ТРУДЫ Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН

ISSN 2542–0380
Том 11 (2016), № 1, с. 20–23
УДК 532.5.07

http://proc.uimech.org/uim2016.1.004
DOI: 10.21662/uim2016.1.004

Получена: 13.09.2016
Принята: 22.09.2016

Решения гидродинамической подмодели ранга 2 с вращением[1]

Юлмухаметова Ю.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Рассматриваются дифференциальные уравнения газовой динамики с произвольным уравнением состояния. Из 27 известных инвариантных подмоделей ранга два выбрана одна подмодель, построенная на подалгебре 2.10. Данная подмодель эволюционного типа, содержит в базисе операторов оператор вращения, поэтому уравнения рассматриваются в цилиндрической системе координат. Найдены все решения инвариантной подмодели для политропного газа с предположением о линейной зависимости радиальной компоненты скорости от пространственной координаты.

Ключевые слова: газовая динамика, подмодель ранга два, линейное поле скоростей, политропный газ

1. Введение

Для системы уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния известны все 27 инвариантных подмоделей ранга два [1]. Все перечисленные подмодели приводятся к системе эволюционного или стационарного типов. В книге Хабирова С.В. [2] рассмотрены инвариантные подмодели, построенные на подалгебрах 2.17, 2.9, 2.2 (нумерация подалгебр из [1]). Решения подмоделей описывают двумерные установившиеся течения газа, одномерные движения газа с цилиндрическими волнами и закруткой, течения со спиральными поверхностями уровня. Классификация точных решений остальных подмоделей не завершена. В данной работе рассматривается инвариантная подмодель ранга 2 эволюционного типа в цилиндрической системе координат, построенная на подалгебре 2.10 [1]. Ставится задача найти все решения для политропного газа с предположением о линейной зависимости радиальной компоненты скорости от пространственной координаты. Классификация газодинамических подмоделей с линейным полем скоростей по трем координатам и по общему уравнению состояния была проведена в работе [3]. Полученные динамические системы большой размерности не поддаются простому интегрированию, поэтому ставится аналогичная задача для инвариантных подмоделей. В работе Головина С.В. [4] решение поставленной задачи свелось к дифференциальному уравнению для функций одного переменного, но зависящих от различных независимых переменных. Чтобы его решить, необходимо разделить переменные в уравнении. В отличие от работы [4] в настоящей работе найдены все решения в явном виде.

2. Постановка задачи

Рассматриваются уравнения газовой динамики (УГД) в цилиндрической системе координат (x, r, θ). Рассматривается подалгебра 2.10 оптимальной системы 11-мерной алгебры Ли, допускаемой УГД с произвольным уравнением состояния [1]. Базис операторов подалгебры состоит из оператора галилеева переноса $X_4 = t\partial_x + \partial_U$ и оператора движения по спиральным линиям $\alpha X_1 + X_7 = \alpha\partial_x + \partial_\theta$. Инварианты этих операторов задают представление решения:

$$\begin{gathered} U = \frac{x - \alpha\theta}{t} + u(t, r),\ V = V(t, r), \\ W = W(t, r),\ \rho = \rho(t, r),\ S = S(t, r), \end{gathered} \tag{1}$$

где U — скорость вдоль оси x; V — радиальная скорость; W — окружная скорость; ρ — плотность; S — энтропия; давление определяется через уравнение состояния $p = f(\rho, S)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-97027-р_поволжье_а), АН РБ (договор № 40/13-П).

Подстановка представления (1) в УГД дает систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
u_t + ut^{-1} + Vu_r = \alpha W(tr)^{-1}, \\
V_t + VV_r + p_r\rho^{-1} = W^2r^{-1}, \\
W_t + VW_r + VWr^{-1} = 0, \quad S_t + VS_r = 0, \\
\rho_t + V\rho_r + \rho(t^{-1} + V_r + Vr^{-1}) = 0, \\
p = f(\rho, S).
\end{gathered} \tag{2}
$$

Уравнения системы (2) записываются в виде:

$$
\begin{gathered}
V_t + VV_r + p_r\rho^{-1} = W^2r^{-1}, \ (rW)_t + V(rW)_r = 0, \\
(tr\rho)_t + (trV\rho)_r = 0, S_t + VS_r = 0.
\end{gathered}
$$

Вводится лагранжевая координата $\xi = \xi(t, r)$ по правилу $\xi_t + V\xi_r = 0$ с точностью до взятия произвольной функции от ξ [5]. Тогда уравнение для W, ρ, S интегрируются:

$$
\begin{gathered}
S = S(\xi), rW = g(\xi), \\
\rho = (tr)^{-1}\xi_r, V = -(\xi_r)^{-1}\xi_t,
\end{gathered} \tag{3}
$$

где $S(\xi)$, $g(\xi)$ — произвольные функции, функция $\xi(t, r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$
\begin{gathered}
-\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_t + \frac{\xi_t}{\xi_r}\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_r + f_\rho\left(\frac{\xi_{rr}}{\xi_r} - \frac{1}{r}\right) + \\
+ f_S S_\xi = \frac{g^2(\xi)}{r^3}.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Из первого уравнение системы (2) следует интеграл

$$
tu = \alpha g(\xi)\int \frac{dt}{r^2(t, \xi)} + U_1(\xi), \tag{5}
$$

где $U_1(\xi)$ — произвольная функция.

Координата скорости V линейна по r тогда и только тогда, когда лагранжевая координата ξ линейна по r: $\xi = rb(t)$, где $b(t) \neq 0$. Тогда уравнение (4) примет вид:

$$
-\left(\frac{b'}{b^2}\right)' - \frac{b}{\xi^2}f_\rho + f_S S_\xi \frac{t}{b} = g^2(\xi)\frac{b^2}{\xi^4}. \tag{6}
$$

Последнее равенство есть уравнение для определения уравнения состояния (УС) по известным функциям $b(t)$ и $S(\xi)$. По заданным решениям определяется УС. Если известно УС, то это уравнение задает переопределенное соотношение для нахождения функций $b(t)$ и $S(\xi)$. Далее рассмотрим модель политропного газа.

2.1. Модель политропного газа

Уравнение состояния политропного газа имеет вид $p = h(S)\rho^\gamma, \gamma \neq 0$, где h — произвольная функция энтропии; γ — показатель адиабаты. С точностью до преобразования эквивалентности можно считать $S(\xi) = \xi$, то есть $p = \xi\rho^\gamma$. Уравнение (6) становится тождеством по ξ и t:

$$
-\frac{|t|^{\gamma-1}}{b^{2\gamma-1}}\left(\frac{b'}{b^2}\right)' + (1-\gamma)\mathrm{sign}\xi|\xi|^{-\gamma} = \frac{g^2(\xi)}{\xi^4}\frac{|t|^{\gamma-1}}{b^{2\gamma-4}}. \tag{7}
$$

После дифференцирования тождества (7) по t независимые переменные t и ξ разделяются. Возможны два случая:

1) $g = \xi^2$,

2) $b = \pm|t|^{\frac{\gamma-1}{2\gamma-4}}$, $\gamma \neq 2$.

В первом случае из уравнения (7) следует с точностью до преобразования эквивалентности

$$
\gamma = 1, b = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+t^2}}.
$$

Тогда компоненты вектора скорости и плотность имеют вид:

$$
U = \frac{x - \alpha\theta + \alpha\arctan t + U_1(\xi)}{t}, \quad V = \frac{rt}{1+t^2},
$$

$$
W = \frac{r}{1+t^2}, \quad \rho = \frac{\pm 1}{rt\sqrt{1+t^2}}, \quad \xi = \frac{\pm r}{\sqrt{1+t^2}}.
$$

Во втором случае после подстановки выражения для функции $b(t)$ в тождество (7) имеем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-\gamma)(5-3\gamma)}{(2\gamma-4)^2}\mathrm{sign}t|t|^{\frac{6-4\gamma}{\gamma-2}} = \\
&= \frac{g^2(\xi)}{\xi^4} - (1-\gamma)\mathrm{sign}\xi|\xi|^{-\gamma}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Последнее тождество верно только в трех случаях: $\gamma = 3/2$, 1, 5/3.

Если $\gamma = 3/2$, то $b = \pm|t|^{-1/2}$, $\xi = \pm r|t|^{-1/2}$. Тождество (8) есть равенство для определения функции $g(\xi)$ только при $t < 0$: $g^2 = \dfrac{1}{4}\xi^4 + \dfrac{1}{2}|\xi|^{5/2}$. Тогда компоненты вектора скорости и плотность имеют вид:

$$
U = \frac{x - \alpha t + U_1(\xi)}{t} + \alpha\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{|t|^{3/4}}{r^{3/2}}\right)^{1/2}, V = \frac{r}{2t},
$$

$$
W = \frac{1}{2r}\left(\frac{r^4}{t^2} + 2\frac{r^{5/2}}{|t|^{5/4}}\right)^{1/2}, \rho = \frac{1}{|t|^{3/2}r}.
$$

Если $\gamma = 5/3$, то $b = t^{-1}$, $\xi = rt^{-1}$. Из тождества (8) следует выражение для функции $g(\xi)$ только при $t < 0$:

$$
g = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}|\xi|^{7/6}.
$$

Тогда компоненты вектора скорости и плотность имеют вид:

$$U = \frac{x - \alpha t + U_1(\xi)}{t} - \alpha\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{r^{5/6}|t|^{7/6}},\ V = \frac{r}{t},$$

$$W = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{r^{1/6}}{|t|^{7/6}},\ \rho = \frac{1}{rt^2}.$$

Если $\gamma = 1$, то $b = \pm 1$, $\xi = \pm r$. В этом случае из тождества (8) следует $g = 0$. Тогда компоненты вектора скорости и плотность имеют вид:

$$U = \frac{x - \alpha t + U_1(\xi)}{t},\ V = W = 0,\ \rho = \frac{\pm 1}{rt}.$$

3. Заключение

Для инвариантной подмодели ранга 2 найдены решения в случае политропного газа с предположением о линейной зависимости радиальной компоненты скорости от пространственных координат. В работе получены соотношения и уравнения (1), (3), (4), (5), которые позволяют найти точные решения не только для уравнения состояния политропного газа, но и для любого уравнения состояния. Требуется лишь подставить выбранное уравнение состояния в дифференциальное уравнение (5) и провести разделение переменных в уравнении.

Список литературы

[1] Мамонтов Е.В. Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 50–55.

[2] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем. 2003. 192 с.

[3] Юлмухаметова Ю.В. Подмодели газовой динамики с лмнейным полем скоростей // Сибирские электронные математические известия. 2012. Т. 9. С. 208–226.

[4] Головин С.В. Точные решения для эволюционных подмоделей газовой динамики // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 3–14.

[5] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

The solution of the hydrodynamic submodels of rank 2 with rotation

Yulmukhametova Yu.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

Found all solutions invariant submodel of grade 2 evolution type for the polytropic gas with the assumption of a linear dependence of the radial component of the velocity from the spatial coordinates.

Keywords: gas dynamics, a submodel of rank two, linear velocity field, polytropic gas