Институт механики
им. Р.Р.Мавлютова
Уфимского научного центра РАН

УДК 532.5.013.4

Влияние температурной зависимости вязкости на устойчивость плоскопараллельного течения жидкости[1]

Низамова А.Д.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Рассмотрена задача о влиянии температурной зависимости вязкости на устойчивость плоскопараллельного течения жидкости в канале с неоднородным температурным полем. Получено обыкновенное дифференциальное уравнение для амплитуды возмущения температуры, которое в случае изотермического течения может быть сведено к классическому уравнению Орра–Зоммерфельда. Численно исследованы спектры собственных значений для течения Пуазейля с линейной и экспоненциальной зависимостями вязкости жидкости от температуры. Показано, что температурная зависимость вязкости оказывает влияние на область устойчивости течения жидкости.

Динамические характеристики течения во многом определяются вязкостью жидкости. Как правило, задачи гидродинамики решаются в предположении постоянства физических свойств жидкости. Между тем, вязкость является тем параметром, который достаточно чувствителен к изменению температуры [1]. Большинство моделей, описывающих зависимость вязкости от температуры, имеют вид экспоненциально убывающих функций, которые называются моделями аррениусовского типа [2]. В работе [3] проведен достаточно подробный численный анализ влияния параметров температурной зависимости на режимы течения в плоских каналах. Дальнейшие усложнения моделей, включающие немонотонную зависимость вязкости от температуры, привели к еще большим отличиям параметров течения по сравнению с классическим случаем постоянной вязкости [4].

С увеличением скорости ламинарное течение теряет устойчивость, и начинают развиваться возмущения, которые приводят либо к установлению вторичного нелинейного режима, сохраняющего основные свойства ламинарного течения, либо к турбулизации потока. При анализе режимов течения жидкостей наибольший интерес представляет переход от ламинарного режима течения к турбулентному, который определяется критическим числом, вычисляемым при решении задачи о гидродинамической устойчивости. В представленной статье поставлена задача об исследовании устойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале с неоднородным температурным полем и приведены результаты численного анализа.

Основными уравнениями, описывающими течение несжимаемой термовязкой жидкости, являются уравнения неразрывности, Навье-Стокса и сохранения энергии:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\dfrac{1}{p}\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}, \end{cases}$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости; p — давление; T — температура; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; α — коэффициент температуропроводности; индексы i, j принимают значения 1, 2, 3.

Рассмотрим течение несжимаемой термовязкой жидкости в плоском канале, стенки которого имеют различные температуры T_c и T_h, причем $T_c < T_h$. Поместим начало системы координат на средней линии канала, а ось абсцисс направим параллельно стенкам канала (рис. 1).

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-97034), Программ фундаментальных исследований Президиума РАН № 25 и ОЭММПУ РАН № 13, гранта НШ-2669.2014.1.

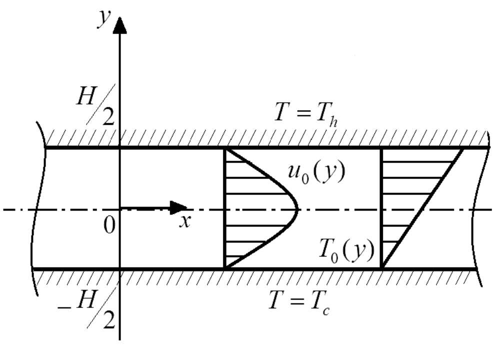

Рис. 1. Схема течения в плоском канале

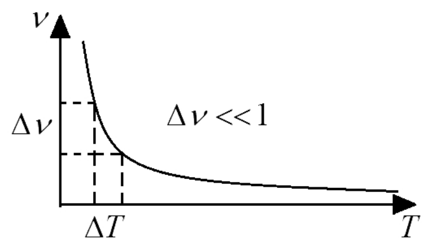

Рис. 2. Зависимость вязкости от температуры

Введем безразмерные переменные следующим образом:

$$
\hat{x} = \frac{2x}{H}, \quad \hat{y} = \frac{2y}{H}, \quad \hat{t} = \frac{2u_m t}{H}, \quad \hat{p} = \frac{p}{\rho u_m^2},
$$
$$
\hat{u} = \frac{u}{u_m}, \quad \hat{v} = \frac{v}{u_m}, \quad \hat{T} = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad \hat{\nu} = \frac{\nu}{\nu_m},
$$

где H — ширина канала; u_m — характерная скорость; ν_m — характерная вязкость.

Таким образом, исходную систему уравнений можно переписать в безразмерном виде (здесь и далее значки над безразмерными величинами опущены):

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\
\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \\
+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nu(T)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\nu(T)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right], \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \\
+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nu(T)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\nu(T)\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\right], \\
\dfrac{\partial T}{\partial t} + u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right],
\end{cases}
$$

где $\mathrm{Re} = \dfrac{u_m H}{2\nu_m}$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Pe} = \dfrac{u_m H}{2\alpha}$ — число Пекле.

Безразмерные граничные условия будут иметь вид:

$$
u(-1) = u(1) = 0, \quad v(-1) = v(1) = 0,
$$
$$
T(-1) = 0, \quad T(1) = 0.
$$

В настоящей работе мы рассмотрим линейную температурную зависимость вязкости вида

$$
\nu_1(T) = 1 - m_1 T, \quad 0 < m_1 < \frac{1}{2}
$$

и экспоненциальную зависимость вида

$$
\nu_2(T) = e^{-m_2 T}, \quad m_2 > 0.
$$

Считая, что вязкость изменяется незначительно предположим (рис. 2), что невозмущенное течение является плоскопараллельным и распределение скорости имеет профиль Пуазейля:

$$
u(x, y, t) = u_0(y) = 1 - y^2,
$$
$$
v(x, y, t) = 0,
$$

а невозмущенные распределения давления и температуры имеют вид:

$$
p(x, y, t) = p_0(y),
$$
$$
T(x, y, t) = T_0(y).
$$

Легко видеть, что невозмущенная температура изменяется линейно по сечению канала:

$$
T_0(y) = 1 + y.
$$

Для исследования гидродинамической устойчивости рассматриваемого течения предполагаем, что

$$
u = u_0(y) + \breve{u}(x, y, t),
$$
$$
v = \breve{v}(x, y, t),
$$
$$
p = p_0(y) + \breve{p}(x, y, t),
$$
$$
T = T_0(y) + \breve{T}(x, y, t),
$$

где $\breve{u}(x, y, t), \breve{v}(x, y, t), \breve{p}(x, y, t), \breve{T}(x, y, t)$ — возмущения продольной и поперечной скоростей, давления и температуры.

Представим возмущения в виде бегущей волны:

$$
\breve{u} = \varphi_1(y) \cdot e^{ik(x-ct)},
$$
$$
\breve{v} = \varphi_2(y) \cdot e^{ik(x-ct)},
$$
$$
\breve{p} = \psi(y) \cdot e^{ik(x-ct)},
$$
$$
\breve{T} = \theta(y) \cdot e^{ik(x-ct)},
$$

где φ_1, φ_2, ψ, θ — амплитуды возмущений скорости, давления и температуры; $c = c_1 + ic_2$ — комплексная скорость распространения возмущений; $k > 0$ — волновое число.

Из этого представления следует что, если мнимая часть хотя бы одного собственного значения положительна, то малые возмущения будут со временем экспоненциально нарастать, а это, в свою очередь, приведет к развитию турбулентного течения.

Используя разложение в ряд Тейлора, выразим вязкость через невозмущенную часть и температурное возмущение:

$$\nu(T) = \nu(T_0 + \check{T}) \approx \nu(T_0)) + \nu' \cdot (T_0)\check{T}.$$

В результате получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений:

$$\begin{cases} \nu(T_0) \cdot \left[\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi\right] - ik\mathrm{Re}[(u_0 - c)\times \\ \times(\varphi'' - k^2\varphi) - u_0''\varphi] + 2\nu'(T_0) \cdot (\varphi''' - k^2\varphi') + \\ +\nu''(T_0)\varphi'' - ik[\nu'(T_0) \cdot (\theta u_0''' + 2\theta' u_0'' + \theta'' u_0') + \\ +2\nu''(T_0) \cdot (\theta u_0'' + \theta' u_0') + \nu'''(T_0)\theta u_0'] = 0, \\ (\theta'' - k^2\theta) - ikPe(u_0 - c)\theta - \mathrm{Pe}\varphi T_0' = 0. \end{cases}$$

Граничными условиями для системы являются:

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0,$$
$$\psi(-1) = \psi(1) = 0,$$
$$\theta(-1) = \theta(1) = 0.$$

Первое уравнение системы содержит дополнительные слагаемые, характеризующие изменение как температуры, так и вязкости по сечению канала. Если течение является изотермическим, то это уравнение сводится к хорошо известному уравнению Орра–Зоммерфельда [5–7]. Полученная система является модифицированным уравнением Орра–Зоммерфельда для термовязкой жидкости. Выражая амплитуду возмущения скорости из последнего уравнения системы и подставляя его в первое, мы получаем одно обыкновенное дифференциальное уравнение 6-го порядка, которое может быть решено для собственных значений и собственных функций.

В данной работе мы рассмотрим только случай, когда возмущение температуры отсутствует и система уравнений может быть переписана как одно обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка.

На рис. 3 представлены спектры собственных значений модифицированного уравнения Орра–Зоммерфельда для случая линейной зависимости вязкости от температуры и значений параметров $\mathrm{Re} = 10^4$, $k = 1$, выбранных с целью сопоставления с результатами известной работы [8].

Анализ полученных результатов показывает, что при сделанных предположениях спектр собственных значений при малых значениях параметра m_1, характеризующего степень зависимости вязкости от температуры ($m_1 = 0.1$ на рис. 3(а)), качественно совпадает со спектром, соответствующим классическому уравнению Орра–Зоммерфельда [6, 8, 9]. Собственные значения приближаются к вещественной оси, группируясь вдоль одной вертикальной ветви, а затем расходятся на две ветви направо и налево. Такую картину принято называть «спектральный галстук». При увеличении значения параметра m_1 спектр собственных значений существенно изменяется. При значениях параметра $m_1 > 0.2$ нижняя вертикальная ветвь начинает распадаться на две отдельные ветви ($m_1 = 0.3$ на рис. 3(б)).

На рис. 3(а), хорошо видно, что существует одно собственное значение с положительной мнимой частью, что соответствует неустойчивому характеру течения при выбранных значениях числа Рейнольдса и волнового числа. Однако, при тех же значениях параметров, течение жидкости с более сильной зависимостью вязкости от температуры будет устойчивым рис. 3(б).

Спектры собственных значений для задачи с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры аналогичны уже рассмотренным и показаны на рис. 3(в),(г). На рис. 3(в),(г) хорошо видно, что существует одно собственное значение с положительной мнимой частью, что соответствует неустойчивому характеру течения при выбранных значениях числа Рейнольдса и волнового числа.

На рис. 4 представлены нейтральные кривые для течения жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры ($m_2 = 0.3$) и жидкости с постоянной вязкостью ($m_2 = 0$). Область внутри соответствующей нейтральной кривой характеризует неустойчивость данного течения. Кривые свидетельствуют об уменьшении критического значения числа Рейнольдса при течении термовязкой жидкости и, соответственно, переход от ламинарного режима к турбулентному для термовязкого течения происходит при меньших значениях числа Рейнольдса.

Зависимость критического числа Рейнольдса от параметров m_i $(i = 1, 2)$, характеризующих зависимость вязкости от температуры, представлены на рис. 5. В рассмотренном диапазоне при увеличении значений m_i $(i = 1, 2)$ критические числа Рейнольдса уменьшаются до некоторого минимального значения, а затем возникает тенденция к их увеличению, что может свидетельствовать о необходимости учета влияния изменения вязкости на поле скорости и рассмотрения более общего вида профиля скорости.

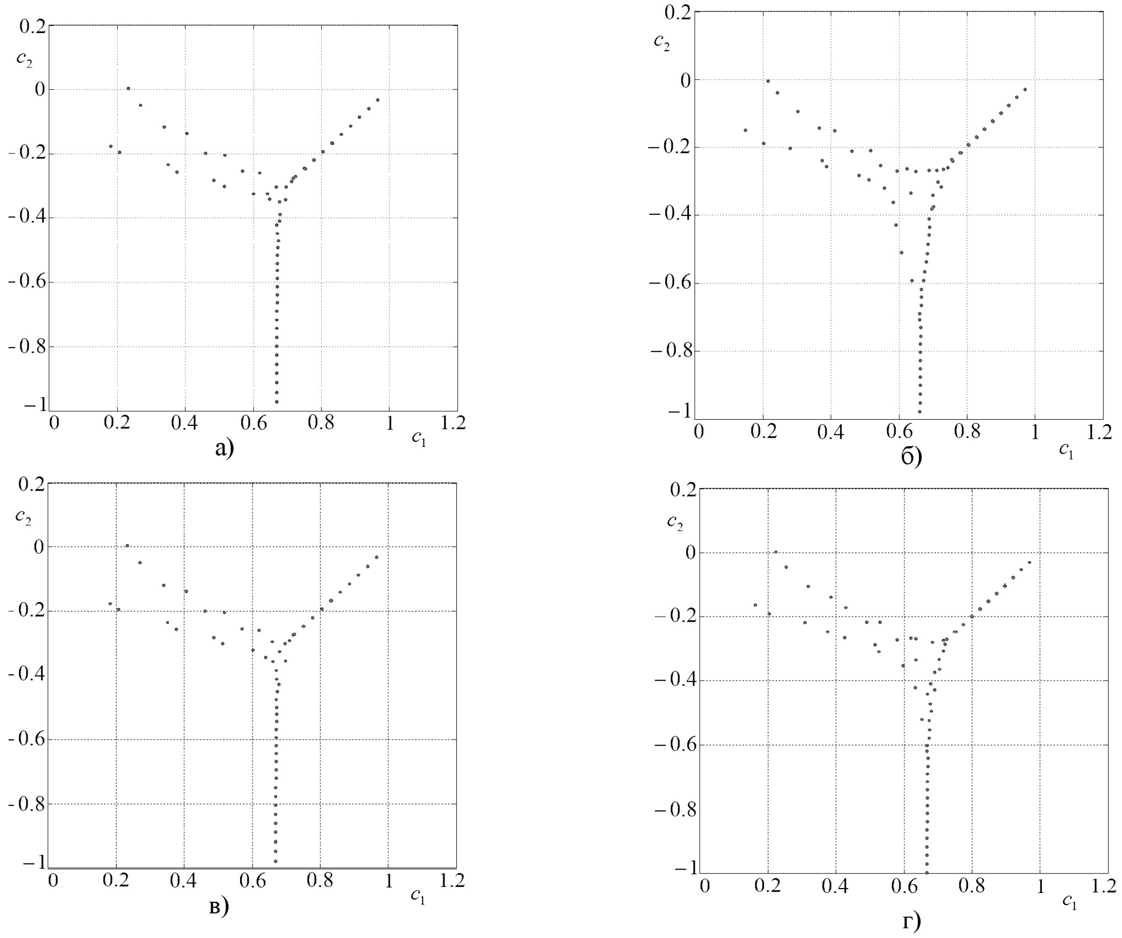

Рис. 3. Спектр собственных значений для линейной: a) $m_1 = 0.1$; b) $m_1 = 0.3$ и экспоненциальной: c) $m_2 = 0.1$; d) $m_2 = 0.3$ зависимостей вязкости от температуры

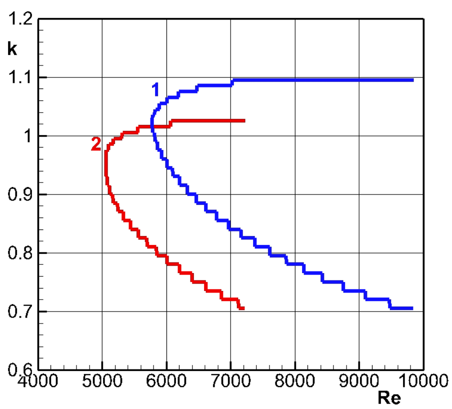

Рис. 4. Нейтральные кривые: 1 — постоянная вязкость, 2 — экспоненциальная зависимость вязкости от температуры $(m_2 = 0.3)$

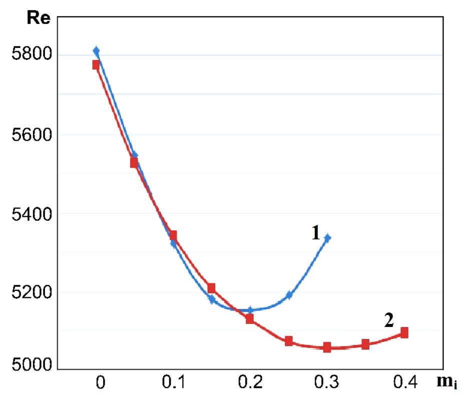

Рис. 5. Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра m_2, характеризующего температурную зависимость вязкости

Список литературы

[1] Лейбензон Л.С. К вопросу о теплопередаче в нефтепроводных трубах. Собрание трудов. Том III. Нефтепромысловая механика. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 250–295.

[2] Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Ленинград: Изд-во Наука, 1975. 592 с.

[3] Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н. О влиянии температурной зависимости вязкости на течение жидкости // Нефтегазовое дело. 2004. № 2. С. 287–295.

[4] Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады академии наук. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207.

[5] Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: ВО «Наука», 1992. 256 с.

[6] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во Физматлит, 2005. 288 с.

[7] Бетчов Р., Криминале В., Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 352 с.

[8] Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 10. С. 1672–1691.

[9] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // J. Fluid Mech, 1971. V. 50, Part 4. P. 689–703.