theta_1=\theta-a^{-1}\tau,\ \tau=\operatorname{arctg}t,\ g=-a^{-1}bc,$$

где u_1, v_1, w_1, ρ_1, p_1, S_1 есть функции r_1, θ_1.

Инвариантая подмодель имеет вид:

$$D_1u_1=-(1+r_1^2)+v_1^2+(w_1+a^{-1}r_1)^2-$$
$$-(u_1-r_1v_1)^2(1+r_1^2)^{-1}-(5+c)\rho_1^{-1}p_1,$$
$$D_1v_1+\rho_1^{-1}(1+r_1^2)p_{1r_1}=-2v_1(u_1-r_1v_1)(1+r_1^2)^{-1}+$$
$$+r_1^{-1}(w_1+a^{-1}r_1)^2+(5+c)\rho_1^{-1}r_1p_1,$$
$$D_1w_1+\rho_1^{-1}r_1^{-1}p_{1\theta_1}=-2a^{-1}v_1-r_1^{-1}v_1w_1-$$
$$-2(w_1+a^{-1}r_1)(u_1-r_1v_1)(1+r_1^2)^{-1},$$
$$D_1\rho_1+\rho_1(v_{1r_1}+r_1^{-1}v_1+r_1^{-1}w_{1\theta_1})=$$
$$=-(g+(6+c)(u_1-r_1v_1)(1+r_1^2)^{-1})\rho_1,$$
$$D_1S_1=\frac{2}{3}(g+c(u_1-r_1v_1)(1+r_1^2)^{-1})S_1,\ S_1=p_1\rho_1^{-\frac{5}{3}},$$

где D_1 имеет вид (10).

3.5. Подмодель 2.3

Базисные операторы берутся в следующем виде:

$$X_7+a(X_{10}+X_{12})+b(X_{11}-X_{13})+cX_{14}, X_7+f(X_{11}-X_{13}).$$

Представление инвариантного решения таково:

$$u=u_1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{f\theta+g\tau}+(g+t)x(1+t^2)^{-1}+fxr^{-1}w,$$
$$V=v_1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{f\theta+g\tau}+(g+t)r(1+t^2)^{-1}+fw,$$
$$W=w_1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{f\theta+g\tau}, \rho=\rho_1(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}e^{3f\theta+(3g+a^{-1}c)\tau},$$
$$p=p_1(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}e^{5f\theta+(5g+a^{-1}c)\tau}, S=S_1e^{-\frac{2c}{3a}\tau},$$
$$x_1=x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-(f\theta+g\tau)},\ r_1=r(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-(f\theta+g\tau)},$$
$$\tau=\operatorname{arctg}t,\ g=a^{-1}(b-f),$$

где u_1, v_1, w_1, ρ_1, p_1, S_1 есть функции x_1, r_1.

Инвариантая подмодель имеет вид:

$$D_1u_1+\left(1-f^2x_1^2r_1^{-2}\right)\rho_1^{-1}p_{1x_1}-f^2x_1r_1^{-1}\rho_1^{-1}p_{1r_1}=$$
$$=-(1+g^2)x_1-2gu_1-2fr^{-1}u_1w_1+5f^2x_1r_1^{-2}\rho_1^{-1}p_1,$$
$$D_1v_1-f^2x_1r_1^{-1}\rho_1^{-1}p_{1x_1}+(1-f^2)\rho_1^{-1}p_{1r_1}=$$
$$=-(1+g^2)r_1-2gv_1+r_1^{-1}w_1^2+5f^2(r_1\rho_1)^{-1}p_1,$$
$$D_1w_1-fx_1r_1^{-1}\rho_1^{-1}p_{1x_1}-f\rho_1^{-1}p_{1r_1}=$$
$$=-2gw_1-r_1^{-1}v_1w_1-2fr_1^{-1}w_1^2-5f(r_1\rho_1)^{-1}p_1,$$
$$D_1\rho_1+\rho_1(u_{1x_1}+v_{1r_1}+r_1^{-1}v_1)=$$
$$=-\left(6g+a^{-1}c+6fr_1^{-1}w_1\right)\rho_1,$$
$$D_1S_1=\frac{2c}{3a}S_1,\ S_1=p_1\rho_1^{-\frac{5}{3}},$$

где

$$D_1=u_1\partial_{x_1}+v_1\partial_{r_1}. \qquad (11)$$

Замены

$$x_2=-\frac{r_1}{x_1}, r_2=x_1^2+r_1^2, \quad u_2=\frac{r_1}{x_1^2}u_1-\frac{1}{x_1}v_1, v_2=2(x_1u_1+r_1v_1), \qquad (12)$$

$$w_2=\frac{2f(r_2(1+x_2^2))^{\frac{1}{2}}}{x_2}v_2-4r_2\left(1-f^2\left(1+\frac{1}{x_2^2}\right)\right)w_1 \qquad (13)$$

приводят подмодель к виду, немного отличному от (6), более удобному в цилиндрической системе координат.

3.6. Подмодель 2.3*

Базисные операторы берутся в следующем виде:

$$aX_7+X_{10}+X_{12}+b(X_{11}-X_{13}), X_7+c(X_{11}-X_{13})+eX_{14}.$$

Представление инвариантного решения таково:

$$u=u_1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{c\theta+g\tau}+(g+t)x(1+t^2)^{-1}+cxr^{-1}w,$$
$$V=v_1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{c\theta+g\tau}+(g+t)r(1+t^2)^{-1}+cw,$$
$$W=w_1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{c\theta+g\tau},$$
$$\rho=\rho_1(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}e^{(3c+e)\theta+(3g-ae)\tau},$$
$$p=p_1(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}e^{(5c+e)\theta+(5g-ae)\tau},$$
$$S=S_1e^{\frac{2}{3}e(a\tau-\theta)}, x_1=x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-(c\theta+g\tau)},$$
$$r_1=r(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-(c\theta+g\tau)},\ \tau=\operatorname{arctg}t,\ g=b-ac,$$

где u_1, v_1, w_1, ρ_1, p_1, S_1 есть функции x_1, r_1.

Инвариантая подмодель имеет вид:

$$D_1u_1+\left(1-c^2x_1^2r_1^{-2}\right)\rho_1^{-1}p_{1x_1}-c^2x_1r_1^{-1}\rho_1^{-1}p_{1r_1}=$$
$$=-(1+g^2)x_1-2gu_1-2cr^{-1}u_1w_1+$$
$$+c(5c+e)x_1r_1^{-2}\rho_1^{-1}p_1,$$
$$D_1v_1-c^2x_1r_1^{-1}\rho_1^{-1}p_{1x_1}+(1-c^2)\rho_1^{-1}p_{1r_1}=$$
$$=-(1+g^2)r_1-2gv_1+r_1^{-1}w_1^2+c(5c+e)(r_1\rho_1)^{-1}p_1,$$
$$D_1w_1-cx_1r_1^{-1}\rho_1^{-1}p_{1x_1}-c\rho_1^{-1}p_{1r_1}=$$
$$=-2gw_1-r_1^{-1}v_1w_1-2cr_1^{-1}w_1^2-(5c+e)(r_1\rho_1)^{-1}p_1,$$
$$D_1\rho_1+\rho_1(u_{1x_1}+v_{1r_1}+r_1^{-1}v_1)=$$
$$=-\left(6g-ae+(6c+e)r_1^{-1}w_1\right)\rho_1,$$
$$D_1S_1=\frac{2}{3}e(r_1^{-1}w_1-a)S_1,\ S_1=p_1\rho_1^{-\frac{5}{3}},$$

где D_1 имеет вид (11).

Замены (12) и (13) приводят подмодель к виду, немного отличному от (6), более удобному в цилиндрической системе координат.

3.7. Подмодель 2.4

Базисные операторы берутся в следующем виде:

$$-X_3+X_5, X_7+X_{10}+X_{12}+a(X_{11}-X_{13})+bX_{14}.$$

Представление инвариантного решения:

$$u=u_1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{a\tau}+(a+t)x(1+t^2)^{-1},$$
$$v=((v_1-tw_1)e^{a\tau}-z+yt)(1+t^2)^{-1}+a(y+tz)(1+t^2)^{-2},$$
$$w=((w_1+tv_1)e^{a\tau}+y+zt)(1+t^2)^{-1}+at(y+tz)(1+t^2)^{-2},$$
$$\rho=\rho_1(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}e^{(3a+b)\tau}, p=p_1(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}e^{(5a+b)\tau},$$
$$S=S_1e^{-\frac{2}{3}b\tau}, x_1=x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-a\tau},$$
$$y_1=(y+tz)(1+t^2)^{-1}e^{-a\tau},$$

где u_1, v_1, w_1, ρ_1, p_1, S_1 есть функции x_1, y_1.

Из (1) получена инвариантая подмодель канонического вида (6) с коэффициентами:

$$\varepsilon_3 = 0,\, b_1 = b_2 = 1,\, a_1 = -2au_1 - (1+a^2)x_1,$$
$$a_2 = 2w_1 - 2av_1 - a^2y_1,\, a_3 = -2v_1 - aw_1 - 2ay_1,$$
$$a_4 = -(5a+b),\ a_5 = \frac{2}{3}b.$$

3.8. Подмодель 2.5

Базисные операторы берутся в следующем виде:

$$-X_3 + X_5, a(X_2+X_6) + X_7 + X_{10} + X_{12} + bX_{14}, a \neq 0.$$

Представление инвариантного решения задается формулами:

$$u = u_1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + tx(1+t^2)^{-1},$$
$$v = (-w_1t + v_1 + ty - z + a)(1+t^2)^{-1},$$
$$w = ((v_1+a)t + w_1 + y + tz)(1+t^2)^{-1},$$
$$\rho = \rho_1(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}e^{b\tau},\, p = p_1(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}e^{b\tau},$$
$$S = S_1e^{-\frac{2}{3}b\tau},\, x_1 = x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$
$$y_1 = -a\tau + (y+tz)(1+t^2)^{-1},\, \tau = \operatorname{arctg} t,$$

где u_1, v_1, w_1, ρ_1, p_1, S_1 есть функции x_1, y_1.

Из (1) получена инвариантная подмодель канонического вида (6) с коэффициентами :

$$\varepsilon_3 = 0,\, b_1 = b_2 = 1,\, a_1 = -x_1,\, a_2 = 2w_1,$$
$$a_3 = -2(v_1+a),\, a_4 = -b,\, a_5 = \frac{2}{3}b.$$

Подмодель 2.5 совпадает с подмоделью 1.3, если в ней положить $a = 0$, заменить $b \to a$, $c \to b$, занулить все производные по $\overline{z}$ и у всех инвариантных функций, инвариантных переменных и оператора $\overline{D}$ опустить черту и дописать нижний индекс 1.

3.9. Подмодель 2.5*

Базисные операторы берутся в следующем виде:

$$a(X_3 - X_5) + b(X_2+X_6) + X_7 + X_{10} + X_{12},$$
$$X_3 - X_5 + cX_{14}, b \neq 0.$$

Представление инвариантного решения таково:

$$u = u_1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + tx(1+t^2)^{-1},$$
$$v = (-w_1t + v_1 + ty - z + b)(1+t^2)^{-1},$$
$$w = ((v_1+b)t + w_1 + tz + y)(1+t^2)^{-1},$$
$$\rho = \rho_1(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}e^{c\left(-a\tau + (z-ty)(1+t^2)^{-1}\right)},$$
$$p = p_1(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}e^{c\left(-a\tau + (z-ty)(1+t^2)^{-1}\right)},$$
$$S = S_1e^{\frac{2}{3}c\left(a\tau + (ty-z)(1+t^2)^{-1}\right)}, x_1 = x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$
$$y_1 = -b\tau + (y+tz)(1+t^2)^{-1},\, \tau = \operatorname{arctg} t,$$

где u_1, v_1, w_1, ρ_1, p_1, S_1 есть функции x_1, y_1.

Из (1) получена инвариантная подмодель канонического вида (6) с коэффициентами:

$$\varepsilon_3 = 0, b_1 = b_2 = 1,\, a_1 = -x_1,\, a_2 = 2w_1,$$
$$a_3 = -2(v_1+b) - c\frac{p}{\rho},\, a_4 = c(a - w_1),$$
$$a_5 = \frac{2}{3}c(w_1 - a).$$

4. Заключение

Таким образом, построены все инвариантные подмодели ранга 3 и ранга 2 для подалгебр с проективным оператором в каноническом виде. Все подмодели имеют вид подмодели стационарных движений (пространственных и плоских, $a_i = 0$, $b_i = 1$). Стационарная подмодель обладает рядом замечательных свойств [4]. Аналоги этих свойств желательно перенести на полученные подмодели стационарного типа.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.

[2] Черевко А. А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\,\rho^{5/3}$ // Препринт РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики / Новосибирск. 1996. № 4-96. С. 3–37.

[3] Шаяхметова Р.Ф. Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа // Сибирские электронные математические известия. 2014. Т. 11. С. 605–625.

[4] Хабиров С.В. Лекции аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БГУ, 2013. 224 с.

[5] Хабиров С.В. Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду // Математические заметки. 1999. Т. 66, Вып. 3. С. 439–444.

Invariant submodels of rank 3 and rank 2 monatomic gas with the projective operator

Shayakhmetova R.F.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

The system of gas dynamics equations with the state equation of the monatomic gas admits a group of transformations with a 14-dimensional Lie algebra. A projective operator is specific to this algebra. We consider all one-dimensional subalgebras containing the projective operator. Invariants are calculated and invariant submodel of rank 3 is constructed for each of subalgebras. All submodels are stationary type. They are reduced to the canonical form. Area hyperbolicity of obtained system were specified. Integral entropy is obtained along the flow lines. An ordinary differential equation to the invariant functions is obtained along the flow lines (analogue of a Bernoulli integral for stationary motions). We consider all two-dimensional subalgebras containing projective operator. Invariant submodel of rank 2 stationary type is constructed for each of subalgebras. Submodels are reduced to the canonical form.

Keywords: gas dynamics equations, projective operator, invariant submodels