

Определение скорости движущегося стержня и толщины покрытия по собственным частотам изгибных колебаний¹

Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Исследованы собственные поперечные колебания участка постоянной длины прямолинейного тонкого стержня с покрытием, движущегося вдоль нейтральной линии недеформированного состояния. Перемещение происходит между двумя фиксированными соосными направляющими (зажимами), расстояние между которыми равно длине колеблющейся части стержня. Предполагается, что вдоль нейтральной линии действует постоянная продольная сила. Получено, что с увеличением скоростного параметра происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стержня. Показано, что с увеличением толщины покрытия происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стержня. По двум частотам изгибных колебаний можно определить скоростной параметр и толщину покрытия движущегося стержня. Результаты работы могут находить технические применения в задачах динамики и прочности машин и механизмов при производстве изделий с покрытиями: в текстильной промышленности при производстве проволоки, в металлургии, в частности, при прокатке металлических стержней и полос, протяжке проволоки, производстве изделий из пластмасс и рулонов бумаги и могут быть применены для определения скорости и толщины покрытия движущегося стержня, полосы, проволоки по двум собственным частотам изгибных колебаний.

Ключевые слова: движение стержня, покрытие, изгибные колебания, собственные частоты, прямая и обратная задачи

1. Введение

В работе [1] исследованы собственные поперечные колебания участка постоянной длины прямолинейного тонкого стержня, движущегося вдоль нейтральной линии недеформированного состояния, где перемещение происходит между двумя фиксированными соосными направляющими, расстояние между которыми равно длине колеблющейся части стержня. Вдоль нейтральной линии стержня действует постоянная продольная сила. Для произвольных величин скорости перемещения стержня и продольных сил посредством численно-аналитической процедуры с заданной точностью определены и проанализированы собственные частоты возможных мод колебаний. Установлены гло-

бальные свойства спектра в зависимости от скорости, продольной силы и номера моды [1]. Для высших мод обнаружены области неоднозначной зависимости частот и отсутствия более низких частот колебаний при увеличении скорости движения стержня, а также от величины и направления продольной силы. Установлено, что картина парциальных колебаний с позиции неподвижного наблюдателя кардинально отличается от общеизвестной для неподвижного стержня [1]. Полученные результаты интересны применительно к колебаниям различных элементов движущихся упругих сред с покрытиями, в том числе для систем с подвижными границами. Они могут находить технические применения в задачах динамики и прочности приборов, машин и механизмов в текстильной промышленности при производстве изделий с покрытиями: нитей и канатов, в металлургии, в частности, при прокатке металлических стержней и полос, протяжке проволоки, производстве изделий из пластмасс и рулонов

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 14-01-97010-р_поволжье_а, 14-01-97013-р_поволжье_а, 14-01-00740) и АН РБ (договор № 40/9-П).

бумаги. Разработанная методика вычисления собственных частот и форм применима для анализа поперечных колебаний участков транспортных трубопроводов с быстро протекающей жидкостью [1].

В настоящей работе решена обратная задача определения скоростного параметра и толщины покрытия движущегося стержня по двум собственным частотам изгибных колебаний.

2. Постановка задачи

Исследуются собственные частоты изгибных колебаний стержня, движущегося между двумя опорами, представляющими скользящую заделку, и находящегося под действием растягивающей силы. Требуется определить скорость и усилие натяжения стержня по собственным частотам изгибных колебаний. Решение прямой задачи дается в [1]. Изгибная жесткость покрытия не учитывается. Уравнение изгибных колебаний стержня по модели Кирхгоффа имеет вид [2-4]:

$$EJ \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + [(\rho F + \rho_s F_s) V^2 - T] \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} + 2(\rho F + \rho_s F_s) V \frac{\partial^2 w_*}{\partial x \partial t} + (\rho F + \rho_s F_s) \frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где E , ρ , J , F — модуль упругости, плотность, осевой момент инерции и площадь поперечного сечения стержня; T — усилие растяжения в стержне; V — скорость стержня; ρ_s , F_s — плотность материала и площадь поперечного сечения покрытия; w_* — прогиб стержня; x — координата, направленная по оси стержня; t — время.

Перейдя к безразмерным величинам:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad w = \frac{w_*}{L}, \quad \tau = vt, \quad v^2 = \frac{EJ}{\rho FL^4}, \quad N = \frac{TL^2}{EJ}, \\ \alpha = \frac{V}{vL}, \quad \beta = 1 + \frac{\rho_s F_s}{\rho F}, \quad p = \alpha^2 \beta - N, \quad q = 2\alpha \beta \Omega, \\ r = -\beta \Omega^2, \quad \Omega^2 = \frac{\rho FL^4 \omega^2}{EJ},$$

сделаем подстановку $w = W(\xi) \exp(i\Omega\tau)$ и получим уравнение, определяющее форму изгибных колебаний стержня с покрытием

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + p \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + iq \frac{\partial W}{\partial \xi} + rW = 0, \quad (2)$$

где ω — круговая частота; L — длина стержня между опорами; ξ — безразмерная координата; w — безразмерный прогиб стержня; τ — безразмерное время; N — силовой параметр; α — скоростной параметр; β — инерционный параметр; Ω — безразмерная круговая частота.

Граничные условия для заземленного по краям стержня

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = 0, 1). \quad (3)$$

Общее решение уравнения (2) будем определять в виде $W(\xi) = \exp(k\xi)$, тогда получим характеристическое уравнение для нахождения неизвестных значений комплексного волнового параметра $k = k_j(\alpha, R, \Omega)$, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$k^4 + pk^2 + iqk + r = 0. \quad (4)$$

Согласно формул Феррари, запишем результату уравнения (4)

$$z^3 - \frac{p}{2}z^2 - rz + \frac{rp}{2} + \frac{q^2}{8} = 0,$$

которое, подстановкой $z = y + \frac{p}{6}$ приводится к виду

$$y^3 + p_1y + q_1 = 0, \quad p_1 = -\left(r + \frac{p^2}{12}\right), \\ q_1 = -\frac{p^3}{108} + \frac{pr}{3} + \frac{q^2}{8}.$$

Если какое-либо решение кубического уравнения z_1 найдено, то решения уравнения (4) находятся как решения двух квадратных уравнений

$$k^2 - \sqrt{2z_1 - pk} + \frac{q}{2\sqrt{2z_1 - p}} + z_1 = 0, \\ k^2 + \sqrt{2z_1 - pk} - \frac{q}{2\sqrt{2z_1 - p}} + z_1 = 0, \\ k_{1,2} = \frac{\sqrt{2z_1 - p}}{2} \pm \sqrt{-2z_1 - p - \frac{2q}{\sqrt{2z_1 - p}}}, \\ k_{3,4} = -\frac{\sqrt{2z_1 - p}}{2} \pm \sqrt{-2z_1 - p + \frac{2q}{\sqrt{2z_1 - p}}},$$

и общее решение уравнения (2) имеет вид

$$W(\xi) = \sum_{j=1}^4 C_j \exp(k_j \xi), \quad (5)$$

где $k_j = k_j(\omega, \alpha, N)$ — волновые числа.

Подставляя (5) в граничные условия (3), получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных постоянных C_j . Для того чтобы постоянные C_j не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы определитель соответствующей матрицы D был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение [1]:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ e^{k_1} & e^{k_2} & e^{k_3} & e^{k_4} \\ k_1 e^{k_1} & k_2 e^{k_2} & k_3 e^{k_3} & k_4 e^{k_4} \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

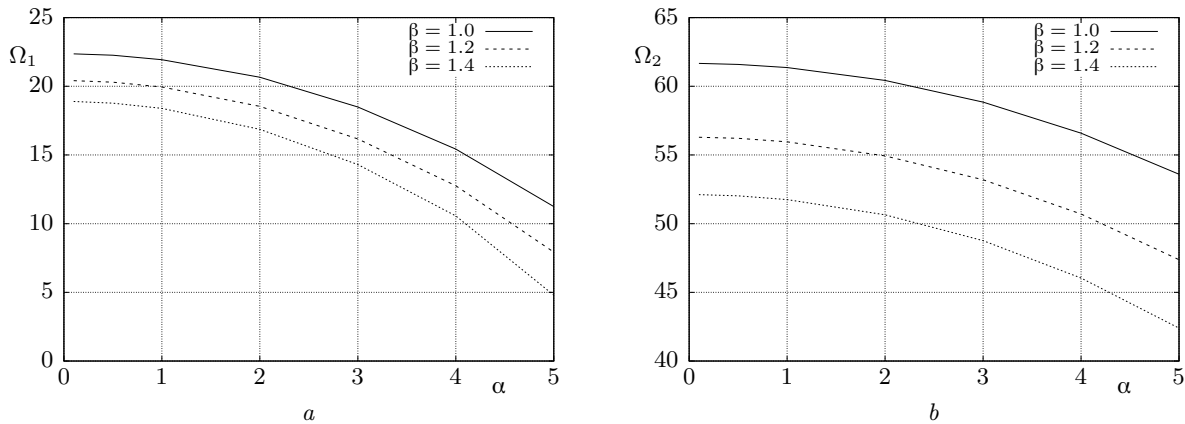


Рис. 1. Зависимости первой (фрагмент а), второй (фрагмент б) собственных частот изгибных колебаний стержня от скоростного параметра α для различных значений параметра β

Таким образом, в приведенной простейшей модели движущегося стержня с покрытием фигурируют параметры N , α и β , которые зависят от усилия растяжения в стержне T , скорости стержня V и отношения погонных масс стержня с покрытием и без покрытия. Подробнее остановимся на влиянии этих факторов на собственные частоты изгибных колебаний. Зависимости первой и второй собственной частот изгибных колебаний стержня от параметра α для различных значений параметра N и анализ полученных результатов приводятся в [1]. В отличие от работы [1] в настоящей работе дается постановка и решение обратной задачи определения скорости и толщины покрытия стержня по двум собственным частотам изгибных колебаний.

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и $N = 0$ собственные функции $W(\xi)$ действительны и совпадают с собственными функциями стержня с жестко зашпеленными концами [1].

Если $\beta = 1$ и $N = 0$, то характеристическое уравнение (2) допускает факторизацию, и его корни k_j находятся в явном виде как функции частоты Ω . Для вещественных собственных частот $\Omega_n(\alpha)$ получается довольно простое частотное уравнение, которое решается одним из численных методов [5, 6].

В общем случае корни характеристического уравнения находятся с помощью формул Феррари. Последние, по мнению авторов [1], почти не применялись в задачах математической физики и механики (редким исключением являются работы [1, 7]). Также отметим, что здесь не рассматриваются кратные корни уравнения (6) [8], которые названы в [9] «сверхнизкими частотами».

3. Прямая задача

Расчеты проведены для следующих параметров стержня круглого поперечного сечения: $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\rho = 7800$ кг/м³; $F = 3.1415$ см²; $\rho_s = 3500$ кг/м³; $F_s = 1.3823$ см²; $T = 0$; $V = 10$ м/с; $L = 2$ м ($\alpha = 0.7899$, $\beta = 1.1974$). Решение прямой задачи для стержня с вышеприведенными параметрами дает, что первая и вторая собственные частоты стержня $f_1 = 20.2996$ Гц, $f_2 = 56.5647$ Гц ($\Omega_1 = 20.1507$, $\Omega_2 = 56.1498$). На рис. 1 показаны зависимости первой (фрагмент а), второй (фрагмент б) собственных частот изгибных колебаний стержня от скоростного параметра α для различных значений параметра β . На рис. 2 приведены зависимости первой (фрагмент а), второй (фрагмент б) собственных частот изгибных колебаний стержня от параметра β для различных значений скоростного параметра α . Из рис. 1 видно, что с увеличением скоростного параметра α происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стержня. Из рис. 2 видно, что с увеличением параметра β или толщины покрытия происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стержня.

4. Обратная задача

Для определения скоростного и силового параметров запишем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} D_1 = D_1(\alpha, \beta, \Omega_1) = 0, \\ D_2 = D_2(\alpha, \beta, \Omega_2) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений определяется методом последовательных приближений *в области однозначной зависимости параметров α и β от частоты* колебаний движущегося

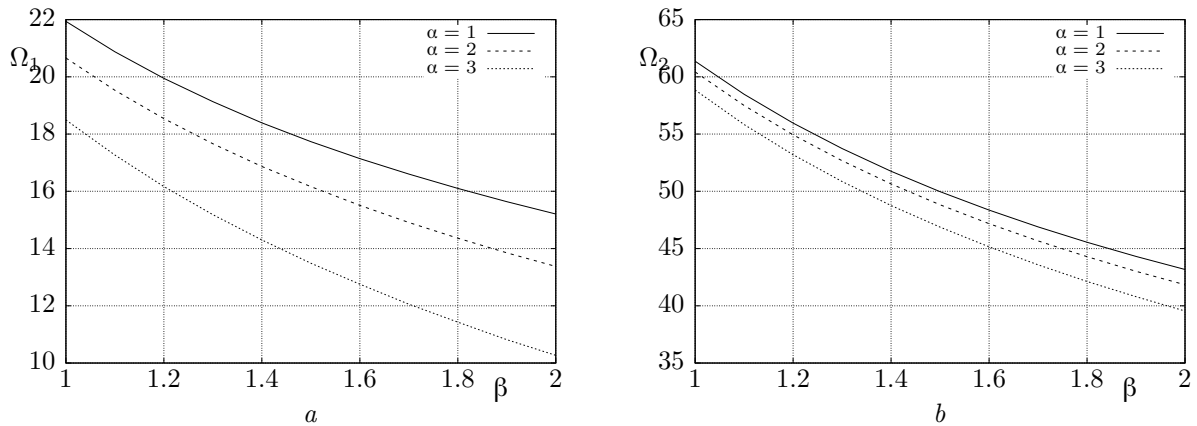


Рис. 2. Зависимости первой (фрагмент а), второй (фрагмент б) собственных частот изгибных колебаний стержня от параметра β для различных значений скоростного параметра α

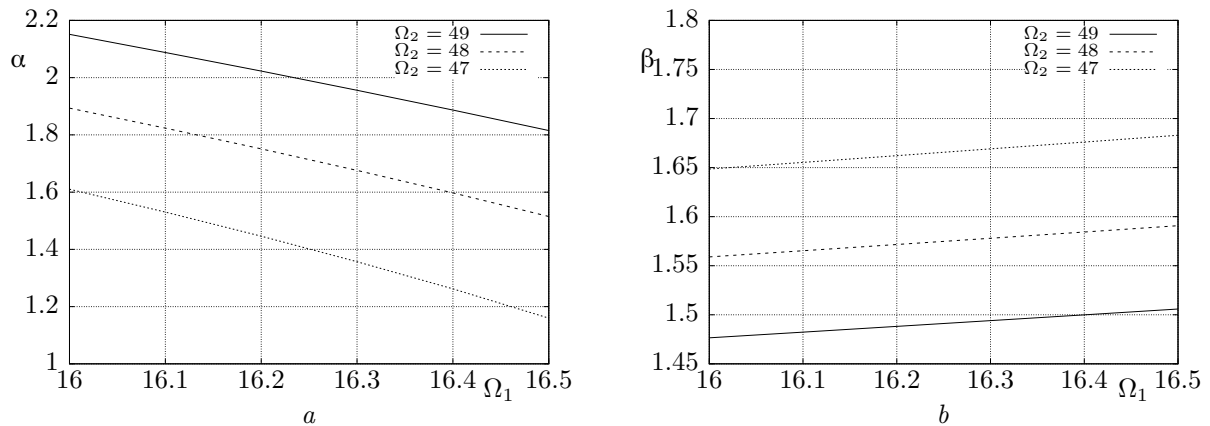


Рис. 3. Зависимости от первой частоты изгибных колебаний Ω_1 скоростного параметра α (фрагмент а) и параметра β (фрагмент б) для различных частот изгибных колебаний Ω_2 : 49 — кривая 1; 48 — кривая 2; 47 — кривая 3

стержня:

$$\begin{cases} \frac{\partial D_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial D_1}{\partial \beta} d\beta = -u_1, \\ \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial D_2}{\partial \beta} d\beta = -u_2. \end{cases}$$

По этим формулам определяются $d\alpha$ и $d\beta$, далее $\alpha_0 = \alpha_0 + d\alpha$, $\beta_0 = \beta_0 + d\beta$. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не выполнится условие точности.

Решение обратной задачи для стержня с вышеприведенными параметрами при $f_1 = 16.118$ Гц, $f_2 = 49.362$ Гц ($\Omega_1 = 16$, $\Omega_2 = 49$) дает, что $F_s = 3.336$ см², $V = 27.233$ м/с ($\alpha = 2.15131$, $\beta = 1.47648$). На рис. 3 приводятся зависимости от первой частоты изгибных колебаний Ω_1 скоростного параметра α (фрагмент а) и параметра β (фрагмент б) для различных частот изгибных колебаний Ω_2 : 49 — кривая 1; 48 — кривая 2; 47 — кривая 3. По

двум частотам изгибных колебаний можно определить скоростной параметр α и параметр β .

5. Заключение

Получено, что с увеличением скоростного параметра происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стержня. Показано, что с увеличением толщины покрытия происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стержня. По двум частотам изгибных колебаний можно определить скорость и толщину покрытия движущегося стержня. Результаты работы могут находить технические применения в задачах динамики и прочности машин и механизмов при производстве изделий с покрытиями: в текстильной промышленности при производстве проволоки, в металлургии, в частности, при прокатке металлических стержней и полос, протяжке проволоки,

производстве изделий из пластмасс и рулонов бумаги и могут быть применены для определения скорости и толщины покрытия движущегося стержня, полосы, проволоки по двум собственным частотам изгибных колебаний.

Список литературы

- [1] Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В. Спектр поперечных колебаний движущегося стержня // Известия РАН. МТТ. 2015. № 2. С. 139–144.
- [2] Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. 2. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.
- [3] Mote C.D. A study of band saw vibrations // J. Franklin Inst. June 1965. Vol. 279, № 6. P. 430–444.
- [4] Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. М.: Nauka, Fizmatlit, 1998. 208 p.
- [5] Нестеров С.В., Акуленко Л.Д. Спектр поперечных колебаний движущегося стержня // Докл. РАН. 2008. Т. 420, № 1. С. 50–54.
- [6] Kong L., Parker R.G. Approximate eigensolutions of axially moving beams with small flexural stiffness // J. Sound and Vibr. 2004. Vol. 276. P. 459–469.
- [7] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Изгибные колебания движущегося стержня // ПММ. 2008. Т. 72, Вып. 5. С. 766–781.
- [8] Григорьев В.Г. О парадоксах формального подхода к определению собственных значений одномерных краевых задач // Известия РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 17–21.
- [9] Аринчев С.В. Теория колебаний неконсервативных систем (с примерами на компакт-диске). М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 464 с.

Determining the velocity of a moving rod and the thickness of its coating using natural frequencies of flexural vibrations

Khakimov A.G.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

Research has been performed on natural transverse vibrations of a portion of a constant length in a straight thin coated rod moving along the neutral line of a non-deformed state. The movement takes place between two rigidly fixed coaxial guides (clamps), the distance between them equalling the length of the rod moving portion. The longitudinal force is assumed to constantly act along the neutral line. It has been found that a decrease in the natural frequencies of flexural vibrations of the rod occurs with an increase in the velocity parameter. It is also shown that a decrease in the natural frequencies of flexural vibrations of the rod occurs with an increase of the coating thickness. Using two frequencies of flexural vibrations, we can determine the velocity parameter of the moving rod and the thickness of its coating. The results of the research work can find technological use in the problems on dynamics and strength of machines and mechanisms in manufacturing the coated products: in textile industry, wire manufacturing process, metallurgy (especially for rolling metal bars and strips), wire drawing, plastic products and paper rolls manufacturing and can be used to determine the velocity and the coating thickness of a moving rod, strip or wire using two frequencies of flexural vibrations.

Keywords: rod movement, coating, flexural vibrations, natural frequencies, primal and inverse problems

