



К моделированию динамики системы флюид–дисперсная среда

Лугуманов Т.Т.* , Кулешов В.С.**

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

**Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Проведен обзор литературы, связанной с моделированием процессов в системе флюид–дисперсная среда. Рассмотрены основные аспекты моделирования двухфазных течений, которые могут быть полезны для построения континуальной модели процесса. Выделены основные проблемы построения таких моделей, описаны параметры, определяющие состояние дисперсной фазы и приемы расчета кинетики коагуляции. Проведен анализ сил, действующих на частицу в потоке.

1. Введение

Задачу описания движения дисперсной системы можно разделить на три основные подзадачи:

1. Движение несущей среды.
2. Движение дисперсной фазы.
3. Процесс кластеризации.

При условии, что доля дисперсной фазы в системе значительно меньше, чем доля среды (объемная доля $\alpha_2 < 10^{-6}$), можно пренебречь влиянием дисперсной фазы на течение среды. Тогда первый пункт вырождается в задачу течения сплошной среды, которая достаточно хорошо изучена [1] и лежит за пределами данной темы.

Наибольший же интерес представляют оставшиеся две задачи.

2. Кластеризация

Объединение частиц в кластеры обусловлено увеличением концентрации дисперсной фазы в определенной области и коагуляцией частиц вследствие столкновений.

Можно выделить два основных вида относительных движений, приводящих к столкновениям, — это осредненное и пульсационное относительное движения. К первому относится, например, столкновение различных по массе частиц при гравитационной седиментации, а ко второму можно отнести пульсации скоростей частиц из-за турбулентности течения среды.

В случаях, когда дисперсная фаза жидкая,

одиночные частицы имеют сферическую форму и при столкновении частиц также образуются сферы, только большего радиуса. Но при определенных условиях могут возникнуть исключения, например, когда жидкость имеет большую вязкость, процесс слияния частиц в сферы может занять достаточно большое время, чтобы успели произойти очередные столкновения и в итоге образовалась сложная фигура.

Когда же дисперсная фаза твердая, то в любом случае в процессе коагуляции образуются сложные структуры. Как правило, во всех моделях используется допущение, что все частицы в начальный момент времени идеальной сферической формы и одинакового радиуса. Если нужно рассмотреть задачу, когда одиночные частицы имеют неправильную форму, используют эмпирически найденные коэффициенты [2].

Широко распространен подход, при котором образующиеся сложные структуры рассматривают как фракталы [2–5].

Эти фрактальные структуры называют флокулами. Связь между числом частиц в одной флокуле m , размером частиц r и размером флокулы l выражается формулой

$$m = \left(\frac{l}{r}\right)^f. \quad (1)$$

Показатель степени f этой формулы называется фрактальной размерностью флокул, а саму формулу следует рассматривать как определение понятия

фрактальная размерность. Под размером частицы подразумевается ее диаметр, если она имеет сферическую форму, и диаметр сферы, описанной вокруг частицы, для несферических частиц. В качестве геометрического размера флоккулы выступает диаметр l сферы, описанной вокруг флоккулы.

Другой подход — это характеристика кластера объемной долей дисперсной фазы α :

$$m = \frac{3\alpha_2 V}{4\pi r^3},$$

где V — объем сферы, описанной вокруг кластера.

В каждый момент времени дисперсную фазу можно поделить на большое количество подфаз, каждая из которых состоит из флоккул, содержащих определенное количество начальных частиц. Например, первая подфаза содержит одиночные частицы, вторая — флоккулы из двух частиц, третья — из трех и т.д.

Количественное изменение состава этих подфаз описывается уравнением Смолуховского [2, 3, 6–13]:

$$\frac{\partial n(m, t)}{\partial t} = \int_0^m \frac{K(\bar{m}, m^*)}{2} n(\bar{m}, t) n(m^*, t) d\bar{m} - n(m, t) \int_0^\infty K(\bar{m}, m) n(\bar{m}, t) d\bar{m},$$

где $m^* = m - \bar{m}$, $n(m, t)$ — количество флоккул, содержащих m частиц в момент t , а $K(m_1, m_2)$ — ядро уравнения. Ядро задает характер столкновений.

Как правило, качественное изменение состава подфаз характеризуется средней фрактальной размерностью или объемной долей дисперсной фазы. А изменение этих характеристик зависит от физических параметров дисперсной фазы, течения несущей среды и скоростей, с которыми сталкиваются частицы.

От физических параметров зависит глубина проникновения флоккул друг в друга при столкновениях, вероятность слипания, скорости и углы, при которых происходят отскоки, слипания или дробления [2, 14–18].

Широко распространен подход, при котором расчет течения двухфазной системы проводится как компьютерный эксперимент по нескольким эмпирически полученным формулам.

Например, Блум и др. [2, 14–18] поделили все возможные результаты столкновений (рис. 1) на группы и эмпирически находят условия, при которых возможен тот или иной результат.

Для достаточно рыхлых агрегатов они разработали такую схему исходов столкновений:

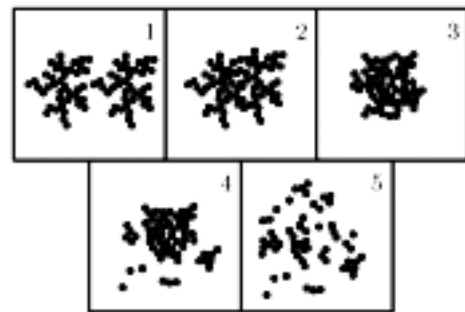


Рис. 1. Результаты столкновения

1. Кластеры прикасаются и так застывают.
2. Кластеры сталкиваются и слегка сжимаются.
3. Кластеры сталкиваются и сильно сжимаются.
4. Кластеры сталкиваются, сильно сжимаются и от образовавшейся структуры отлетают отдельные частицы и небольшие структуры.
5. Кластеры сталкиваются и распадаются на отдельные, небольшие структуры.

Результат столкновения зависит от следующих параметров: среднего количества связей частиц в кластере n_k ; кинетической энергии E_k ; энергии, которая необходима для разрыва связи между двумя одиночными частицами E_{br} и энергии, которую надо приложить, чтобы прокатить одну частицу по другой на четверть оборота E_r . Соотношения между параметрами представлены в табл. 1.

Среднее количество связей может быть найдено из соотношения

$$n_k = \frac{m}{m_0},$$

где m, m_0 — масса агрегата и масса единичной частицы.

Таблица 1. Отношение физических величин для разных типов столкновения двух одинаковых агрегатов [2]

Тип столкновения	Соотношение между параметрами
1	$E_k < 5E_r$
2	$E_k \approx 5E_r$
3	$E_k \approx 1n_k E_r$
4	$E_k \approx 3n_k E_{br}$
5	$E_k > 10n_k E_{br}$

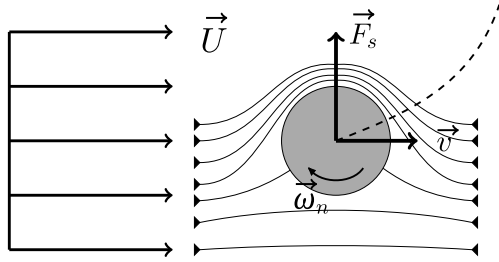


Рис. 2. Действие силы Магнуса

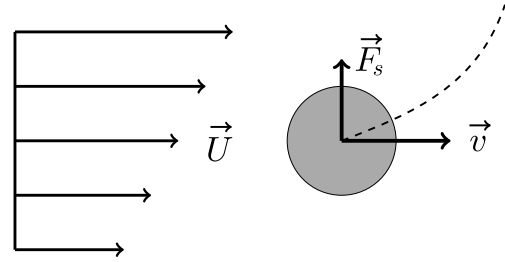


Рис. 3. Действие силы Саффмана

Кинетическая энергия находится по формуле

$$E_k = \frac{mv^2}{2},$$

где v — модуль вектор скорости.

Энергия разрыва:

$$E_{br} = \frac{m_o v_s^2}{4},$$

где v_s — предельная скорость, при которой две одиночные частицы сцепляются при лобовом столкновении.

Энергия качения:

$$E_r = \pi s F_r,$$

где F_r — сила качения.

3. Движение дисперсной фазы

Движение дисперсной фазы обуславливается влиянием на нее сил межфазного взаимодействия и внешних сил.

При расчетах, в зависимости от используемой модели, можно рассматривать действия сил на отдельную частицу или на какой-либо объем.

На частицы дисперсной фазы действуют описанные ниже силы [2, 3, 5–7, 19–22].

Центробежная сила действует на частицу в криволинейном потоке, отбрасывая ее к краю:

$$\vec{F}_c = m_p \vec{\omega}^2 R = \frac{\pi \rho_p d^3 v_\theta^2}{6R},$$

где m_p — масса частицы; ω — угловая скорость; R — радиус вращения; ρ_p — плотность частицы; d — диаметр; v_θ — касательная составляющая скорости.

Одной из самых значимых сил является сила сопротивления среды, она препятствует движению частицы в среде:

$$\vec{F}_D = \frac{6\pi\eta r^2 \vec{v}}{(A + Q)l},$$

где η — вязкость среды; r — радиус частицы; v — скорость частицы; $A + Q$ — коэффициент, показывающий характер отражения молекул среды от частиц; l — средняя длина пробега молекул.

В общем случае эту силу можно записать как

$$\vec{F}_D = \frac{C_D \rho S (\vec{U} - \vec{v})^2}{2}, \quad (2)$$

где C_D — коэффициент сопротивления; ρ — плотность среды; S — поперечное сечение частицы; U — скорость потока; v — скорость частицы.

Сила Магнуса [20] — подъемная сила, действующая на вращающуюся частицу, возникает при обтекании вязкой средой вращающегося тела и направлена перпендикулярно движению потока (рис. 2). Эта сила вызвана перепадами давления между сторонами частицы из-за разности скорости вследствие поворота:

$$F_{Mag} = \frac{\pi}{8} \rho C_{Mag} d_p^2 (\vec{U} - \vec{v})^2, \quad (3)$$

где C_{Mag} — коэффициент подъемной силы.

Сила Саффмана — подъемная сила, возникающая за счет неравномерности поля течения жидкости (рис. 3). Подробнее она описана в работах [20, 21].

Если в поперечном направлении потока давление распределено неравномерно, то на частицу в этом потоке будет действовать сила Саффмана, а перемещение частицы будет происходить за счет инерционных эффектов:

$$\vec{F}_S = 1.615 \sqrt{\nu} d_p^2 (\vec{U} - \vec{v}) \sqrt{|\dot{\gamma}|} \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}),$$

где $\dot{\gamma} = \frac{\delta U}{\delta R}$ — скорость сдвига; ν — кинематическая вязкость среды.

Сила тяжести:

$$\vec{F}_G = m_p \vec{g},$$

Для силы Архимеда можно записать формулу общего случая, когда частица находится во вращательном движении:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{AG} = \frac{m_f v_\theta^2}{R} + m_f \vec{g}, \quad (4)$$

где m_f — масса жидкости, вытесненной частицей; v_θ — касательная составляющая скорости.

За счет того, что при ускорении частицы окружающая среда тоже должна ускориться, нужно учитывать эффект присоединенной массы:

$$F_{VM}^{\vec{}} = \frac{1}{2} C_v \rho m_p \left(\frac{D\vec{U}}{Dt} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right),$$

где C_v — коэффициент присоединенной массы.

Градиент давления воздействует на частицу в среде следующим образом:

$$F_{VM}^{\vec{}} = \frac{m_p}{\rho} \nabla p,$$

где p — давление в циклоне.

Сила Бассе [9] возникает из-за отставания пограничного слоя при изменении относительной скорости частицы. То есть то, как быстро изменяется скорость частицы будет зависеть и от предыдущего движения, так как частица не успевает полностью изменить скорость из-за инерции:

$$\vec{F}_B = 1.5 d_p^2 \sqrt{\pi \rho \mu} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\delta(\vec{U} - \vec{v})}{\delta \tau} d\tau.$$

Как правило, при моделировании двухфазного течения учитывают лишь те силы, которые оказывают наиболее ощутимое влияние на движение. Обычно это центробежная сила, сила тяжести, сила сопротивления среды. Также достаточно большое влияние оказывают сила Магнуса и сила Архимеда.

4. Коэффициент сопротивления частиц

При создании различных технических устройств, как правило, применяются сферические объекты. Примером таких устройств могут служить аппараты с неподвижным слоем гранулированной среды, которые широко используются в нефтехимической и других отраслях промышленности. Именно поэтому важно понимать и уметь описывать поведение твердой частицы в потоке жидкости или газа.

Сила сопротивления, которая действует на поверхность частицы, движущейся с относительной скоростью $\vec{U}_r = \vec{U} - \vec{v}$ в бесконечном потоке ньютоновской жидкости, зависит только от течения жидкости в непосредственной близости от нее. Из (2) видно, что коэффициент сопротивления показывает зависимость между силой F_D , действующей на частицу, и инерционными силами несущей фазы.

Коэффициент C_D зависит от многих параметров, но для частицы определенной формы можно

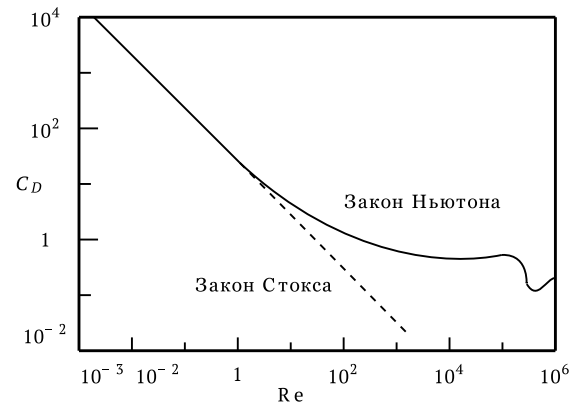


Рис. 4. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для сферической частицы [24]

Таблица 2. Зависимость коэффициента C_D от Re для сфер [24]

Re	C_D	Re	C_D
0,05	480	20	2,55
0,1	240	50	1,50
0,2	120	100	1,07
0,5	49,5	200	0,77
1,0	26,5	500	0,55
2,0	14,4	1000	0,46
5,0	6,9	2000	0,42
10	4,1	5000	0,385

показать, что он является функцией только числа Рейнольдса $Re = \frac{U_r d \rho}{\mu}$, где d — некоторый линейный размер частицы [23]. В работе [24] приводится зависимость между коэффициентом сопротивления и числом Рейнольдса для сферической частицы. Результаты представлены на рис. 4.

Здесь по оси абсцисс откладывается значение числа Re , а по оси ординат — значение коэффициента C_D . Из рисунка следует, что при увеличении значения числа Рейнольдса до 0,2, коэффициент сопротивления C_D резко уменьшается, где $C_D = \frac{24}{Re}$ — закон Стокса. Затем следует промежуточный интервал значений $0,2 < Re < 500$, где C_D все еще зависит от числа Рейнольдса. С возрастанием $Re > 500$ коэффициент C_D можно считать постоянным (закон Ньютона) и примерно равным 0,44. Таким образом выделяются три диапазона изменений значений числа Рейнольдса. Точные данные, соответствующие рис. 4, представлены в табл. 2, и являются результатом многочисленных экспериментов со сферическими частицами [24].

При математическом моделировании процессов взаимодействия потоков газа или жидкости с твердыми частицами, более удобной может оказаться аналитическая запись коэффициента сопротивления C_D как функции от числа Рейнольдса $C_D(\text{Re})$.

Коэффициент сопротивления частицы с достаточной точностью можно вычислить в соответствии с асимптотической формулой Клифта и Ковена [19]:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \left(1 + 0,15\text{Re}^{0,687} + \frac{0,0175\text{Re}}{1 + 42500\text{Re}^{-1,16}} \right).$$

Эта формула применима для $\text{Re} \leq 2 \cdot 10^5$. Другие выражения для расчета коэффициента сопротивления представлены в работах [13, 24]. Для достоверного моделирования целесообразней всего проверять применимость этих формул по табл. 2, так как каждое выражение хорошо аппроксимирует экспериментальные данные в указанном для нее диапазоне изменения значений числа Рейнольдса.

При моделировании двухфазных течений удобнее использовать континуальную модель, в которой сила межфазного взаимодействия для единицы рассматриваемого объема примет вид:

$$F_D = \frac{3C_D}{8} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \rho_1^0 \bar{U}_r^2}{r}, \quad (5)$$

где α_1 — объемное содержание несущей фазы; α_2 — объемное содержание дисперсной фазы; ρ_1^0 — истинная плотность несущей фазы; r — радиус сферической частицы.

Таким образом, при обтекании одиночного шара бесконечным потоком коэффициент сопротивления представляет известную зависимость и является функцией числа Рейнольдса $C_D(\text{Re})$. Однако, если рассматривать процессы протекания сквозь плотные монодисперсные зернистые слои, то окажется, что $C_D < 0,4$ при больших значениях числа Re , так как на коэффициент сопротивления оказывает дополнительное влияние плотность упаковки [26]. Изучением такого рода процессов активно занимался М.А. Гольдштик. Результаты его работ изложены в монографиях [25–27]. Он приводит выражение для коэффициента сопротивления $\zeta = \zeta(\text{Re}, \tau)$, где τ — объемная концентрация твердой фазы, и записывает итоговое выражение для коэффициента сопротивления:

$$\zeta = 2\psi \left(1 + \frac{422}{\text{Re}_m} \right), \quad (6)$$

где $\text{Re}_m = \frac{\text{Re}}{\psi}$, величина ψ — минимальное относительное проходное сечение, вычисляется согласно правилу:

$$\psi = \begin{cases} 1 - 1,164\tau^{2/3}, & 0 \leq \tau \leq 0,6. \\ 0,508 - 0,56\tau, & \tau \geq 0,6. \end{cases} \quad (7)$$

Соотношения (6)–(7) были получены М.А. Гольдштиком путем многочисленных экспериментальных исследований, проводимых в широком диапазоне изменений объемного содержания газовой фазы и значений числа Рейнольдса вплоть до $\text{Re}_m \approx 2 \cdot 10^5$ [26].

Следует отметить, что при переходе к континуальной модели описания взаимодействия потока с плотным слоем гранулированной среды формула (5) остается верной, но с коэффициентом сопротивления ζ .

5. Пример математической модели

Опираясь на вышеизложенный материал, можно составить континуальную математическую модель, описывающую динамику двухфазной системы.

Рассматривается система газ—дисперсная фаза. Дисперсная фаза представляет собой множество сферических частиц. В данной модели будут сделаны следующие допущения:

1. Дисперсная фаза состоит из сферических частиц одинакового размера, для которых выполняется предположение, что их размеры малы относительно линейных размеров течений.
2. Время коагуляции частиц при соударении пренебрежимо мало по сравнению со средним временем между столкновениями.
3. После соударения частиц образуются частицы большей массы, имеющие фрактальную структуру.
4. Воздействие газовой фазы на дисперсную описывается осредненными по пространству силами сопротивления среды, силой Архимеда и силой Магнуса.
5. Также на дисперсную среду действуют осредненные по пространству сила тяжести и центробежная сила.
6. Воздействие дисперсной фазы на газовую среду пренебрежимо мало вследствие малой объемной доли дисперсной фазы ($\alpha_2 < 10^{-6}$).
7. В силу малой концентрации дисперсной фазы силами взаимодействия между частицами можно пренебречь.

С учетом данных предположений систему уравнений для данной математической модели можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla_l \rho_i v_i^l &= 0, \\ \rho_i \frac{\partial v_i^l}{\partial t} + \rho_i v_i^k \frac{\partial v_i^l}{\partial x^k} &= -\alpha_i \nabla^l p + \nabla_k \tau_i^{lk} + \\ &+ \rho_i g^l + \theta(i-2) \frac{\rho_i r v_i^{l2}}{R} + F_{ji}^l, \end{aligned}$$

где v_i^l — l -ая составляющая i -ой фазы; ρ_i — эффективная плотность i -ой фазы ($\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$, ρ_i^0 — истинная плотность); α_i — объемная концентрация i -ой фазы; τ_i^{lk} — тензор сдвиговых напряжений i -ой фазы; p — давление; g — ускорение свободного падения; F_{ji}^l — l -ая составляющая вектора силы, действующего со стороны j -ой фазы на i -ую; r — радиус частицы; $R = \frac{|v|^2}{|a_n|}$ — радиус кривизны траектории ($a_n = \sqrt{a^2 - a_\theta^2}$ — нормальное ускорение; a — полное ускорение; a_θ — тангенциальное ускорение); $\theta(i-2)$ — функция Хевисайда.

Из предположений следует $\tau_2^{lk} = 0$, $F_{21}^l = 0$, а тензор напряжений τ_1^{lk} запишем в следующем виде:

$$\tau_1^{lk} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_1^l}{\partial x^k} + \frac{\partial v_1^k}{\partial x^l} \right) - \frac{2}{3} \delta_{lk} \frac{\partial v_j}{\partial x^j} \right],$$

где μ — динамическая вязкость газовой фазы; δ_{lk} — символ Кронекера.

Так как рассматривается континуальная модель, то учитывается воздействие сил на единицу объема. Сила тяжести и центробежная сила приведены к нужному виду в уравнениях математической модели. Теперь запишем силы межфазного взаимодействия F_{12}^l .

Силу Магнуса (3) и силу Архимеда (4) можно переписать в следующем виде:

$$F_{Mag}^l = \frac{3}{8} \alpha_1 \alpha_2 \rho_1^0 C_{Mag} (U^l - v^l)^2,$$

$$F_A^l = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \rho_1^0 (v_\theta^l)^2}{R} + \alpha_2 \alpha_1 \rho_1^0 g^l,$$

Сила сопротивления среды уже записана в необходимом виде в уравнении (5).

Получаем

$$F_{12}^l = F_{Mag}^l + F_A^l + F_D^l.$$

Дисперсная фаза в каждом объеме и в каждый момент времени характеризуется средним количеством частиц во флокуле и средней фрактальной размерностью. Из (1) можно найти средний диаметр описанной вокруг флокулы сферы l . Среднее количество столкновений между флокулами в единице объема выражается следующим образом

$$K = \frac{4}{3} \pi (2l)^3 n^2,$$

где n — количество частиц в единице объема, которое находится по следующей формуле:

$$n = \frac{3\alpha_2}{4\pi r^3 \left(\frac{l}{r} \right)^f},$$

Следовательно, количество флокул в некотором объеме V будет $N_0 = nV$. В следующий временной шаг, когда произошло K столкновений, количество флокул станет $N = nV - K$. Тогда можно найти значение среднего количества частиц во флокуле в следующий момент времени:

$$m = \frac{3\alpha_2 V}{4\pi r^3 N}.$$

Из (1) можно найти новое значение средней фрактальной размерности:

$$f = \frac{\ln m}{\ln \frac{l}{r}}.$$

6. Заключение

В работе был проведен обзор литературы, связанной с моделированием процессов в системе флюид-дисперсная среда. Были представлены основные законы движения и эволюции дисперсной фазы. Приведены источники современных исследований. Представленные результаты могут быть полезными при построении континуальных математических моделей для описания динамики двухфазных систем, содержащих гранулированные частицы. Пример такой модели приведен в разделе 5. Также примером могут послужить модели, описывающие процесс взаимодействия набегающего потока газа или жидкости с неподвижным слоем мелкодисперсного катализатора, неизбежно присутствующего при создании различных установок.

Список литературы

- [1] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. I, II. 5-е изд. М.: Наука, 1994.
- [2] Blum J. Dust agglomeration // Advances in Physics. 2006. Vol. 55. P. 881–947.
- [3] Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд. АН СССР, 1955. 352 с.
- [4] Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М.: Наука, 1991. 134 с.
- [5] Колесниченко А.В., Маров М.Я. К моделированию процесса агрегации пылевых фрактальных кластеров в протопланетном ламинарном диске // УФН. 1995. Т. 165, № 3. С. 263–283.
- [6] Долгонос Б.М. Равновесное распределение частиц в дисперсной системе с коагуляцией и распадом агрегатов // Коллоидный журнал. 2001. Т. 63, № 1. С. 32–38.

- [7] Дьяченко Н.Н., Дьяченко Л.И., Математическая модель течения полидисперсного ансамбля твердых частиц в ускоряющихся потоках // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2010. Т. 3. С. 95–99.
- [8] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. В 2-х ч. М.: Наука, 1987.
- [9] Губайдуллин Д.А., Осипов П.П. Дрейф включений в акустических полях с учетом нестационарных сил // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН: Фолиант. 2011. Т. 1. С. 82–97.
- [10] Dominik C, Tielens A. The physics of dust coagulation and the structure of dust aggregates in space // The Astrophysical Journal. 1997. Vol. 480. P. 647–673.
- [11] Seizinger A., Speith R., Kley W. Compression behavior of porous dust agglomerates // A&A. 2012. Vol. 541. P. 766–776.
- [12] Ганиев Р.Ф., Украинский Л. Е. Нелинейная волновая механика и технологии. М: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 712 с.
- [13] Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 320 с.
- [14] Blum J. Grain Growth and Coagulation // Astrophysics of Dust. 2004. Vol. 309. P. 369–391.
- [15] Blum J., Munch M. Experimental investigations on aggregate-aggregate collisions in the early solar nebula // Icarus. 1993. Vol. 106. P. 151–167.
- [16] Blum J., Schrapler R., Davidsson B. J.R., Trigo-Rodriguez J. M. The Physics of Protoplanetary Dust Agglomerates. I. Mechanical Properties and Relations to Primitive Bodies in the Solar System // The Astrophysical Journal. 2006. Vol. 652(2). P. 1768–1781.
- [17] Blum J., Wurm G. Experiments on Sticking, Restructuring, and Fragmentation of Proplanetary Dust Aggregates // Icarus. 2000. Vol. 143. P. 138–146.
- [18] Blum J., Wurm G. The Growth Mechanisms of Macroscopic Bodies in Protoplanetary Disks // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 2008. Vol. 46. P. 21–56.
- [19] Авдеев Б.А. Модель движения частиц в Магнитном гидроциклоне // ТАРП. 2013. Т. 5(1), вып. 1(13). С. 36–41.
- [20] Яценко В.П. Определение силы, действующей на сферическую твердую частицу в потоке со сдвигом // Физика аэродисперсных систем. 2002. Т. 39. С. 240–248.
- [21] Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 22. P. 385–400.
- [22] Ивлев Л.С., Довгалюк Ю.А. Физика атмосферных аэрозольных систем. СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. 194 с.
- [23] Rayleigh. On the question of the stability of the flow of liquids // Philosophical magazine. 1892. V. 34. P. 59–70.
- [24] Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. Перевод с английского. М.: Мир, 1975. 380 с.
- [25] Гольдштик М.А., Лебедев А.В., Сорокин В.Н. Клапаный эффект в зернистом слое // ИФЖ. 1978. Т. 34(3). С. 389–393.
- [26] Гольдштик М.А. Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск: Институт теплофизики, 1984. 164 с.
- [27] Гольдштик М.А. Парадоксы вязких течений. Новосибирск: Институт теплофизики. 1986. 38 с.
- [28] Михайленко К. И., Валеева Ю. Р. Моделирование осаждения мелкодисперсной взвеси из воздуха при прохождении волн давления. Выч. мет. программирование. 2013. Т. 14(3). С. 328–333