

Расчет собственных частот и осредненных упругих характеристик композиционной рабочей лопатки осевого компрессора

Филиппов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе приведены результаты численных расчетов собственных частот композиционной рабочей лопатки осевого компрессора авиационного газотурбинного двигателя. Показан способ решения задачи упругой деформации ячейки периодичности, возникающей при приложении метода асимптотического осреднения к задачам упругого деформирования композиционных конструкций с регулярной микроструктурой. Приведены значения компонент эффективной матрицы упругости материала композиционной лопатки, полученные методом асимптотического осреднения.

Ключевые слова: композиционный материал, собственные частоты, метод асимптотического осреднения, локальные задачи на ячейке периодичности

1. Введение

В ходе работы двигателя лопатки компрессора испытывают воздействие динамических нагрузок. Эти динамические нагрузки имеют место и на установившихся режимах работы двигателя из-за неоднородности потока, набегающего на рабочие лопатки, поскольку неподвижные лопатки спрямляющего аппарата способны создавать пульсирующие воздействия на лопатки рабочего колеса, расположенного непосредственно за спрямляющим аппаратом. Наиболее опасным считается случай, когда динамическое воздействие на рабочую лопатку включает гармонику близкую (или совпадающую) к собственной частоте этой лопатки. Поэтому вопрос определения прочности лопатки тесно связан с вопросом определения собственных частот рабочих лопаток.

2. Постановка задачи

Исследуемая композиционная рабочая лопатка армирована непрерывными борными и углеродными волокнами с магниевым сплавом в качестве связующего. Лопатку можно условно разделить на три области. Первая область — хвостовик типа «ласточкин хвост», армированный борными волокнами

поперек оси хвостовика, чтобы воспринимать сжимающие усилия, возникающие при взаимодействии с пазом диска. Вторая область — перо лопатки, армированное вдоль своей высоты углеродными волокнами. Коэффициент объемного содержания волокон в каждой из этих областей предполагался равным 0.3. Последняя область — часть хвостовика, находящаяся непосредственно «под» пером лопатки. Эта область хвостовика помимо борных волокон дополнительно армирована углеродными волокнами, выходящими из пера. Структура армирования этой области предполагалась продольно-поперечной. Во всех трех областях предполагалось, что армирующие компоненты распределены в связующем регулярным образом, и более того, структура каждой области может быть описана ячейкой периодичности (ЯП) в форме прямоугольного параллелепипеда. Эти ЯП приведены на рис. 1–3.

Декартовые системы координат, в которых рассматриваются ЯП, подобраны таким образом, чтобы координатные плоскости были параллельны граням ЯП, а координатные оси — волокнам. В первых двух ЯП ось Y совпадает с осью волокна, в третьей ЯП ось Y совпадает с осью борного волокна, а ось X параллельна рядам углеродных волокон.

Упругие характеристики компонентов приведены в табл. 1

Таблица 1. Физико-механические свойства компонентов КМ

Компоненты	модуль Юнга, ГПа	к-т Пуассона	Плотность, кг/м ³
Магниевый сплав	44	0.28	2000
Углеродное волокно	300	0.2	1800
Борное волокно	400	0.25	2500

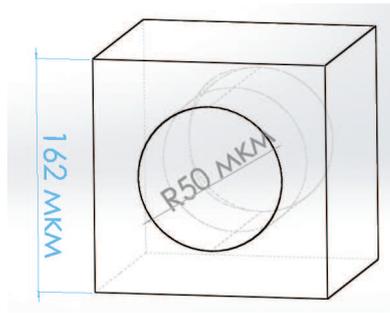


Рис. 1. Ячейка периодичности первой области

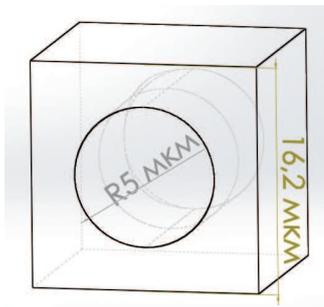


Рис. 2. Ячейка периодичности второй области

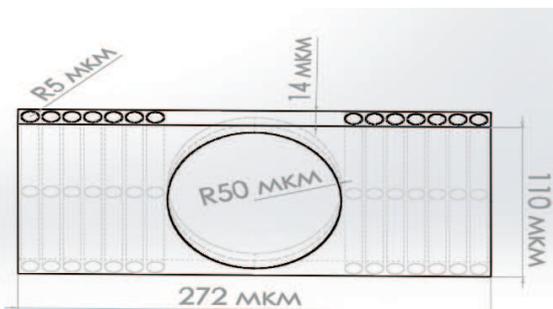


Рис. 3. Ячейка периодичности третьей области

Поперечные размеры волокон настолько малы по сравнению с размерами лопадки, что невозможно построить твердотельную и конечноэлементную модель конструкции, совпадающие с реальной микроструктурой, поскольку для этого требуется большое количество структурных и конечных элементов. Поэтому, для того чтобы получить гармоническое решение динамической задачи упругого деформирования конструкции из композиционных материалов (КМ) необходимо определить его макроскопические упругие характеристики. Такой подход позволяет заменить исходный неоднородный материал на эквивалентный ему однородный материал, и при этом необходимо, чтобы полученное решение достаточно хорошо описывало напряженно-деформированное состояние исходной конструкции.

Упругие характеристики эквивалентного однородного материала были получены методом асимптотического осреднения [1–4].

2.1. Краткое описание метода асимптотического осреднения

В работе [3] показано, что макроскопические упругие свойства КМ, получаемые методом асимптотического осреднения (МАО), не зависят от типа рассматриваемой задачи (стационарная или нестационарная). Поэтому, далее будет приведено описание МАО для стационарной задачи упругого деформирования.

В МАО стационарная задача упругого деформирования области Ω , материал которой имеет периодическую микроструктуру, задается следующей системой уравнений [1, 2, 4]:

$$\begin{cases} \left(C_{ijkl} \left(\frac{x}{\epsilon} \right) u_{k,l}(x) \right)_{,j} + f_i(x) = 0, \\ u(x) \Big|_{\partial\Omega_u} = u^0(x), \\ C_{ijkl} \left(\frac{x}{\epsilon} \right) u_{k,l}(x) n_j(x) \Big|_{\partial\Omega_t} = t_i^0(x), \end{cases} \quad (1)$$

где $C \left(\frac{x}{\epsilon} \right)$ — тензор упругости; $u(x)$ — неизвестная функция перемещений; f — объемная сила; $u^0(x)$ — перемещения, заданные на части границы области $\partial\Omega_u$; $t^0(x)$ — поверхностные силы, заданные на части границы области $\partial\Omega_t$; $n_j(x)$ — внеш-

няя нормаль к границе области Ω ; ϵ — параметр, характеризующий размер ЯП. Нижний индекс после запятой означает производную по соответствующей пространственной координате.

Для простоты можно считать, что ЯП имеет форму куба со стороной равной ϵ . В этом случае тензор упругости $C(y)$ является 1-периодической функцией по каждой пространственной переменной, где $y = \frac{x}{\epsilon}$ (x называют медленной переменной, а y — быстрой переменной).

Решение системы (1) должно удовлетворять условиям непрерывности:

$$\begin{cases} [u(x)] = 0, \\ [\sigma]n = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}$ — компоненты тензора напряжений, а функции в квадратных скобках означают разность значения функций по разные стороны от межфазной границы (МГ). Согласно МАО решение системы (1) ищется в виде $u(x) = u^\epsilon(x, y)|_{y=\frac{x}{\epsilon}}$, где функция $u^\epsilon(x, y)$ имеет вид степенного ряда по ϵ :

$$u^\epsilon(x, y) = u^{(0)}(x, y) + \epsilon^1 u^{(1)}(x, y) + \epsilon^2 u^{(2)}(x, y) + \dots \quad (3)$$

Все функции $u^{(i)}(x, y)$ являются периодическими функциями по каждой компоненте быстрой переменной y .

В нулевом приближении метода асимптотического осреднения ограничиваются первыми двумя членами ряда (3).

Основные уравнения метода асимптотического осреднения получаются подстановкой (3) в систему (1) и условия (2), при этом необходимо учитывать правило дифференцирования функций, зависящих как от медленных, так и от быстрых переменных

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4)$$

путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ϵ слева и справа от знака равенства.

Из полученных соотношений следует, что функция $u^{(0)}$ не зависит от быстрых переменных, т.е. $u^{(0)} = u^{(0)}(x)$, и удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(C_{ijkl}^{\text{eff}} u_{k,l}^{(0)}(x) \right)_{,j} + f_i(x) = 0, \\ u^{(0)}(x) \Big|_{\partial\Omega_u} = u^0(x), \\ C_{ijkl}^{\text{eff}} u_{k,l}^{(0)}(x) n_j(x) \Big|_{\partial\Omega_t} = t^0(x), \end{cases} \quad (5)$$

практически идентичной системе (1). Отличие только в том, что вместо тензора $C(y)$ в системе фигурирует постоянный эффективный тензор упругости (ЭТУ) C^{eff} :

Система (5) называется осредненной системой, а функция $u^{(0)}(x)$ осредненными перемещениями.

Согласно [3] ЭТУ C^{eff} выражается как сумма осредненных по ЯП тензора упругости $C(y)$ и так называемых псевдонапряжений $\sigma\{\chi(y)\}$:

$$C_{ijkl}^{\text{eff}} = \langle C_{ijkl}(y) \rangle + \langle \sigma_{ij} \{ \chi^{(kl)}(y) \} \rangle, \quad (6)$$

где угловые скобки — это оператор осреднения по ЯП $\langle \dots \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \dots$, Y — область ЯП. В формуле (6) введен дифференциальный оператор $\sigma_{ij} \{ \dots \} = C_{ijkl}(y) \frac{\partial_k}{\partial y_l}$.

Неизвестный набор так называемых функций псевдоперемещений $\chi^{(ab)}(y)$ является решением локальных задач на ЯП [3, 5].

$$X[\chi^{(ab)}] =$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij|j} \{ \chi^{(ab)}(y) \} = -C_{ijab|j}(y), & (a) \\ \chi^{(ab)} \Big|_{Y^+} = \chi^{(ab)} \Big|_{Y^-}, & (б) \\ \sigma \{ \chi^{(ab)} \} \cdot n \Big|_{Y^+} = -\sigma \{ \chi^{(ab)} \} \cdot n \Big|_{Y^-}, & (в) \\ [\chi^{(ab)}(y)] = 0, & (г) \\ [\sigma_{ij} \{ \chi^{(ab)}(y) \}] n_j = -[C_{ijab}(y)] n_j. & (д) \end{cases} \quad (7)$$

Индекс после вертикальной черты означает взятие производной по соответствующей компоненте быстрой переменной y .

Условия (7-б) и (7-в) — обозначение для условия периодичности функции $\chi^{(ab)}(y)$ и антисимметричности поверхностных сил, действующих на боковые грани ЯП по каждой компоненте y_i . Последние два условия вытекают из условий непрерывности (2). Из них следует, что функция псевдоперемещений непрерывна, а псевдонапряжения претерпевают скачок при пересечении границы между различными компонентами материала.

2.2. Метод решения локальных задач на ячейке периодичности

Существующие подходы решения локальных задач [2, 5, 6] делают дополнительные предположения о структуре ЯП. В частности, предполагают ее симметричность относительно координатных плоскостей, а также предполагают изотропность всех компонентов КМ. В данной работе такого предположения делаться не будет.

Сначала заметим, что если все компоненты КМ однородны, то условия (7-а) и (7-д) предполагают наличие обобщенной силы [6]. Под обобщенной силой можно понимать поверхностную силу (8), распределенную по поверхности волокон на границе контакта волокно — матрица:

$$t_i^{(ab)} = (C_{ijab}^m - C_{ijab}^b) n_j, \quad (8)$$

где $t^{(ab)}$ — поверхностная сила; C_{ijab}^m — компоненты тензора упругости матрицы; C_{ijab}^b — компоненты тензора упругости волокна.

Чтобы это показать, можно рассмотреть равновесие бесконечно малого элемента в форме прямоугольной пластины, нейтральная плоскость которой проходит через бесконечно малый кусочек границы (в форме плоского квадрата). Предположим, что толщина значительно меньше других размеров пластины, тогда объемными силами и поверхностными силами, распределенными на боковых гранях пластины, можно пренебречь. Оставшиеся поверхностные силы распределены на верхней (относительно нейтральной плоскости) ($t^+ = \sigma^+ \cdot n^+$), нижней ($t^- = \sigma^- \cdot n^-$) и нейтральной плоскости пластины (t^0). Беря их векторную сумму, приравнявая ее к нулю, и учитывая, что $n^- = -n^+$, получается, что величина $(\sigma^- - \sigma^+) \cdot n^+ = [\sigma] \cdot n^+$ равна поверхностной силе t^0 .

Можно показать, что условие (7-а) эквивалентно условию (7-д). Рассмотрим ту же самую бесконечно малую пластину, проходящую через межфазную границу, и проинтегрируем по ней уравнение (7-а), потребовав необходимой гладкости от подынтегральных функций, чтобы применить теорему Остроградского–Гаусса. Получим, что для напряжений на верхней и нижней гранях пластины справедливо равенство

$$\left(\sigma_{ij}^{(ab)+} - \sigma_{ij}^{(ab)-} \right) n_j^+ = - \left(C_{ijab}^+ - C_{ijab}^- \right) n_j^+.$$

Используя аргументы, как в предыдущем обосновании, и устремив толщину пластины к нулю, получим условие разрыва (7-д).

Таким образом, численное решение локальных задач (7) можно получить, решив следующую задачу упругого деформирования ЯП:

- на части поверхности волокон, соприкасающейся с матрицей, приложить поверхностную силу, распределенную по закону (8);
- связать степени свободы узлов, лежащих на противоположных гранях.

Осталось проверить выполнение условия антисимметричности (7-в). Для этого заметим, что, как установлено в работе [7], численное решение задачи

упругого деформирования ЯП методом конечного элемента без массовых сил и с унифицированными периодическими условиями вида

$$\chi_i^{(ab)} \Big|_{Y^+} - \chi_i^{(ab)} \Big|_{Y^-} = \bar{\epsilon}_{ik} \left(y_k \Big|_{Y^+} - y_k \Big|_{Y^-} \right)$$

автоматически удовлетворяет условиям антисимметричности (7-в). Здесь $\bar{\epsilon}$ — тензор осредненной деформации ЯП.

Рассмотрим функцию $\chi_k^{(ab)[1]} = \chi_k^{(ab)} + I_{ab}^{kl} y_l$, где $I_{ab}^{kl} = \frac{1}{2} (\delta_{ak} \delta_{bl} + \delta_{al} \delta_{bk})$ — единичный тензор 4-го порядка. И заметим, что при подстановке вектор-функции $\phi_k = -I_{ab}^{kl} y_l$ в систему $X[\phi]$ удовлетворяются все условия, кроме условия периодичности (7-б). Нетрудно показать, что $\chi^{(ab)[1]}$ удовлетворяет унифицированным периодическим условиям и уравнению равновесия без массовых сил. Следовательно, $\chi^{(ab)[1]}$ удовлетворяет условию антисимметричности (7-в), также, как и функция $I_{ab}^{kl} y_l$. Значит и функция $\chi^{(ab)} = \chi^{(ab)[1]} - I_{ab}^{kl} y_l$ удовлетворяет условию антисимметричности (7-в).

Далее по формуле (6) были вычислены эффективные тензоры упругости для каждой области рабочей лопатки. Полученные значения в форме эффективных матриц упругости (ЭМУ) приведены в табл. 2.

На рис. 4–6 приведены графики зависимости компонент эффективных матриц упругости для третьей ЯП (S^3) от густоты конечно-элементной сетки, на которой определялось численное решение локальных задач на ЯП. Также на графиках отображены границы диапазона допустимых значений для соответствующих компонент матриц упругости [8]. Как видно из приведенных графиков, все компоненты (при достаточной густоте сетки) попадают в теоретический диапазон допустимых значений. Аналогичные результаты получаются и для компонент ЭМУ материала с первой и второй ЯП.

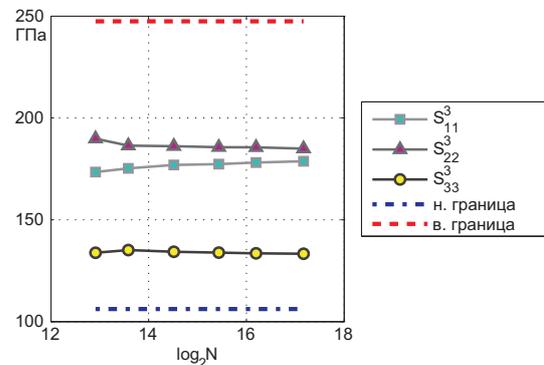


Рис. 4. Графики зависимости компонент ЭМУ (S_{11} , S_{22} , S_{33}) от густоты расчетной сетки

Таблица 2. Эффективные матрицы упругости первой, второй и третьей областей

$$S^1 = \begin{pmatrix} 8.605 \cdot 10^{10} & 3.110 \cdot 10^{10} & 2.962 \cdot 10^{10} & 2.705 \cdot 10^4 & 1.693 \cdot 10^4 & 1.549 \cdot 10^5 \\ 3.110 \cdot 10^{10} & 1.675 \cdot 10^{11} & 3.110 \cdot 10^{10} & 8.559 \cdot 10^3 & 5.084 \cdot 10^3 & 1.031 \cdot 10^2 \\ 2.962 \cdot 10^{10} & 3.110 \cdot 10^{10} & 8.605 \cdot 10^{10} & 9.469 \cdot 10^3 & 4.625 \cdot 10^3 & -1.544 \cdot 10^5 \\ 2.705 \cdot 10^4 & 8.559 \cdot 10^3 & 9.469 \cdot 10^3 & 2.819 \cdot 10^{10} & 3.545 \cdot 10^4 & 2.622 \cdot 10^4 \\ 1.693 \cdot 10^4 & 5.084 \cdot 10^3 & 4.625 \cdot 10^3 & 3.545 \cdot 10^4 & 2.819 \cdot 10^{10} & -8.010 \cdot 10^3 \\ 1.549 \cdot 10^5 & 1.031E \cdot 10^2 & -1.544 \cdot 10^5 & 2.622 \cdot 10^4 & -8.010 \cdot 10^3 & 2.477 \cdot 10^{10} \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 8.279 \cdot 10^{10} & 2.782 \cdot 10^{10} & 2.807 \cdot 10^{10} & -1.085 \cdot 10^4 & -1.340 \cdot 10^4 & 1.771 \cdot 10^5 \\ 2.782 \cdot 10^{10} & 1.348 \cdot 10^{11} & 2.782 \cdot 10^{10} & 3.572 \cdot 10^3 & -2.017 \cdot 10^3 & 3.429 \cdot 10^4 \\ 2.807 \cdot 10^{10} & 2.782 \cdot 10^{10} & 8.279 \cdot 10^{10} & 3.075 \cdot 10^4 & 2.399 \cdot 10^3 & 1.180 \cdot 10^4 \\ -1.085 \cdot 10^4 & 3.572 \cdot 10^3 & 3.075 \cdot 10^4 & 2.734 \cdot 10^{10} & 2.159 \cdot 10^4 & -1.057 \cdot 10^4 \\ -1.340 \cdot 10^4 & -2.017 \cdot 10^3 & 2.399 \cdot 10^3 & 2.159 \cdot 10^4 & 2.734 \cdot 10^{10} & 1.957 \cdot 10^4 \\ 1.771 \cdot 10^5 & 3.429 \cdot 10^4 & 1.180 \cdot 10^4 & -1.057 \cdot 10^4 & 1.957 \cdot 10^4 & 2.435 \cdot 10^{10} \end{pmatrix}$$

$$S^3 = \begin{pmatrix} 1.788 \cdot 10^{11} & 4.220 \cdot 10^{10} & 3.967 \cdot 10^{10} & -6.502 \cdot 10^4 & 1.242 \cdot 10^5 & 1.261 \cdot 10^6 \\ 4.220 \cdot 10^{10} & 1.850 \cdot 10^{11} & 3.934 \cdot 10^{10} & -7.884 \cdot 10^4 & 5.162 \cdot 10^4 & 9.943 \cdot 10^4 \\ 3.967 \cdot 10^{10} & 3.934 \cdot 10^{10} & 1.333 \cdot 10^{11} & 1.995 \cdot 10^5 & 8.245 \cdot 10^5 & -7.354 \cdot 10^5 \\ -6.502 \cdot 10^4 & -7.884 \cdot 10^4 & 1.995 \cdot 10^5 & 4.511 \cdot 10^{10} & 1.663 \cdot 10^5 & -9.209 \cdot 10^5 \\ 1.242 \cdot 10^5 & 5.162 \cdot 10^4 & 8.245 \cdot 10^5 & 1.663 \cdot 10^5 & 3.842 \cdot 10^{10} & 3.505 \cdot 10^5 \\ 1.261 \cdot 10^6 & 9.943 \cdot 10^4 & -7.354 \cdot 10^5 & -9.209 \cdot 10^5 & 3.505 \cdot 10^5 & 4.314 \cdot 10^{10} \end{pmatrix}$$

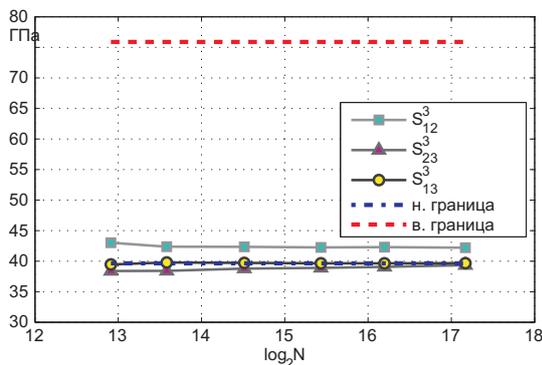


Рис. 5. Графики зависимости компонент ЭМУ (\$S_{12}\$, \$S_{23}\$, \$S_{13}\$) от густоты расчетной сетки

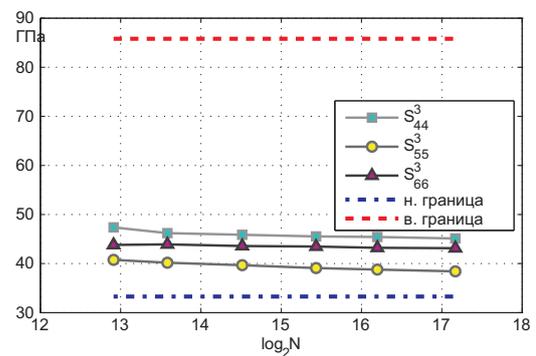


Рис. 6. Графики зависимости компонент ЭМУ (\$S_{44}\$, \$S_{55}\$, \$S_{66}\$) от густоты расчетной сетки

3. Расчет собственных частот композиционной рабочей лопатки

Уравнение свободных колебаний в матричной форме может быть записано в виде [9]:

$$M \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + K \mathbf{u} = 0, \quad (9)$$

где M и K — матрицы масс и жесткости системы соответственно; \mathbf{u} — вектор узловых перемещений. Гармоническое решение этого уравнения ищется в виде $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}^0(x) e^{i(\omega t - \varphi_0)}$, где $u^0(x)$ — амплитуды свободных колебаний; ω — собственные частоты;

φ_0 — фазовый сдвиг.

Материал в каждой области лопатки предполагался однородным. Материал всех конечных элементов «ориентировался» согласно локальному расположению волокон в этом элементе.

Первые четыре собственных частоты лопатки приведены в табл. 3. В табл. 4 приведены собственные частоты для лопатки находящейся изначально в напряженном состоянии из-за действия центробежных и газодинамических сил.

4. Заключение

Численно определены первые четыре собственные частоты композиционной рабочей лопатки для

Таблица 3. Собственные частоты

№	Форма колебаний	Частоты, Гц
1	1-ая изгибная	196.11
2	1-ая крутильная	781.63
3	2-ая крутильная	892.93
4	2-ая изгибная	1876.7

Таблица 4. Собственные частоты преднапряженной лопатки

№	Форма колебаний	Частоты, Гц
1	1-ая изгибная	311.49
2	1-ая крутильная	860.52
3	2-ая крутильная	998.39
4	2-ая изгибная	1960.9

двух вариантов первоначальных напряженных состояний лопатки. Как видно из результатов, первая собственная частота преднапряженной лопатки превышает более чем в полтора раза первую собственную частоту лопатки, свободной от действия инерционных и газодинамических сил.

Структура армирования лопатки предполагала наличие трех областей, микроструктура которых характеризуется своей ячейкой периодичности. Для каждой из этих областей были определены эффективные упругие свойства материала в форме матриц упругости, которые определялись с помощью метода асимптотического осреднения. Представленный в работе способ численного решения локальных задач на ячейке периодичности, возникающих при приложении метода асимптотического осреднения, не требует дополнительных предположений о структуре ячеек периодичности, материале волокон и связующего.

Список литературы

- [1] Победря Б.Е. Механика композитных материалов М.: МГУ, 1986. 336 с.
- [2] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
- [3] Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Редактура УРСС, 2003. 376 с.
- [4] Pavliotis G.A., Stuart A.M. Multiscale Methods: Averaging and Homogenization. Springer, 2008. 310 p.
- [5] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов : учеб. пособие. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. 66 с.
- [6] Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 341 с.
- [7] Xia Z. , Zhou C., Yong Q., Wang X. On selection of repeated unit cell model and application of unifeid periodic boundary conditions in micro-mechanical analysis of composites // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, Issue 2. P. 266–278.
- [8] Zohdi T.I., Wriggers P. Introduction to Computational Micromechanics. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer. Berlin. 2005. Vol. 20. 195 p.
- [9] Garinis D., Dimulovic M., Rasuo B. Dynamic Analysis of Modified Composite Helicopter Blade // FME Transactions. 2012. Vol. 40, No 2. P. 63–68.

Calculation of natural frequencies and effective elastic properties of the axial compressor rotor blade

Filippov A.A.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

The results of the numerical calculations of the natural frequencies of the composite rotor blade axial compressor of aircraft gas turbine engine. Shows the way of solving of a unit cell problem arising in the application of asymptotic homogenization method to elastic deformation of regular composite structures. Components of the effective stiffness matrix of the composite blade obtained by asymptotic homogenization.

Keywords: composite material, natural frequencies, asymptotic homogenization method, unit cell problem

