ТРУДЫ Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН

ISSN 2542–0380
Том 11 (2016), № 1, с. 88–93
УДК 532.5.013.13: 536.24

http://proc.uimech.org/uim2016.1.013
DOI: 10.21662/uim2016.1.013

Получена: 16.09.2016
Принята: 20.09.2016

Слоистые течения при естественной конвекции слабо стратифицированной жидкости[1]

Моисеев К.В.[*,**]

[*] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа
[**] Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

В работе на основе математической модели, построенной в линейном приближении, изучаются особенности образования слоистых течений при естественной конвекции слабо стратифицированной неоднородной жидкости. Установлены области параметров, при которых образуется послойно-ячеистая структура течения при боковом подогреве.

Ключевые слова: конвекция, слоистое течение, стратифицированная жидкость, неоднородная жидкость

1. Введение

В настоящее время достаточно широко представлены результаты исследований процесса естественной конвекции неоднородных жидкостей. Причём наряду с экспериментальными и теоретическими работами, с развитием вычислительных технологий, появилось множество работ, посвящённых математическому моделированию. Однако, как показывает практика, существующие модели не способны в полном объёме описать растущие с большой скоростью экспериментальные данные. До сих пор не существует замкнутой математической модели, описывающей гидродинамику и теплообмен течений неоднородных сред с учётом переменных физико-химических и тепло-физических свойств. Достаточно часто существующие упрощённые модели описывают определённые частные процессы и не учитывают влияние малых факторов. В то же время, признанные свидетельства влияния малых факторов, таких, как неоднородность плотности и вязкости, стратификация, наличие примесей, потоков тепла и вещества, на структуру и динамику течений до сих пор не получили достоверного математического описания. Недостаточно изучено и влияние слабой стратификации, с действием которой связывается существование тонкой структуры течений в окружающей среде и технологических процессах. В данной работе численно исследуется влияние слабой стратификации на особенности и закономерности, возникающие в процессе естественно-конвективного теплообмена вязкой слабо стратифицированной жидкости.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-97060-р_поволжье_а), АН РБ (договор № 40/63-П) и Программы фундаментальных исследований ОЭМПУ РАН № 13 «Вихри и волны в сложных средах»

2. Постановка задачи

В работе рассматривается ньютоновская вертикально стратифицированная жидкость, плотность которой зависит линейно от температуры T, концентрации примеси C и солености S:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0) + \beta_S(S - S_0)\right),$$
$$\beta_T = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p,S,C}, \quad \beta_C = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial C}\right)_{p,S,T},$$
$$\beta_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{p,T,C},$$

где T_0, C_0, S_0 , ρ_0 — значения температуры, концентрации солености и плотности, соответственно, в невозмущённом состоянии; β_T, β_C, β_S — коэффициенты температурного, концентрационного и солевого расширения (сжатия) жидкости, соответственно. Невозмущённым значениям соответствуют следующие характерные масштабы температуры Λ_T, концентрации Λ_C, солености Λ_S и плавучести Λ:

$$\Lambda_T = \left|\frac{1}{T_0}\frac{dT}{dy}\right|^{-1}, \quad \Lambda_C = \left|\frac{1}{C_0}\frac{dC}{dy}\right|^{-1},$$

$$\Lambda_S = \left|\frac{1}{S_0}\frac{dS}{dy}\right|^{-1}, \quad \Lambda = \left|\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho}{dy}\right|^{-1},$$

с соответствующими частотами:

$$N_T = \sqrt{\frac{g}{\Lambda_T}}, N_C = \sqrt{\frac{g}{\Lambda_C}}, N_S = \sqrt{\frac{g}{\Lambda_S}}, N = \sqrt{\frac{g}{\Lambda}}$$

и периодом плавучести:

$$T_b = \frac{2\pi}{N},$$

где g — ускорение силы тяжести; y — вертикальная ось. Предполагается, что плотность не зависит от давления и так же, как и давление p, представляет собой сумму возмущённой и невозмущённой компонент:

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho',$$

где p_0 и ρ_0 удовлетворяют уравнению гидростатики:

$$\nabla p_0 = \rho_0 g.$$

Для малых отклонений p' и ρ' справедливы соотношения:

$$p' << p_0, \quad \rho' << \rho_0.$$

Тогда, учитывая, что плотность жидкости всюду постоянна за исключением слагаемого, учитывающего подъемную силу, уравнения естественной конвекции несжимаемой ньютоновской вертикально стратифицированной жидкости в приближении Обербека–Буссинеска запишутся как [1]:

$$\nabla\vec{v} = 0,$$
$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \nu_0\triangle\vec{v} + (\rho - \rho_0)\vec{g},$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\nabla T = \chi_0\triangle T,$$
$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla(C\vec{v}) = D_0\triangle C,$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla(S\vec{v}) = D_S\triangle S,$$

где $\vec{v}$ — возмущение вектора скорости жидкости; t — время; ν_0, χ_0, D_0, D_S — кинематическая вязкость, коэффициент температуропроводности жидкости, коэффициент диффузии, коэффициент диффузии соли. Заметим, что линейная зависимость плотности учтена только в слагаемом, описывающем подъемную силу. Это приближение будет справедливо, если вертикальное ускорение будет мало по сравнению с ускорением силы тяжести.

Приведем систему уравнений к безразмерному виду, выбирая в качестве характерного масштаба время вязкой диссипации:

$$t^* = \frac{L^2}{\nu_0}, \quad v^* = \frac{L}{t^*} = \frac{\nu_0}{L}, \quad p^* = \rho_0 v^{*2} = \frac{\rho_0\nu_0^2}{L^2},$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T},$$

где t^*, v^* и p^* — характерные время, скорость и давление; θ — безразмерное возмущение температуры; ΔT — перепад температуры; L — характерный размер области. Учитывая, что жидкость линейно стратифицированная по высоте, уравнения естественной конвекции можно представить в виде:

$$\nabla\vec{v'} = 0,$$
$$\frac{\partial\vec{v'}}{\partial t'} + (\vec{v'}\nabla)\vec{v'} = -\nabla p' + \nu_0\triangle\vec{v'} +$$
$$+ \left(\mathrm{Gr}_T\cdot\theta + \mathrm{Gr}_C\cdot C' + \frac{S'}{\mathrm{Fr}^2}\cdot\frac{L}{\Lambda_S}\right)\cdot\vec{e},$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial t'} + \vec{v'}\nabla\theta = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\triangle\theta,$$
$$\frac{\partial C'}{\partial t} + \nabla(C'\vec{v'}) = \frac{1}{\mathrm{Sc}}\triangle C',$$
$$\frac{\partial S'}{\partial t'} + \nabla(S'\vec{v'}) = \frac{1}{\mathrm{Sc}_S}\triangle S' + v\frac{L}{\Lambda_S}\cdot\vec{e},$$

где $\vec{v}'$ — безразмерное возмущение вектора скорости жидкости; t' — безразмерное время; p' — безразмерное возмущение давления; C' — безразмерное возмущение концентрации; S' — безразмерное возмущение солености; $\vec{e} = (0; 0; -1)$. Параметры подобия: число Прандтля — $\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu_0}{\chi_0}$, число Шмидта — $\mathrm{Sc} = \dfrac{\nu_0}{D_0}$, солевое число Шмидта — $\mathrm{Sc}_S = \dfrac{\nu_0}{D_S}$, число Фруда — $\mathrm{Fr} = \dfrac{\nu_0^2}{gL}$, число Грасгофа — $\mathrm{Gr}_T = \dfrac{g\,\beta_T\,\Delta T\,L^3}{\nu_0^2}$ и концентрационное число Грасгофа — $\mathrm{Gr}_C = \dfrac{g\,\beta_C\,\Delta C\,L^3}{\nu_0^2}$ (ΔC — перепад концентрации).

Полагалось, что в начальный момент времени жидкость находилась в состоянии покоя и была линейно стратифицированная, тогда начальные условия запишутся в виде:

$$\vec{v'}\Big|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{t=0} = 0,$$

$$S'|_{t=0} = 1 - z\frac{L}{\Lambda_S}, \quad C'|_{t=0} = 0.$$

Для концентрации и солености использовались условия отсутствия потока через границу. Для компонент вектора скорости на всех границах предполагались условия прилипания ($\vec{v}' = 0$). Для температуры на не изотермических стенках задавались условия бесконечной теплопроводности, изотермические границы считались теплоизолированными.

3. Численный метод и тесты

Система уравнения естественной конвекции интегрировалась численно методом контрольного объёма и с использованием процедуры «simple» [2], аппроксимация нестационарного члена проводилась с использованием неявной трёхслойной схемы второго порядка [3]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1} = \frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Для ускорения расчётов применялись методы параллельного программирования OpenMP [4]. Результаты вычислений сравнивались с опубликованными эталонными данными на таких задачах, как естественная конвекция вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости с вязкостью при подогреве сбоку и снизу (табл. 1 и 2). Приведённые данные показывают, что программа моделирования естественно-конвективных течений ньютоновской жидкости даёт достаточно адекватные и достоверные для решения поставленной задачи. В табл. 1 представлены результаты вычислений чисел Нуссельта на подогреваемой границе для четырёх значений числа Рэлея ($\mathrm{Ra} = 10^3; 10^4; 10^5; 10^6$). В табл. 2 представлены результаты вычислений максимальных компонент скорости в средних сечениях ячейки, числа Нуссельта на подогреваемой границе и в среднем вертикальном сечении ячейки, и максимальное и минимальное числа Нуссельта на подогреваемой границе ячейки. Сходимость используемого метода и расчётной схемы представлена в работах [7–9].

Таблица 1. Сравнение результатов расчетов с работой [5], сетка 101×101

Ra	$\mathrm{Nu_H}$ [5]	$\mathrm{Nu_H}$
10^3	1.0004	1.0000
10^4	2.1581	2.1657
10^5	3.9103	3.9371
10^6	6.3092	6.3102

Таблица 2. Сравнение результатов расчетов с работой [6], $\mathrm{Ra} = 10^4$

	40×40	80×80	160×160	[5]
$u^{\max}_{(0.5,y)}$	16,112	16,113	16,119	16,183
y	0,825	0,825	0,825	0,823
$v^{\max}_{(x,0.5)}$	19,777	19,771	19,770	19,629
x	0,125	0,125	0,125	0,119
Nu_0	2,250	2,251	2,252	2,245
$\mathrm{Nu}_{1/2}$	2,250	2,251	2,252	2,245
$\mathrm{Nu}_{\max}$	3,5109	3,5119	3,5180	3,5138
y	0,15	0,15	0,144	0,144
$\mathrm{Nu}_{\min}$	0,579	0,579	0,579	0,585
y	1	1	1	1

4. Результаты моделирования

Для исследования механизма образования периодических структур в стратифицированных неоднородных средах и выявления области параметров существования слоистого режима конвективного течения поставленная задача решалась в различных областях. Так, например, в кубической области для набора параметров задачи $\mathrm{Gr}_T = 100$, $\mathrm{Fr} = 0.01$ и масштаба стратификации равного $\Lambda = 56$, режим слоистого течения представлен на рис. 1. Увеличение высоты рассматриваемой области задачи при том же наборе безразмерных комплексов задачи приводит к аналогичному режиму течения (рис. 2). Отметим, что при небольших значениях числа Грасгофа наблюдается слоистая структура течения, которая с увеличением числа Грасгофа при остальных неизменных параметрах задачи теряет свою устойчивость, и в кубической области преобладает глобальное вихревое течение.

Сущность явления образования послойной структуры заключается в том, что при наличии начальной неоднородности текучей среды в виде вертикального градиента плотности, при свободной конвекции, под действием градиента температуры, у вертикальной нагретой стенки движение любой частицы происходит до выравнивания её плотности с плотностью частиц, находящихся на определённой высоте столба среды, где уже происходит переход к горизонтальному движению, далее с течением времени происходит установление развитого течения в виде многоконтурных слоев. По мере выравнивания плотностей в слоях, слои объединяются вплоть до образования единого контура по всей области замкнутой текучей среды.

5. Заключение

Проведено моделирование естественно-конвективного течения неоднородной стратифицированной по высоте жидкости. Предложена математическая модель, наиболее полно описывающая учёт влияния различных теплофизических

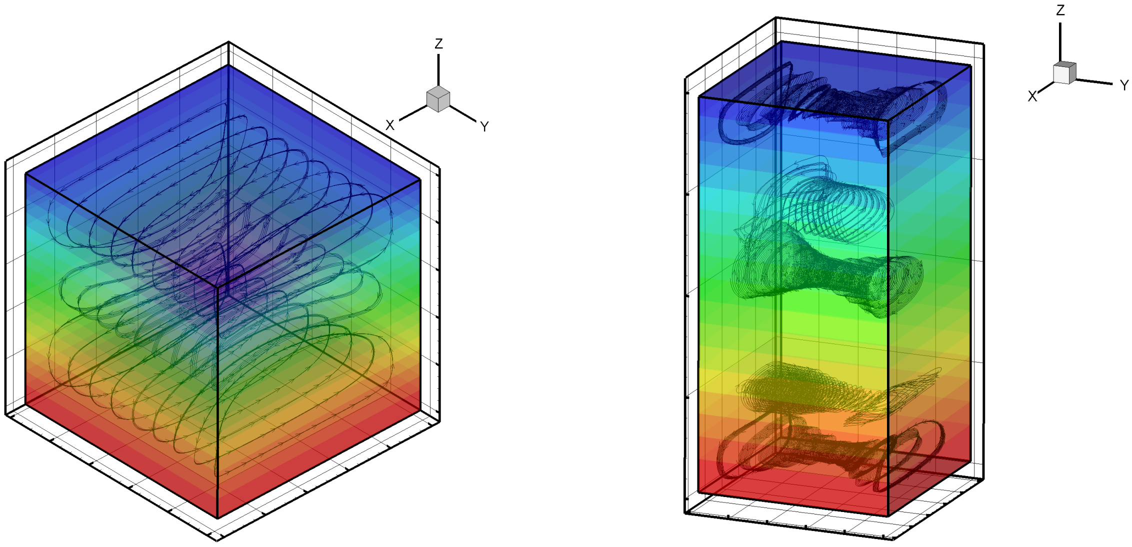

Рис. 1. Вихревая структура и поле солености $\mathrm{Gr}_T = 100, \mathrm{Fr} = 0.01, \Lambda = 56$: а) в кубической области $1 \times 1 \times 1$; б) в области $1 \times 1 \times 2$

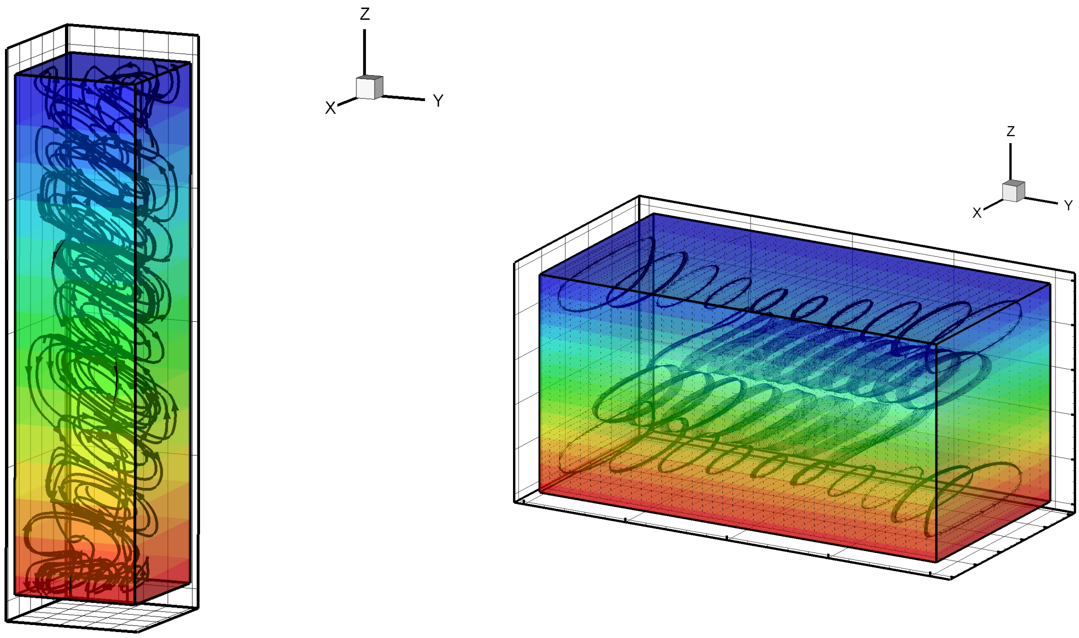

Рис. 2. Вихревая структура и поле солености $\mathrm{Gr}_T = 100, \mathrm{Fr} = 0.01, \Lambda = 56$: а) в области $1 \times 1 \times 4$; б) в области $1 \times 2 \times 1$

факторов, таких, как неоднородные свойства среды, зависимость коэффициентов от параметров состояния. Разработанный программный код позволяет проводить вычислительные эксперименты, обобщает широкий класс существующих экспериментальных данных и позволяет подобрать соотношения параметров для новых экспериментов. Так, при определённом соотношении параметров задачи, было обнаружено существование режима течения с инверсией плотности, когда жидкость с высокой плотностью оказывается вверху, в то время, как силовое поле направлено вниз, экспериментально данный режим ещё не описан.

Список литературы

[1] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

[2] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.

[3] Ferzinger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamis. Springer, 3ed, 2001. 431 p.

[4] Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. М.: МГУ, 2009. 77 с.

[5] Ouertatani N., Ben Cheikh N., Ben Beya B., Lili T. Numerical simulation of two-dimensional Rayleigh-Benard convection in an enclosure // Comptes Rendus. 2008. V. 336. № 5. P. 464–470.

[6] Quere P.Le, Alziary T. De Roquefort. Computation of natural convection in two dimensional cavities with Cheby-shev polynomials // J. Comput. Phys. 1985. V. 57, № 2. P. 210–228.

[7] Ильясов А.М., Моисеев К.В., Урманчеев С.Ф. Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. VIII, № 4 (24). С. 51–59.

[8] Моисеева Е.Ф., Малышев В.Л., Моисеев К.В., Урманчеев С.Ф. Влияние способа подвода тепла на характер течения при конвекции Рэлея-Бенара // Вестник УГАТУ. 2011. Т. 15, № 4 (44). С. 154–158.

[9] Кулешов В.С., Моисеев К.В. Численное моделирование конвективных течений аномально термовязкой жидкости // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20, № 2 (72). С. 74–80.

Stratified flow with natural convection weakly stratified fluid

Moiseev K.V.[*,**]

[*] Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa
[**] Ufa State Petroleum Technological University, Ufa

In work on the basis of a mathematical model based on a linear approximation, we study the formation of the layered flows with natural convection, poorly stratified inhomogeneous liquid. The regions of the parameters under which a layered structure of the flow-cell in a side heating.

Keywords: convection, laminar flow, stratified fluid, heterogeneous liquid