

Параметрический анализ статического изгиба трубопровода¹

Юлмухаметов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Рассматриваются прямая и обратная задачи об изгибе трубопровода под действием собственного веса, а также транспортируемой жидкости. Учитываются влияния внутреннего перепада давления и скорости движения транспортируемой жидкости на изгиб. Влияние точек жесткого закрепления конструкции «трубопровод–емкость» на прогиб также учитывается. Обратная задача состоит в определении относительной жесткости распределенных опор при приборном определении прогиба трубопровода или деформации его крайних волокон. Для этого применяется способ догружения трубопровода известной сосредоточенной силой и соответствующего приборного определения прогиба или деформации. В частности, догружение и соответствующие замеры осуществляются в средней точке пролета трубопровода.

Ключевые слова: трубопровод, транспортируемая среда, внутреннее давление, критическое значение давления, скорость транспортируемой жидкости

1. Постановка задачи

Трубопровод внутренним радиусом R , толщиной стенки h свободно провисает на участке длиной L (рис. 1). Так как задача симметричная, то начало продольной координаты x принимается в середине этого участка. На участках $-x_s < x < -L/2$ и $L/2 < x < x_s$ трубопровод закреплен конструкциями «трубопровод–емкость». Реакция распределенных опор моделируется деформацией системы упругих пружин. При прогибе $w(x)$ трубопровода со стороны системы пружин возникает распределенная сила равная $q_s w$, а при продольном перемещении $u(x)$ трубопровода — распределенная сила $t_s u$. Здесь через q_s и t_s обозначены жесткости системы пружин в поперечном и продольном направлениях.

Учитывается влияние давления транспортируемой жидкости на изгиб трубопровода [1, 2]. Экспериментальное изучение этого влияния содержится в работе [3]. Скорость движения жидкости также учитывается, т.е. рассматривается комбинация внутреннего давления и скорости $p_0 + \rho V^2$ [1]. При-

нимается допущение о повороте поперечного сечения так, что нормаль к осевой линии остается нормалью при изгибе. Рассматривается статический линейный изгиб трубопровода. Нелинейный изгиб изучается, например, в работах [4–6]. Первая из них посвящена анализу сильного изгиба пролета трубопровода при подъеме его сосредоточенной силой, а вторая — описанию изгиба сверхпроводящего кабеля, представляющего собой трубу с концентрическими слоями из разных материалов для прокачки жидкого азота. В [6] рассмотрен нелинейный изгиб двухслойного трубопровода с определяемой из решения задачи длиной пролета (модель укладки трубопровода на морское дно).

Приведенная модель широко используется для описания поведения трубопровода, провисающего над переходами через реки и овраги. Рассматриваемая расчетная схема справедлива и в случае трубопровода и грунта. Различные подходы в обратных задачах упругой деформации стержней, балок, пластин рассматриваются в работах [7–9]. Множество работ посвящено диагностике закреплений балок и пластин по значениям собственных частот их колебаний [8]. Метод догружения в задаче о продольной деформации штанговой колонны в сочетании с экспериментальным определением соответствующего упругого перемещения конца колонны приме-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-01-00740_а).

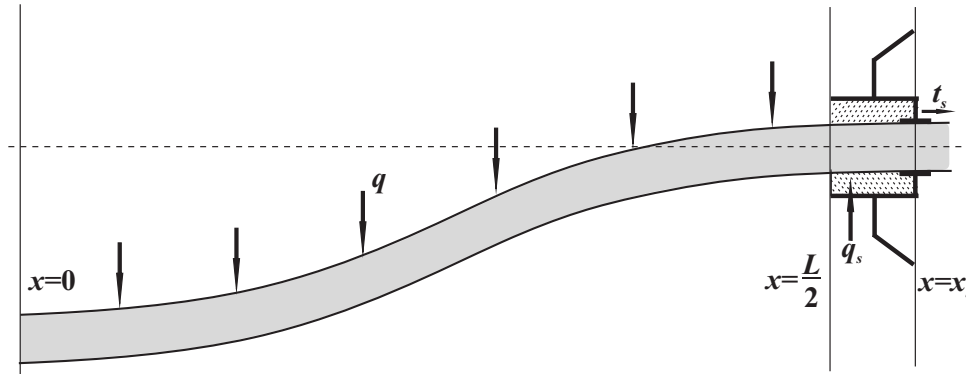


Рис. 1. Статический изгиб трубопровода

нен в [9].

В дальнейшем считаем, что давление на трубу со стороны распределенных опор, а также коэффициент t_s малы. Тогда линейное уравнение статического изгиба имеет вид [1, 2]:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \pi R^2 (1 - 2\nu)(p_0 + \rho V^2) \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right),$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \pi R^2 (1 - 2\nu)(p_0 + \rho V^2) \frac{d^2 w}{dx^2} + q_s w = q \quad \left(\frac{L}{2} \leq x \leq x_s\right).$$
(1)

2. Зависимость прогиба от жесткости опор и внутреннего давления

При вводе обозначений

$$\xi = \frac{x}{L}, \xi_s = \frac{x_s}{L}, \mu^2 = \frac{\pi R^2 (1 - 2\nu)(p_0 + \rho V^2)}{4L^2 d},$$

$$\beta^4 = \frac{q_s}{4d}, d = \frac{D}{L^4},$$
(2)

уравнение (1) запишется в виде

$$D \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \frac{q}{d} \quad \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right),$$

$$D \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 4\beta^4 w = \frac{q}{d} \quad \left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq \xi_s\right).$$
(3)

Граничные условия следующие:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\xi = 0),$$
(4)

$$w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} \quad \left(\xi = \frac{1}{2}\right),$$
(5)

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = \xi_s).$$
(6)

Решения уравнений (3) имеют вид:

$$w = C_1 + C_2 \xi + C_3 \cos 2\mu \xi + C_4 \sin 2\mu \xi +$$

$$+ \frac{q}{8d\mu^2} \xi^2 \quad \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right),$$

$$w = \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - \mu^2} \xi_1\right) \times$$

$$\times \left(C_5 \cos\left(-\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \xi_1\right) + C_6 \sin\left(-\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \xi_1\right)\right) +$$

$$+ \exp\sqrt{\beta^2 - \mu^2} \xi_1 \left(C_7 \cos\left(-\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \xi_1\right) + C_8 \sin\left(-\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \xi_1\right)\right) + \frac{q}{4\beta^4 d},$$

$$\xi_1 = \xi - \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq \xi_s\right).$$
(7)

Из уравнения (7) с учетом условий (4)–(6) определяем коэффициенты C_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$). Тогда решение задачи (3)–(6) представляет собой громоздкую функцию $w = w(\xi, \xi_s, \beta, \mu, d, q)$. Зависимость относительного прогиба $W = (d/q)w$ в точке $\xi = 0$ при $\xi_s = 3/4$ от относительной жесткости пружин для различных значений относительного внутреннего давления μ в случае нулевой скорости движения жидкости ($V = 0$) показана на рис. 2.

С увеличением относительной жесткости β пружин происходит уменьшение относительного прогиба, причем тем быстрее, чем меньше относительное внутреннее давление μ . С увеличением μ возрастает относительный прогиб W . Таким образом, внутреннее давление вызывает дополнительный изгиб трубопровода.

Рассмотрим случай, когда жидкость в трубопроводе движется, т.е. комбинацию давления и скорости движения жидкости $p_0 + \rho V^2$. Зависимость относительного прогиба $W = (d/q)w$ в точке $\xi = 0$

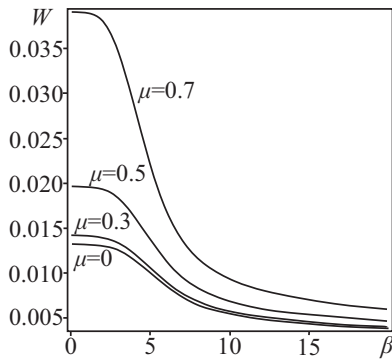


Рис. 2. Зависимость относительного прогиба W в середине ($\xi = 0$) пролета трубопровода от относительной жесткости пружин β

при $\xi_s = 3/4$ и $p_0 = 50$ бар, от относительной жесткости пружин для различных значений скорости V показана на рис. 3.

Из графика видно, что с увеличением относительной жесткости пружин происходит уменьшение относительного прогиба, причем тем быстрее, чем меньше скорость движения жидкости V . Следовательно, скорость движения жидкости вызывает дополнительный относительный прогиб трубопровода. На рис. 4 показана зависимость этого прогиба от скорости движения жидкости.

Прогиб, вызванный движением жидкости в трубе, может быть различным. Например, для стального нефтепровода длиной $L = 25$ м с внутренним диаметром 0.309 м и толщиной стенок 0.008 м при $p_0 = 50$ бар, $\rho = 900$ кг/м \cdot с 2 , $d \approx 51.27$ Па, $q_s \approx 2.06 \cdot 10^6$ Па ($\beta = 10$) прогиб, без учета скорости движения нефти, составляет ≈ 0.2286 м, а при скорости $V = 10$ м/с — 0.2316 м. Следовательно, для принятых данных вклад скорости движения на прогиб трубопровода составляет 1.3%. А если в предыдущем примере положить $p_0 = 5$ бар, то прогиб, без учета скорости движения нефти, составляет ≈ 0.1396 м, а при скорости $V = 10$ м/с — 0.1407 м, т.е. вклад скорости составляет 0.8%. Таким образом, можно утверждать, что с увеличением скорости движения жидкости происходит возрастание прогиба трубы, причем тем быстрее, чем выше внутреннее давление в трубопроводе. Из примера видно, что вклад внутреннего давления на прогиб намного значительнее. Значение относительного внутреннего давления, когда прогиб возрастает неограниченно, назовем критическим μ_{cr} . Оно определяется из уравнения $\Delta(\beta, \mu, \xi_s) = 0$. На рис. 5 приведена зависимость критического относительного внутреннего давления μ_{cr} от точки закрепления опор ξ_s при $\beta = 10$.

Заметим, что с увеличением расстояния от цен-

тра пролета трубопровода до точки закрепления жестких опор, т.е. с увеличением ξ_s , растет относительный прогиб трубопровода W . Такая зависимость показана на рис. 6 в случае, когда $\mu = 0$. Очевидно, что с уменьшением β при $\xi_s \rightarrow \infty$ прогиб будет возрастать неограниченно. Из рисунка видно, что при больших значениях относительной жесткости распределенных опор β ($\beta > 10$) прогиб трубопровода мало зависит от закрепления в точке ξ_s .

3. Определение реакции пружин на изгиб трубопровода

Используется способ догружения сосредоточенной силой Q в средней точке $\xi = 0$ и замеров соответствующего дополнительного прогиба или деформации в этой же точке. Такой метод в [8] называется обратной задачей Ильгамова.

Относительно прогиба w , вызванного силой Q , имеем уравнения

$$\begin{aligned} D \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} &= \frac{1}{2d} Q \sigma(\xi - 0) \\ &\left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \\ D \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 4\beta^4 w &= 0 \\ &\left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq \xi_s \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\sigma(\xi - 0)$ — дельта-функция. Граничные условия и условия сопряжения те же (4)–(6), но в них функция $w(\xi)$ означает дополнительный прогиб. Решения уравнений (8) имеют вид:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\mu^3 d} (-2\mu\xi (8d\mu^2 A - 2dB + Q) + \\ &+ 4d\mu C \cos 2\mu\xi + (2dB + Q) \sin 2\mu\xi - \\ &- 4d\mu (4D\mu^2 - C)) \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \\ w &= \exp(-\gamma_1 \xi_1) (C_1 \cos \gamma_3 \xi_1 + C_2 \sin \gamma_3 \xi_1) + \\ &+ \exp \gamma_1 \xi_1 (C_3 \cos \gamma_3 \xi_1 + C_4 \sin \gamma_3 \xi_1), \\ \xi_1 &= \xi - \frac{1}{2}, \quad \gamma_1^2 = \beta^2 - \mu^2, \gamma_3^2 = \beta^2 + \mu^2 \\ &\left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq \xi_s \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) с учетом условий (4)–(6) находим коэффициенты $C_1, C_2, C_3, C_4, A, B, C, D$.

В связи с тем, что определение параметра β по замеренным значениям прогиба или деформации трубы по выражениям (9) весьма затруднительно, рассмотрим более простой случай нулевого перепада давления ($\mu = 0$) и когда $\xi_s = 3/4$. Тогда решения (9) приобретают вид:

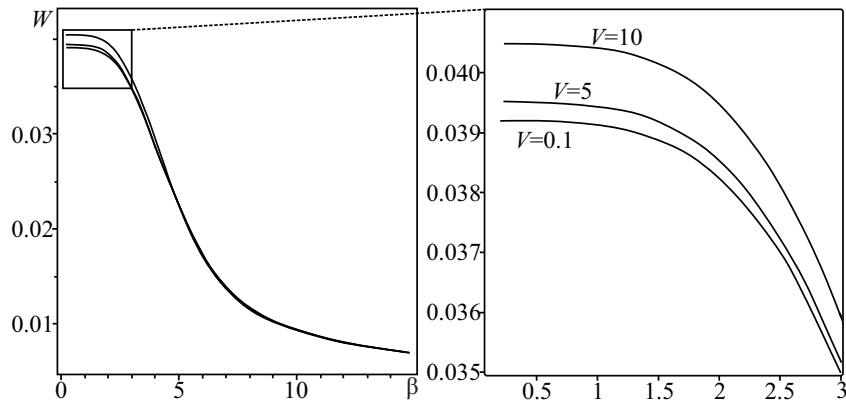


Рис. 3. Зависимость относительного прогиба W в середине ($\xi = 0$) пролета трубопровода от относительной жесткости пружин β при значениях скорости $V = 0.1, 5, 10$ м/с и внутреннего давления $p_0 = 50$ бар

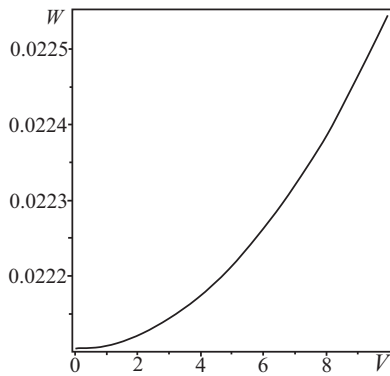


Рис. 4. Зависимость относительного прогиба W от скорости движения жидкости V

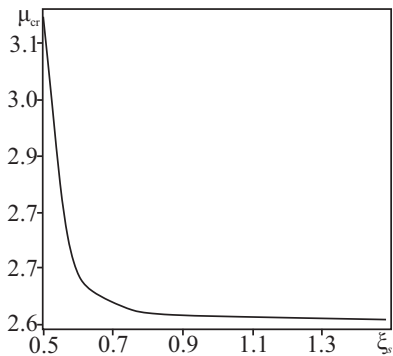


Рис. 5. Зависимость критического относительного внутреннего давления μ_{cr} от точки закрепления опор ξ_s

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{Q}{24d} \xi^3 + C_1 \xi^2 + C_2 \quad \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \\
 w &= (A \exp(-\beta \xi_1) + B \exp \beta \xi_1) \cos \beta \xi_1 + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - \frac{1}{2} \sin \frac{\beta}{2}) B + A \exp(-\frac{\beta}{2})}{\sin^2 \frac{\beta}{4}} \exp \beta \xi_1 - \right. \\
 &\left. - \frac{(1 + \sin \frac{\beta}{2}) A + B \exp \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{4}} \exp(-\beta \xi_1) \right) \sin \beta \xi_1 \\
 &\quad \left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq \xi_s \right),
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{Q}{32d\beta\delta} \left(2\beta^2 + 8 + (\beta - 2)^2 \exp(-\frac{\beta}{2}) + \right. \\
 &\left. + (\beta + 2)^2 \exp \frac{\beta}{2} + 8\beta \sin \frac{\beta}{2} + 2(\beta^2 - 4) \cos^2 \frac{\beta}{4} \right), \\
 C_2 &= \frac{Q}{384d\beta^3\delta} (2\beta^4 + 48\beta^2 - 288 + (\beta^4 - 8\beta^3 + \\
 &+ 24\beta^2 - 48\beta + 48) \exp(-\frac{\beta}{2}) + (\beta^4 + 8\beta^3 + 24\beta^2 + \\
 &+ 48\beta + 48) \exp \frac{\beta}{2} + 16\beta(\beta^2 - 6)^2 \sin \frac{\beta}{2} + 4(\beta^4 - \\
 &- 24\beta^2 + 48) \cos^2 \frac{\beta}{4}), \Delta = 2\beta + (\beta - 2) \exp(-\frac{\beta}{2}) + \\
 &(\beta + 2) \exp \frac{\beta}{2} + 4 \sin \frac{\beta}{2} + 4\beta \cos \frac{\beta}{2}.
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{Q}{32d\beta^3\delta} \left(\beta^2 + 4\beta - 12 + 4(\beta^2 + \beta + 1) \exp \frac{\beta}{2} + \right. \\
 &\left. + (\beta - 2)^2 \sin \frac{\beta}{2} - 2(\beta^2 - 4) \cos^2 \frac{\beta}{4} \right), \\
 B &= -\frac{Q}{32d\beta^3\delta} \left(-\beta^2 + 4\beta + 12 - (\beta - 2)^2 \exp(-\frac{\beta}{2}) + \right. \\
 &\left. + (\beta + 2)^2 \sin \frac{\beta}{2} + 2(\beta^2 - 4) \cos^2 \frac{\beta}{4} \right),
 \end{aligned}$$

Зная экспериментальное значение прогиба $[w]$ в точке $\xi = 0$, можем определить параметр $\beta = \beta(w)$.

Пусть надземная часть стальной трубы $L = 25$ м, а ее внутренний диаметр $2R$ и толщина стенок h равны соответственно 0.309 м и 0.008 м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, при этом $d \approx 51.27$ Па. Определим прогиб трубы под действием груза $Q = 500$ Н при жесткости пружин $q_s \approx 16611.89$ Па ($\beta = 3$).

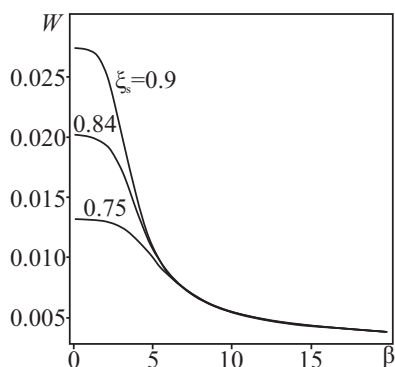


Рис. 6. Зависимость относительного прогиба W в середине пролета трубопровода от относительной жесткости пружин β при различных значениях ξ_s

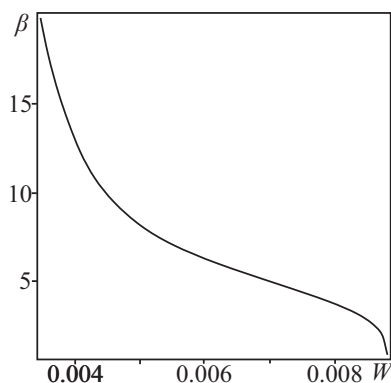


Рис. 7. Зависимость относительной жесткости пружин β от относительного прогиба трубопровода W

В соответствии с первой формулой в (10) получим, что прогиб $w \approx 0.08$ м.

В обратной задаче определяем жесткость пружин q_s , если известно, что под действием дополнительного груза $Q = 500$ Н прогиб трубопровода возрастает на $[w] = 0.08$ м. Подставляя в формулу (10) вместо w значение 0.08 и решая систему относительно β , вычислим относительную жесткость пружин $\beta \approx 3.48$. Следовательно, $q_s \approx 30189.5$ Па.

Анализ показывает, что малые ошибки замера значения $[w]$ приводят в обратной задаче к значительным ошибкам в определении значения жесткости пружин q_s . Например, при $[w] = 0.085$ м значение $q_s \approx 3339.95$ Па ($\beta \approx 2.01$), а при $[w] = 0.075$ м значение $q_s \approx 64958.61$ Па ($\beta \approx 4.22$). На рис. 7 приведена зависимость значения β от $W = (d/Q)w$ при $\mu = 0$ и $\xi_s = 3/4$.

4. Заключение

В системе «трубопровод–емкость–транспортируемая жидкость» определен прогиб трубопровода в зависимости от геометрических и механических характеристик трубы, от плотности, давления и скорости жидкости, упругой реакции опор. Учитывается влияние на изгиб взаимодействия внутреннего перепада давления и кривизны осевой линии, точки жесткого закрепления конструкции, а также возникающего продольного усилия в результате осесимметричной деформации трубы. Показана зависимость критического внутреннего давления от точки закрепления конструкции «трубопровод–емкость». В обратной задаче по экспериментально определенным значениям прогиба или деформации трубы определено значение жесткости пружин.

Список литературы

- [1] Ильгамов М.А. Колебание упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
- [2] Ильгамов М.А. Статические задачи гидроупругости. Казань: ИММ РАН, 1994. 208 с.
- [3] Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and post-buckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure // Journal of Applied Mechanics: Transactions ASME. 1995. Vol. 62, No. 3. P. 595–600.
- [4] Ilgamov M.A., Ratrouf R.A. Large deflection of superconducting cable // Int. J. Nonlinear Mech. 1999. Vol. 34, No. 5. P. 869–880.
- [5] Ильгамов М.А., Якупов Р.Г. Сильный изгиб трубопровода // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 109–116.
- [6] Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. Т. 5, № 1. С. 70–78.
- [7] Ахатов И.Ш., Ахтямов А.М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, № 2. С. 290–298.
- [8] Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
- [9] Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Уфа: Гилем, 2007. № 5. С. 201–211.
- [10] Гимазетдинов И.Р., Климов В.П., Гумеров А.К. Некоторые особенности напряженного состояния трубопроводов на переходах через реки и овраги // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. ИПТЭР. 2014. № 3. С. 55–65.

Parametric analysis of static bending of the pipeline

Yulmukhametov A.A.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

Consideration is given to the direct and inverse problems for pipeline bending both by gravity and transported fluid. The effect of internal pressure drop and the velocity of a fluid are taken into account. The influence of point fixing of "pipeline-capacity" constructions for the deflection is also taken into account. The inverse problem is to determine the relative stiffness of distributed support under the instrument determining pipeline deflection or deformation of its outer fibers. The method of loading pipeline by the concentrated power and determination of appropriate instrument deflection or deformation is applied. In particular, loading and corresponding measurements are carried out at the midpoint of the pipeline span.

Keywords: pipeline, transported fluid, internal pressure, critical values of pressure, the speed of the transported fluid

