

# Модификации метода С.К. Годунова для расчета распространения возмущений в упругом теле<sup>1</sup>

Аганин А.А.<sup>\*,\*\*</sup>, Хисматуллина Н.А.<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

<sup>\*\*</sup> Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

Проведено численное исследование эффективности UNO- и TVD-модификаций метода С.К. Годунова второго порядка точности при расчете линейных волн в упругом теле по сравнению с классическим методом С.К. Годунова. Рассмотрены одномерные задачи о распаде цилиндрических разрывов. Показано, что обе модификации значительно лучше описывают радиально-сходящиеся, радиально-расходящиеся продольные и сдвиговые волны и контактные разрывы как в одномерной, так и в двумерной постановке задачи. При этом UNO-модификация предпочтительнее TVD-модификации из-за того, что строгое выполнение TVD-свойства в TVD-модификации достигается за счет «подрезания» экстремумов решения.

**Ключевые слова:** линейные волны в упругом теле, метод Годунова, ENO-схемы, UNO-схемы, TVD-схемы

## 1. Введение

Изучается возможность повышения эффективности расчета линейных волн в упругом теле методом С.К. Годунова [1] за счет его UNO- и TVD-модификаций, относящихся к классу ENO-схем (UNO — Uniformly Non Oscillatory (равномерно безосцилляционные), TVD — Total Variation Diminishing (уменьшающие полную вариацию), ENO — Essentially Non Oscillatory (по-существу безосцилляционные)). Полная вариация сеточной функции  $q^n$

$$TV(q^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |q_{j+1}^n - q_j^n|,$$

согласно принципу TVD, должна удовлетворять условию

$$TV(q^{n+1}) \leq TV(q^n),$$

где верхние индексы  $n$  и  $n + 1$  обозначают номера двух последовательных временных слоев, а нижние  $j$  — номера ячеек пространственной сетки. TVD-схемы являются монотонными, имеют первый поряд-

док точности в окрестности экстремумов решения и второй — вне них; UNO-схемы — всюду второго порядка, допускают осцилляции численной природы, но лишь на уровне погрешностей аппроксимации; ENO-схемы повышенного порядка точности допускают осцилляции на уровне погрешностей аппроксимации. Исследуемые модификации аналогичны тем, что использовались в работе [2] для изучения нелинейных волн в газе и жидкости.

Классическая схема С.К. Годунова первого порядка точности благодаря устойчивости и монотонности нашла широкое применение. Ее недостатками являются низкий (первый) порядок аппроксимации и, как следствие, сильное размазывание скачков и контактных разрывов.

Метод С.К. Годунова предполагает разбиение расчетной области на ячейки так, что внутри каждой ячейки значения всех параметров полагаются постоянными. Значения искомых величин на границах ячеек находятся как решение задачи Римана о распаде разрыва и используются в разностной схеме при аппроксимации пространственных производных. Для схем повышенного порядка точности требование монотонности заменяется условием ограничения полной вариации, а все параметры внутри каждой ячейки предполагаются не постоянными, а изменяющимися линейно.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00433).

В настоящей работе при построении TVD- и UNO-модификаций используются выражения временных производных искомым функций через их пространственные производные. С помощью этих выражений вычисляются значения искомым функций на следующем полуслое по времени в центре ячеек сетки и по обе стороны каждой из их граней. Значения на самих гранях находятся как решение задачи о распаде разрыва. Далее рассчитываются численные потоки через границы ячеек. Расчет значений на следующем временном слое осуществляется по явной конечно-разностной схеме. На значения пространственных производных в ячейке вводятся ограничители. Рассматриваемые в настоящей работе модификации различаются видом ограничителя. Ограничитель TVD-модификации обеспечивает строгое выполнение свойства TVD. Однако, в результате этого порядок точности TVD-схемы в экстремальных точках решения понижается. Ограничитель в схеме UNO включает в себя аппроксимации производных не только первого, но и второго порядков. Основным преимуществом UNO-схемы является второй порядок точности, равномерный в области гладких решений.

Сопоставление эффективности TVD- и UNO-модификаций метода С.К. Годунова и его классического варианта проводится на ряде одномерных задач, рассчитываемых как в одномерной, так и в двумерной постановках. В частности, рассмотрены задачи о распаде цилиндрического разрыва в давлении и осевой скорости.

## 2. Уравнения динамики упругого тела и UNO- и TVD-модификации метода С.К. Годунова

### 2.1. Уравнения динамики упругого тела

Предполагается, что линейные волны в упругом теле описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(S_{rr} - P)}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{S_{rr} - S_{\varphi\varphi}}{r}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial(S_{zz} - P)}{\partial z} + \frac{S_{rz}}{r}, \\ \frac{\partial S_{rr}}{\partial t} &= \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial S_{zz}}{\partial t} &= -\frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} - 2\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2u}{r} \right), \\ \frac{\partial S_{rz}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -K \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время;  $r$  и  $z$  — радиальная и осевая цилиндрические координаты;  $\rho$  — плотность;  $u, v$  — компоненты скорости по осям  $r$  и  $z$ ;  $S_{rr}, S_{zz}, S_{\varphi\varphi}, S_{rz}$  — компоненты девиатора  $S$  тензора напряжений  $\sigma$ ;  $S = \sigma + Pg$ ;  $P$  — всестороннее (гидростатическое) давление;  $g$  — метрический тензор;  $K = \lambda + 2/3\mu$  — коэффициент объемного расширения;  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе.

Система (1) описывает двумерную динамику упругого тела относительно цилиндрической системы координат. Сделав ряд очевидных изменений, ее можно использовать также и для описания двумерной динамики тела относительно декартовых координат  $x, y$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(S_{xx} - P)}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(S_{yy} - P)}{\partial y}, \\ \frac{\partial S_{xx}}{\partial t} &= \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial S_{yy}}{\partial t} &= -\frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -K \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Для описания одномерной осесимметричной динамики тела можно использовать следующую из (1) систему:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(S_{rr} - P)}{\partial r} + \frac{S_{rr} - S_{\varphi\varphi}}{r}, \\ \frac{\partial S_{rr}}{\partial t} &= \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -K \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r}, \\ \frac{\partial S_{rz}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial v}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для изложения UNO- и TVD-модификаций метода С.К. Годунова систему (1) удобно представить в следующем виде

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}_r + \mathbf{g}_z = \mathbf{w}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (u, v, S_{rr}, S_{zz}, S_{rz}, S_{\varphi\varphi}, P)^T, \\ \mathbf{f} &= - \left( \frac{S_{rr} - P}{\rho}, \frac{S_{rz}}{\rho}, \frac{4}{3}\mu u, -\frac{2}{3}\mu u, \mu v, -\frac{2}{3}\mu u, -Ku \right)^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{g} = - \left( \frac{S_{rz}}{\rho}, \frac{S_{zz} - P}{\rho}, -\frac{2}{3}\mu v, \frac{4}{3}\mu v, \mu u, -\frac{2}{3}\mu v, -Kv \right)^T,$$

$$\mathbf{w} = \left( \frac{S_{rr} - S_{\varphi\varphi}}{\rho r}, \frac{S_{rz}}{\rho r}, -\frac{2}{3}\frac{\mu u}{r}, -\frac{2}{3}\frac{\mu u}{r}, 0, \frac{4}{3}\frac{\mu u}{r}, -\frac{Ku}{r} \right)^T.$$

## 2.2. UNO-модификация метода С.К. Годунова

UNO-модификация метода С.К. Годунова для системы (4) состоит из трех шагов.

*Шаг 1.* Вычисление значений искомого вектора  $\mathbf{q}$  в ячейках расчетной сетки на полуцелом временном слое

$$\mathbf{q}_{ik}^{n+1/2} = \mathbf{q}_{ik}^n + (\mathbf{q}_t)_{ik}^n \frac{\Delta t}{2},$$

где  $i, k$  — номер ячейки;  $n$  — номер временного слоя;  $\Delta t$  — шаг по времени.

Для расчета производной по времени используется выражение, которое следует из (4):

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{w} - \mathbf{A}\mathbf{q}_r - \mathbf{B}\mathbf{q}_z,$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{f}_{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{g}_{\mathbf{q}}$ , так что

$$(\mathbf{q}_t)_{ik}^n = \mathbf{w}_{ik}^n - \mathbf{A}_{ik}^n(\mathbf{q}_r)_{ik}^n - \mathbf{B}_{ik}^n(\mathbf{q}_z)_{ik}^n.$$

Здесь

$$\mathbf{w}_{ik}^n = \mathbf{w}(\mathbf{q}_{ik}^n), \quad \mathbf{A}_{ik}^n = \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ik}^n), \quad \mathbf{B}_{ik}^n = \mathbf{B}(\mathbf{q}_{ik}^n),$$

а  $(\mathbf{q}_r)_{ik}^n$  находится по формуле

$$(\mathbf{q}_r)_{ik}^n = \frac{\min\text{mod}(\mathbf{D}_{i+1/2,k}, \mathbf{E}_{i-1/2,k})}{h_r},$$

где

$$\min\text{mod}(x, y) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)) \min(|x|, |y|),$$

$$\mathbf{D}_{i+1/2,k} = \Delta_{i+1/2,k}^1 - \frac{1}{2}\Delta_{i+1/2,k}^2,$$

$$\mathbf{E}_{i-1/2,k} = \Delta_{i-1/2,k}^1 + \frac{1}{2}\Delta_{i-1/2,k}^2,$$

$$\Delta_{i+1/2,k}^1 = \mathbf{q}_{i+1,k}^n - \mathbf{q}_{i,k}^n,$$

$$\Delta_{i-1/2,k}^1 = \mathbf{q}_{i,k}^n - \mathbf{q}_{i-1,k}^n,$$

$$\Delta_{i+1/2,k}^2 = \min\text{mod}(\mathbf{Q}_{i,k}^n, \mathbf{Q}_{i+1,k}^n),$$

$$\Delta_{i-1/2,k}^2 = \min\text{mod}(\mathbf{Q}_{i-1,k}^n, \mathbf{Q}_{i,k}^n),$$

$$\mathbf{Q}_{i,k}^n = \mathbf{q}_{i+1,k}^n - 2\mathbf{q}_{i,k}^n + \mathbf{q}_{i-1,k}^n.$$

Аналогично  $(\mathbf{q}_z)_{ik}^n$  вычисляется и  $(\mathbf{q}_z)_{ik}^n$ .

*Шаг 2.* Расчет численных потоков  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  через границы между ячейками

$$\mathbf{f}_{i+1/2,k}^{n+1/2} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1/2,k}^{n+1/2}), \quad \mathbf{g}_{i,k+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_{i,k+1/2}^{n+1/2}),$$

где

$$\mathbf{q}_{i+1/2,k}^{n+1/2} = \mathcal{R}(\mathbf{q}_{i+1/2L,k}^{n+1/2}, \mathbf{q}_{i+1/2R,k}^{n+1/2}),$$

$$\mathbf{q}_{i,k+1/2}^{n+1/2} = \mathcal{R}(\mathbf{q}_{i,k+1/2B}^{n+1/2}, \mathbf{q}_{i,k+1/2T}^{n+1/2}).$$

Здесь  $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — решение задачи о распаде разрыва,

$$\mathbf{q}_{i-1/2R,k}^{n+1/2} = \mathbf{q}_{ik}^{n+1/2} - (\mathbf{q}_r)_{ik}^n \frac{h_r}{2},$$

$$\mathbf{q}_{i+1/2L,k}^{n+1/2} = \mathbf{q}_{ik}^{n+1/2} + (\mathbf{q}_r)_{ik}^n \frac{h_r}{2},$$

$$\mathbf{q}_{i,k-1/2T}^{n+1/2} = \mathbf{q}_{ik}^{n+1/2} - (\mathbf{q}_z)_{ik}^n \frac{h_z}{2},$$

$$\mathbf{q}_{i,k+1/2B}^{n+1/2} = \mathbf{q}_{ik}^{n+1/2} + (\mathbf{q}_z)_{ik}^n \frac{h_z}{2}.$$

*Шаг 3.* Расчет значений искомого вектора на новом временном слое.

Значения вектора  $\mathbf{q}$  вычисляются по явной конечно-разностной схеме

$$\frac{\mathbf{q}_{ik}^{n+1} - \mathbf{q}_{ik}^n}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{f}^{n+1/2}}{h_r} + \frac{\Delta \mathbf{g}^{n+1/2}}{h_z} = \mathbf{w}_{ik}^{n+1/2},$$

где

$$\Delta \mathbf{f}^{n+1/2} = \mathbf{f}_{i+1/2,k}^{n+1/2} - \mathbf{f}_{i-1/2,k}^{n+1/2},$$

$$\Delta \mathbf{g}^{n+1/2} = \mathbf{g}_{i,k+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{g}_{i,k-1/2}^{n+1/2}.$$

## 2.3. TVD-модификация метода С.К. Годунова

TVD-модификация отличается от UNO-модификации лишь формулами расчета производных  $\mathbf{q}_r$  и  $\mathbf{q}_z$ . В TVD-модификации имеем

$$(\mathbf{q}_r)_{ik}^n = \frac{1}{h_r} \min\text{mod}(\Delta_{i+1/2,k}^1, \Delta_{i-1/2,k}^1),$$

$$(\mathbf{q}_z)_{ik}^n = \frac{1}{h_z} \min\text{mod}(\Delta_{i,k+1/2}^1, \Delta_{i,k-1/2}^1).$$

## 3. Эффективность UNO- и TVD-модификаций

Для оценки эффективности рассматриваемых UNO- и TVD-модификаций метода С.К. Годунова рассчитаны две одномерные задачи о распаде цилиндрического разрыва. Для описания этих задач применялись уравнения систем (1)–(3). Все расчеты проводились на сетке с одинаковыми пространственными шагами  $h_x = h_y = h_r = h_z = R/100$ ,

где  $R$  — радиус цилиндрического разрыва. При использовании двумерной постановки задачи шаг интегрирования по времени выбирался из условия Куранта

$$\Delta t = \frac{C_{CRT}}{c_1(1/h_a + 1/h_b)}, \quad (5)$$

где  $C_{CRT}$  — число Куранта;  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  — скорость распространения продольных волн;  $h_a = h_x = h_r$ ,  $h_b = h_y = h_z$  — шаги расчетной сетки вдоль соответствующих осей. В одномерных постановках условие Куранта имело следующий вид

$$\Delta t = \frac{C_{CRT}}{c/h_r}, \quad (6)$$

где, в зависимости от задачи,  $c = c_1$  или  $c = c_2$ ,  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорость распространения поперечных волн. Во всех расчетах полагалось  $C_{CRT} = 0.95$ .

### 3.1. Задача о распаде цилиндрического разрыва во всестороннем давлении

В начальный момент времени в цилиндрической области  $r \leq R$  имеем  $P = 0$ , а вне этой области (т.е. при  $r > R$ )  $P = p^*$  (рис. 1(a)). Начальные значения остальных искомых функций всюду равны нулю.

Решение данной задачи в цилиндрической системе координат с радиальной координатой  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  включает лишь радиально-сходящиеся и

радиально-расходящиеся волны продольных напряжений, так что для описания можно воспользоваться первыми четырьмя уравнениями системы (3). Результаты расчетов этой задачи при таком описании методом С.К. Годунова, его TVD- и UNO-модификациями на два момента времени представлены на рис. 1(b). Видно, что в момент  $t_1$  все три численных решения довольно близки. При этом в окрестности фронтов волн несколько более точным является решение UNO-модификации, далее в этом отношении следует TVD-модификация, а затем метод С.К. Годунова. С течением времени расхождение возрастает.

На рис. 2–4 представлены некоторые результаты расчетов этой задачи методом С.К. Годунова и его TVD- и UNO-модификациями в двумерной постановке в рамках системы (2), в двумерной постановке в рамках системы (1) и в одномерной постановке в рамках первых четырех уравнений системы (3). Сопоставляя поля изолиний  $P$ , можно заключить, что TVD- и UNO-модификации значительно точнее метода С.К. Годунова в описании цилиндрической симметрии задачи при использовании уравнений в декартовых координатах (2). Аналогичное соотношение между точностью этих методов расчета при использовании декартовых координат наблюдается и в радиальных распределениях  $P$  как в окрестности фронтов радиально-сходящихся и радиально-расходящихся волн, так и в области контактного разрыва. Оценку точности здесь можно провести сравнением с результатами расчетов в одномерной постановке в рамках первых четырех уравнений системы (3). Видно, что ширина численного размазывания скачков (фронтов волн и контактного разрыва) в решениях TVD- и UNO-модификаций значительно меньше, чем в решении метода С.К. Годунова, меньше и понижение амплитуды фронта сходящейся волны. При этом UNO-модификация заметно точнее описывает амплитуду сходящейся волны в силу того, что TVD-модификация обеспечивает свойство TVD за счет снижения порядка точности схемы в области экстремумов до первого, что выражается в «подрезании» локального максимума на фронте сходящейся волны.

На рис. 2–4 видно, что в решениях, рассчитанных в двумерной постановке в рамках системы (2), радиальные распределения  $P$  в сечении  $x = y$  описываются намного хуже, чем в сечении  $y = 0$  (особенно хорошо видно в решении метода С.К. Годунова). Это обусловлено тем, что в сечении  $y = 0$  волны распространяются вдоль сторон ячеек, а в сечении  $x = y$  — вдоль их диагоналей. Кроме того, диагонали ячеек в  $\sqrt{2}$  раза больше их сторон.

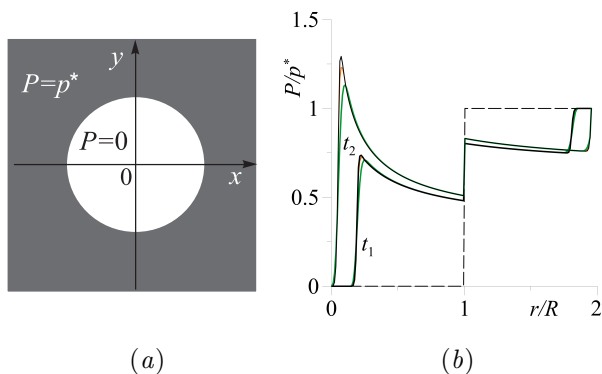


Рис. 1. Начальное распределение всестороннего давления  $P$  в задаче о распаде цилиндрического разрыва в этом параметре (a). Результаты расчета этой задачи на два момента времени при ее описании первыми четырьмя уравнениями системы (3) (b): зеленая линия — метод С.К. Годунова, оранжевая линия — TVD-модификация, черная линия — ENO-модификация. Штриховой линией показано начальное распределение

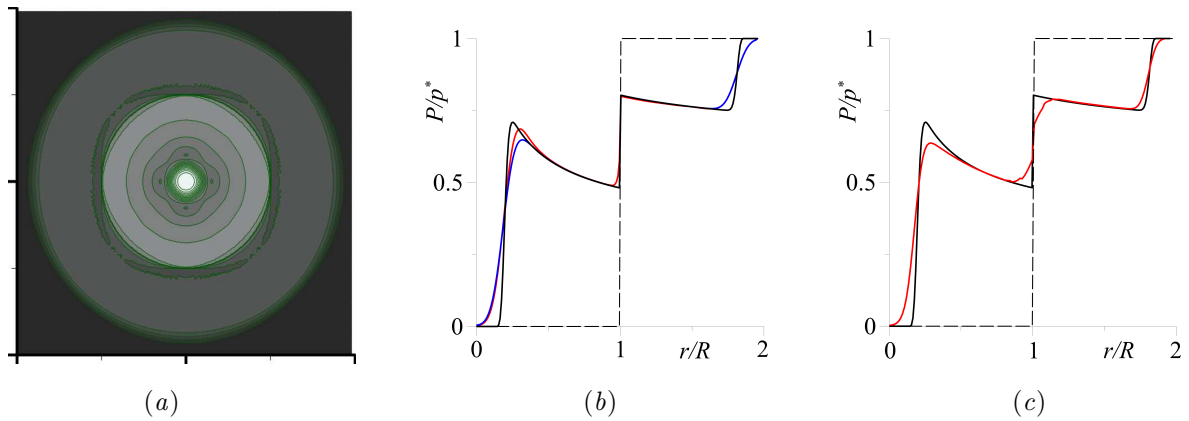


Рис. 2. Результаты расчетов задачи о распаде цилиндрического разрыва во всестороннем давлении  $P$  методом С.К. Годунова в двумерной постановке в рамках системы (2): поле изолиний гидростатического давления  $P$  (a) и его радиальные распределения (красные кривые) в сечениях  $y=0$  (b) и  $x=y$  (c). Кроме того, на (b, c): черные сплошные линии — численное решение в одномерной постановке в рамках первых четырех уравнений системы (3), синие сплошные линии — численное решение в двумерной постановке в рамках системы (1), штриховые кривые — начальные распределения

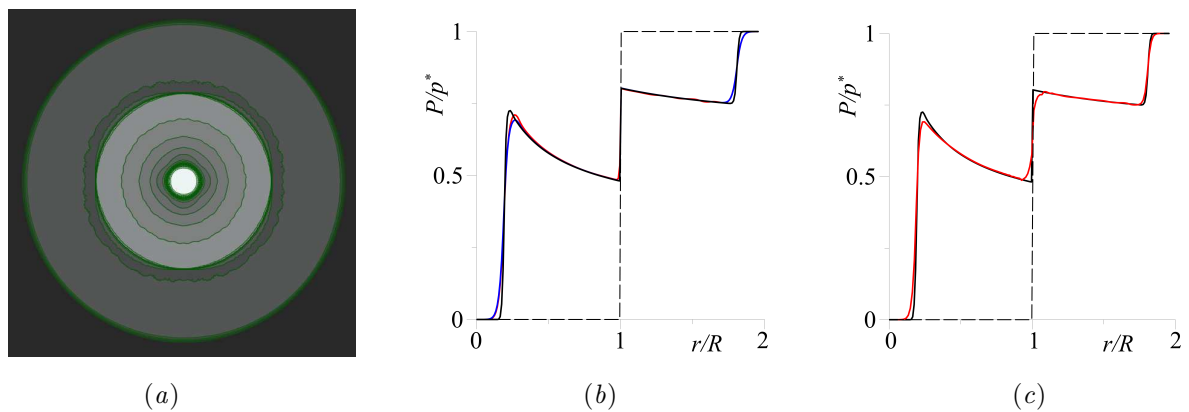


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для TVD-модификации

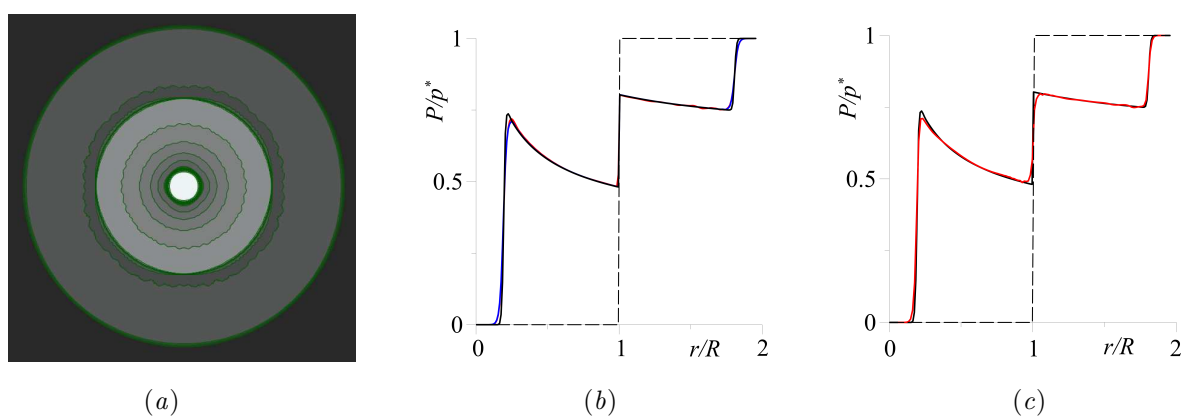


Рис. 4. То же, что на рис. 2, но для UNO-модификации

Наряду с численными решениями данной задачи о распаде цилиндрического разрыва в рамках двумерной постановки (2) в декартовых координатах и одномерной постановки в рамках первых четырех уравнений системы (3) в цилиндрических координатах, на рис. 2–4 представлены также и результаты расчетов этой задачи в двумерной цилиндрической постановке (1). Видно, что в последнем случае точность решения заметно хуже, чем при использовании уравнений системы (3), и заметно лучше, чем при применении уравнений системы (2). Понижение точности по сравнению с использованием уравнений системы (3) объясняется различием шагов по времени. При использовании системы (1) он выбирается из двумерного условия Куранта (5), тогда как при применении уравнений систем (2) — из одномерного аналога этого условия (6). В результате при использовании системы (1) шаг по времени оказывается примерно в 2 раза меньше, что фактически означает увеличение схемной вязкости примерно в 2 раза. Повышение точности решения при использовании системы (1) по сравнению с использованием уравнений системы (2) объясняется различием в сетках. В первом случае сетка больше соответствует задаче, чем во втором, поскольку фронты возникающих в решении волн распространяются только вдоль сторон ячеек (соответствующих координате  $r$ ), тогда как во втором случае они распространяются по отношению к ячейкам во всех направлениях, в том числе и вдоль их диагоналей. Представленные результаты подтверждают, что оптимальной постановкой данной задачи о распаде цилиндрического разрыва являются уравнения системы (3).

### 3.2. Задача о распаде цилиндрического разрыва в осевой компоненте скорости

В начальный момент времени в цилиндрической области  $r \leq R$  осевая компонента скорости  $v = 0$ , а вне этой области (т.е. при  $r > R$ )  $v = v^*$ . Начальные значения остальных искомых функций всюду равны нулю. Решение данной задачи в цилиндрической системе координат включает лишь радиально-сходящиеся и радиально-расходящиеся волны сдвиговых напряжений, так что для ее описания можно воспользоваться двумя последними уравнениями системы (3).

Результаты расчетов этой задачи при таком описании методом С.К. Годунова, его TVD- и UNO-модификациями в два момента времени представлены на рис. 5. Видно, что в первый момент все три численных решения довольно близки. При этом в окрестности фронтов волн несколько более точным является решение UNO-модификации, далее в этом

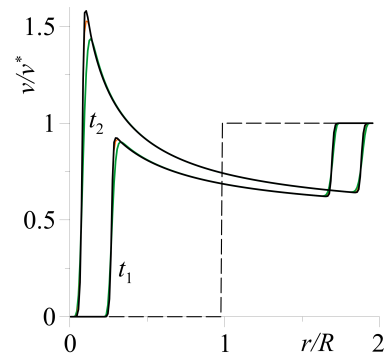


Рис. 5. Радиальные распределения осевой компоненты скорости  $v$  (в два момента времени) в задаче о распаде цилиндрического разрыва в этом параметре при описании данной задачи двумя последними уравнениями системы (3). Зеленые линии — метод С.К. Годунова, оранжевые линии — TVD-модификация, черные линии — UNO-модификация. Штриховой линией показано начальное распределение.

отношении следует TVD-модификация, а затем метод С.К. Годунова. С течением времени расхождение возрастает.

На рис. 6 представлены результаты расчетов данной задачи методом С.К. Годунова, его TVD- и UNO-модификациями при описании задачи двумя последними уравнениями системы (3), всеми уравнениями системы (3) и системой (1). Видно, что, как и в случае задачи о распаде разрыва во всестороннем давлении, наименьшую точность численного решения во всех случаях постановки задачи дает метод С.К. Годунова, а наибольшую — его UNO-модификация. Различие численных решений при использовании разных систем уравнений объясняется различием в величине шага по времени. При использовании двух последних уравнений системы (3) он определяется из одномерного условия Куранта (6) при  $c = c_2$ , при использовании всех уравнений (3) — из того же условия (6), но при  $c = c_1$ , а при использовании системы (1) — из двумерного условия (5) при  $c = c_1$ . Для принятого в задаче материала тела (алюминиевый сплав Д16Т)  $c_1 \approx 2c_2$ , так что шаг по времени в первом случае будет примерно в два раза больше, чем во втором, и в четыре раза больше, чем в третьем. В результате во втором случае схемная вязкость будет примерно в два раза больше, чем в первом, и несколько меньше, чем в третьем.

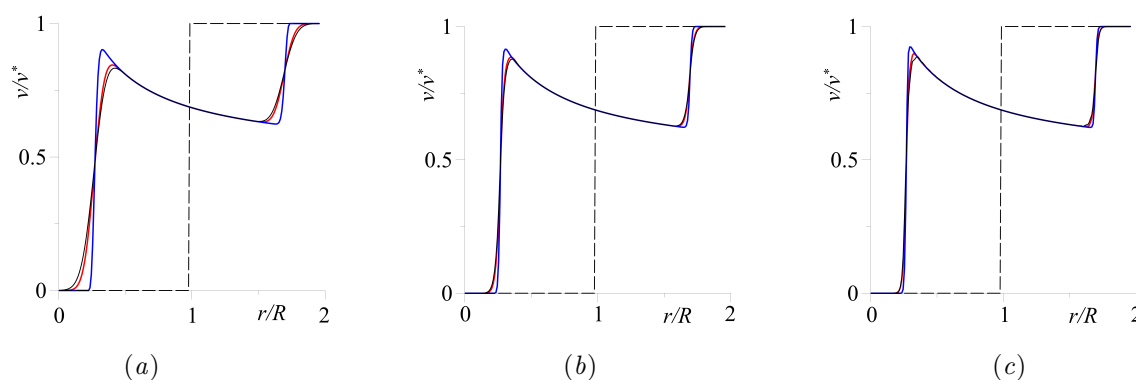


Рис. 6. Радиальные распределения осевой компоненты скорости  $v$  (в один из моментов времени) в численных решениях задачи о распаде цилиндрического разрыва в этом параметре методом С.К. Годунова (а), TVD-модификацией (б) и UNO-модификацией (с). Сплошные кривые: синие — при описании задачи двумя последними уравнениями системы (3), красные — при описании задачи системой (3), черные — при описании задачи системой (1). Штриховые кривые — начальные распределения

#### 4. Заключение

Проведено численное исследование эффективности UNO- и TVD-модификаций метода С.К. Годунова второго порядка точности при расчете линейных волн в упругом теле по сравнению с классическим методом С.К. Годунова. Рассмотрены одномерные задачи о распаде цилиндрических разрывов во всестороннем (гидростатическом) давлении и в осевой компоненте скорости. Показано, что обе модификации значительно лучше описывают радиально-сходящиеся, радиально-расходящиеся продольные и сдвиговые волны и контактные разрывы как в одномерной, так и двумерной постановке задачи. При этом UNO-

модификация предпочтительнее из-за того, что для обеспечения выполнения TVD-свойства TVD-модификация «подрезает» экстремумы.

#### Список литературы

- [1] Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [2] Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Расчет сильного сжатия сферического парогазового пузырька в жидкости // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 6. С. 54–64.

## Modifications of the Godunov method for computing disturbance propagation in an elastic body

**Aganin A.A.<sup>\*,\*\*</sup>, Khismatullina N.A.<sup>\*\*</sup>**

\* Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

\*\* Institute of Mechanics and Engineering, Kazan

Numerical investigation of efficiency of UNO- and TVD-modifications of the Godunov method of the second order accuracy for computation of linear waves in an elastic body in comparison with the classical Godunov method is carried out. To this end, one-dimensional cylindrical Riemann problems are considered. It is shown that the both modifications are considerably more accurate in describing radially converging as well as diverging longitudinal and shear waves and contact discontinuities both in one- and two-dimensional problem statements. At that the UNO-modification is more preferable than the TVD-modification because exact implementation of the TVD property in the TVD-modification is reached at the expense of "cutting" solution extrema.

**Keywords:** linear waves in an elastic body, Godunov method, ENO-schemes, UNO-schemes, TVD-schemes

