



# Прямое численное моделирование трехмерной динамики сжимаемых пузырьков в акустическом поле методом граничных элементов<sup>1</sup>

Иткулова Ю.А.\*,\*\*, Абрамова О.А.\*,\*\*, Гумеров Н.А.\*\*\*, Ахатов И.Ш.\*,\*\*

\* Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем» БашГУ, Уфа

\*\* Institute for Advanced Computer Studies, University of Maryland, USA,

\*\*\* North Dakota State University, USA

\*\*\*\* Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе исследуется динамика пузырьков, содержащих сжимаемый газ, под действием акустического поля при малых числах Рейнольдса. Численный подход основан на методе граничных элементов (МГЭ), который эффективен для трехмерного моделирования. Применение стандартного МГЭ при исследовании динамики сжимаемых пузырьков сталкивается с проблемой вырожденности алгебраической системы. Для решения этой проблемы используются дополнительные соотношения, основанные на принципе взаимности Лоренца. Представлены тестовые расчеты динамики одного и нескольких пузырьков в акустическом поле.

## 1. Введение

Пузырьки широко встречаются в естественных условиях, а также используются во многих технологических процессах, например, при очистке загрязненных поверхностей ультразвуком. Описанию коллективного поведения пузырьков в акустических полях посвящен ряд работ (например, [1], где можно найти обзор современной литературы), включая теоретические и экспериментальные исследования по самоорганизации пузырьков, проводимых в Центре микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем [2, 3]. Эти работы показывают, что эффекты самоорганизации существенно зависят от силы вязкого сопротивления, действующей на пузырьки со стороны жидкости, что требует более детального рассмотрения динамики пузырьков в акустических полях, включая методы прямого численного моделирования пузырьков произвольной формы.

Расширение, сжатие, взаимодействие сжимаемых пузырьков широко изучались ранее (см., например, [4, 5]). Как правило, движение жидкости

в этих работах обычно рассматривалось при больших числах Рейнольдса. Для произвольных чисел Рейнольдса при радиальных осцилляциях сферического пузырька существует точное решение, которое может быть найдено из уравнений Рэлея–Плессета [6]. Оно также использовалось для исследования направленной диффузии на динамику одиночного сферически-симметричного пузырька [7, 8]. Поведение несферических сжимаемых пузырьков в акустических полях при малых числах Рейнольдса изучено в меньшей степени, несмотря на существующий интерес к этим исследованиям со стороны микро- и нанотехнологий. Решение таких задач может быть получено методом граничных элементов (МГЭ) для стоковых потоков [9], который эффективен для трехмерных задач, так как все расчеты связаны только с границей.

Однако моделирование динамики сжимаемых пузырьков стандартным МГЭ приводит к некоторым сложностям в формулировке из-за вырожденности расчетной системы для уравнений Стокса. В работе [10] определялось давление внутри пузырька с учетом изменения его объема под действием окружающей жидкости в стоковом режиме для двумерного случая. Скорость и давление на свободной поверхности вычислялись, используя стан-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Министерства образования и науки РФ (11.G34.31.0040) и исследовательской ассоциации Кристиана Доплера (Германия).

дартный МГЭ с добавлением условия на скорость изменения объема пузырька, что обеспечивало однозначное решение. Возникающие гиперсингулярные интегралы оценивались аналитически. В случае аналогичной и более реалистичной задачи для трехмерного случая появляются аналитические и вычислительные сложности в оценке гиперсингулярных интегралов. Для решения этой проблемы в [11] предложен подход, основанный на применении принципа взаимности Лоренца для исключения гиперсингулярности. Новый метод заключается в том, что одно из уравнений в расчетной системе заменяется на тождество Лоренца для давления. Этот принцип используется в настоящей работе как дополнительные соотношения в общей системе, что позволяет с наименьшими усилиями модифицировать трехмерный код для исследования несжимаемых капель (см. предыдущие работы авторов [12, 13]) в трехмерный код для исследования сжимаемых пузырьков. Некоторые другие подходы для вычисления динамики сжимаемых пузырьков в стоковом режиме можно найти в литературе [14–16].

В настоящей статье разработан и реализован подход на основе трехмерного модифицированного МГЭ для моделирования динамики сжимаемых пузырьков. Метод был протестирован для расчета динамики одного и нескольких пузырьков.

## 2. Математическая модель

Исследуется динамика газового пузырька ( $g$ ) в несжимаемой жидкости ( $l$ ) вязкости  $\mu$  и занимающую область  $V_l$  под действием акустического поля. Предполагается, что динамической вязкостью и плотностью газа можно пренебречь. Течение жидкости описывается уравнениями Стокса

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  — скорость движения межфазной границы  $S$ ;  $p$  — давление, которое включает гидростатический компонент.

Выполняется следующее условие на межфазной границе:

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = f\mathbf{n}, \quad f = p_\infty - p_g + 2\gamma k + \rho g \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений;  $\mathbf{f}$  — вектор нормально напряжения;  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности  $S$ , направленная в сторону жидкости;  $\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $k$  — средняя кривизна поверхности пузырька;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения;  $\mathbf{x}$  — радиус-вектор рассматриваемой точки;  $p_\infty, p_g$  — давление в жидкости и в газе соответственно.

Давление в газе изменяется по изотермическому закону

$$p_g(t) = p_{g0} \frac{V_{g0}}{V_g(t)}, \quad p_{g0} = p_{\infty 0} + \frac{2\gamma}{a_0}, \quad (3)$$

где параметры с индексом «0» — начальные значения при  $t = 0$ ;  $V_g$  — объем пузырька;  $a$  — радиус пузырька. Это связано с тем, что малые числа Рейнольдса обычно возникают в изотермическом режиме, когда кинематическая вязкость жидкости меньше, чем температуропроводность газа. Таким образом, толщина теплового пограничного слоя в газе больше динамического пограничного слоя в жидкости, который в свою очередь больше, чем размер пузырька.

Давление в жидкости в момент времени  $t$  определяется как

$$p_\infty(t) = p_{\infty 0} + p_a(t), \quad p_a(t) = P_a \sin(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

где  $p_a(t)$  — давление акустического поля в момент времени  $t$ ;  $P_a, \omega, \varphi$  — амплитуда, частота, сдвиг по фазе колебаний акустического поля.

Кинематическое условие описывает динамику пузырька

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (5)$$

## 3. Модифицированный метод граничных элементов

### 3.1. Стандартный МГЭ

Уравнения Стокса (1) могут быть переписаны в интегральной форме [9]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y} \in V_l, \quad \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} \in S, \quad \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) \end{aligned} \right\} = - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (6)$$

$\mathbf{G}$  и  $\mathbf{K}$  — тензоры второго и третьего ранга, компоненты которых в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right), \\ T_{ijk}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= -\frac{3}{4\pi} \frac{r_i r_j r_k}{r^5}, \\ K_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= T_{ijk}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot n_k(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$r_i = y_i - x_i, \quad r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Однако, скорость, определяемая из уравнений (6), не зависит от перепада давления  $p_\infty - p_g$ . Действительно, для точки

на границе мы имеем

$$\begin{aligned} & -\mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) + \frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{y}) + \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \times \\ & \quad \times \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \\ & = -\frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \\ & = -\frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) (2\gamma k(\mathbf{x}) + \\ & \quad + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in S, \end{aligned} \quad (8)$$

ввиду тождества [9]

$$\int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

В [10] предложено использовать дополнительное соотношение для скорости изменения объема пузырька

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \dot{V}_g, \quad (10)$$

где скорость изменения объема пузырька  $\dot{V}_g$  заранее определена. Но так как разность  $p_\infty - p_g$  не введена в формулировку задачи, то необходимо еще добавить соотношение на  $\dot{V}_g$  и  $p_\infty - p_g$ . Эта задача разрешена для двумерного случая в [11], где определено дополнительное уравнение для давления в пузырьке, основанное на принципе взаимности Лоренца. Однако, в этой работе используется дополнительное, недостаточно обоснованное, условие на нормальную производную давления на границе. В настоящей работе, в отличие от [11], дополнительное условие на давление не ставится, а соотношения, следующие из тождества Лоренца, используются как дополнительные уравнения в общей системе.

### 3.2. Принцип взаимности Лоренца

Рассматриваются два Стоксовых течения  $(\mathbf{u}, \mathbf{f})$  и  $(\mathbf{u}', \mathbf{f}')$ . Тогда, по принципу взаимности Лоренца имеем

$$\int_S \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Заметим, что любое потенциальное течение

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \nabla \phi'(\mathbf{x}), \quad \nabla^2 \phi' = 0, \quad (12)$$

это решение уравнений Стокса с давлением  $p' = 0$

$$\begin{aligned} \nabla p' &= -\mu \nabla^2 \mathbf{u}' = -\mu \nabla (\nabla^2 \phi') = \mathbf{0}, \\ p'|_{r \rightarrow \infty} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = \nabla^2 \phi' = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для такого потенциального течения компоненты тензора напряжений определяются как

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= -p' + \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= 2\mu \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x_i \partial x_j} = 2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (14)$$

Компоненты вектора нормального напряжения находятся из (2)

$$f'_i = \sigma'_{ij} n_j = 2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} n_j. \quad (15)$$

Таким образом, тождество Лоренца можно записать:

$$\begin{aligned} & \int_S u_i(\mathbf{x}) s'_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \\ & = \frac{1}{2\mu} \int_S f(\mathbf{x}) u'_i(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \\ & \quad s'_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (16)$$

### 3.3. Дополнительное условие в случае одиночного пузырька

Рассмотрим выбор потенциала  $\phi'$  в случае одиночного пузырька. Пусть точка  $\mathbf{x}_0$  находится внутри пузырька. Для удобства ее можно взять в центре пузырька. В качестве  $\phi'$  мы можем взять функцию Грина для уравнения Лапласа с оценкой в точке  $\mathbf{x}_0$ :

$$\phi'(\mathbf{x}) = G_L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad G_L(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r}, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad (17)$$

где  $r_i = x_i - x_{0i}$ ,  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ . Тогда ядра уравнения (16) можно вычислить:

$$\begin{aligned} u'_i &= \frac{\partial \phi'}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{1}{r} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial r_i} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{r_i}{r} = -\frac{r_i}{4\pi r^3}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} s'_{ij} &= \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial r_j} \left( -\frac{r_i}{4\pi r^3} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3r_i}{r^4} \frac{\partial r}{\partial r_j} \right) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3r_i r_j}{r^5} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

### 3.4. Дополнительное условие в случае нескольких пузырьков

Рассмотрим два пузырька, предполагая, что эффекты силы тяжести и поверхностного натяжения незначительны по сравнению с силой давления из-за перепада  $p_\infty - p_g$ . Поэтому  $f(\mathbf{x})$  возьмем как постоянное значение  $f^{(1)}$  на поверхности пузырька 1 и  $f^{(2)}$  на поверхности пузырька 2. Эти значения могут быть различными, так как пузырьки

могут иметь разные объемы. В этом случае уравнение (16) можем записать как:

$$\begin{aligned}
 & \int_{S^{(1)}} u_i(\mathbf{x}) s'_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \\
 & + \int_{S^{(2)}} u_i(\mathbf{x}) s'_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \\
 & = \frac{1}{2\mu} f^{(1)} \int_{S^{(1)}} u'_i(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \\
 & + \frac{1}{2\mu} f^{(2)} \int_{S^{(2)}} u'_i(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \\
 & = \frac{1}{2\mu} f^{(1)} \int_{S^{(1)}} \frac{\partial \phi'}{\partial n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \\
 & + \frac{1}{2\mu} f^{(2)} \int_{S^{(2)}} \frac{\partial \phi'}{\partial n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Предполагаем, что источник расположен в центре пузырька 1, в то время как пузырек 2 не имеет сингулярности внутри. В этом случае, так как  $\phi'$  не сингулярна на  $S^{(2)}$  и является гармонической функцией, мы имеем из теоремы Гаусса

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\mu} f^{(2)} \int_{S^{(2)}} \frac{\partial \phi'}{\partial n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \\
 & = \frac{1}{2\mu} f^{(2)} \int_{V_2^{(2)}} \nabla^2 \phi'(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Это означает, что значения  $f^{(2)}$  не будут влиять на поток, и хотя поверхность  $S^{(2)}$  возможно будет деформироваться под действием потока, созданного пузырьком 1, на динамику системы не будут влиять свойства газа, находящегося во втором пузырьке, что физически некорректно. Также  $f^{(2)}$  не влияет на течение, так как поток не чувствует источника внутри пузырька 2, что следует из гранично-интегральных уравнений (6). Более того, объем второго пузырька не будет изменяться из-за того, что все элементы жидкости за пределами пузырька 1 сохраняют объем.

Для исправления этой ситуации на случай двух и  $M$  пузырьков рассматривается  $M$  пробных течений (18)–(19) с центрами монополей, помещенными в центрах каждого пузырька.

#### 4. Численные результаты

Физические параметры расчетов необходимо подобрать так, чтобы моделируемый процесс соответствовал стоковому режиму. Таким образом, расчеты динамики одиночного сферического пузырька, полученные из обобщенного уравнения Рейля–Плессета (2-nd order)

$$\begin{aligned}
 a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \left[ p_{g0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 - p_{\infty}(t) - \frac{2\gamma}{a} - \frac{4\mu\dot{a}}{a} \right], \tag{22} \\
 a(0) = a_0, \quad \dot{a}(0) = 0
 \end{aligned}$$

должны соответствовать результатам, полученным из уравнения Рейля–Плессета, в котором пренебрегается инерцией (1-st order)

$$\begin{aligned}
 \dot{a} = \frac{a}{4\mu} \left[ p_{g0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 - p_{\infty}(t) - \frac{2\gamma}{a} \right], \tag{23} \\
 a(0) = a_0.
 \end{aligned}$$

На рис. 1 представлены графики изменения радиуса пузырька за один период колебаний акустического поля, полученные при решении уравнений второго (22) и первого (23) порядков для различных параметров акустического поля  $P_a$ ,  $\omega$  и радиуса пузырька  $a$ , плотности жидкости  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , вязкости  $\mu = 0.01 \text{ Па}\cdot\text{с}$ , с коэффициентом поверхностного натяжения  $\gamma = 0.05 \text{ Па/м}$ , начальным давлением  $p_{\infty 0} = 10^5 \text{ Па}$  и сдвигом по фазе  $\varphi = \pi$  акустического поля. Полученные решения хорошо согласуются друг с другом для выбранных параметров, что соответствует стоковому режиму. Дальнейшие расчеты проводились для  $P_a = 100 \text{ кПа}$ ,  $\omega/2\pi = 200 \text{ кГц}$ ,  $a = 1 \text{ мкм}$ , так как этот процесс происходит быстрее и с большей амплитудой.

Уравнение (23) позволяет оценить время релаксации радиуса пузырька

$$\tau_{\mu} < \frac{4\mu a_0}{3\Delta p a_0 - 2\gamma}, \tag{24}$$

где  $\Delta p$  — мгновенное изменение давления. Шаг по времени выбирается из условий  $\Delta t \ll \tau_{\mu}$  и  $\Delta t \ll \omega^{-1}$ .

На рис. 2(a) представлены кривые изменения радиуса пузырька за один период колебаний акустического поля при различной дискретизации пузырька (ВЕМ) и кривая точного решения (exact), полученного из решения уравнения (23). Как видно из графика, с увеличением расчетных узлов  $N$ , численная кривая наиболее близка к аналитической. График зависимости относительной погрешности от времени представлен на рис. 2(b). Можно видеть, что наибольшая ошибка возникает при достижении минимального давления акустического поля и также зависит от степени дискретизации пузырька. Общая относительная погрешность метода граничных элементов в пространстве  $L_{\infty}$  для  $N=162$  составляет 0.0112, для  $N=642$  равна 0.0028.

Физические параметры подбирались так, чтобы числа Рейнольдса  $Re = 2a\dot{a}\rho/\mu$  и Фурье  $Fo = a^2\omega\rho/\mu$  были достаточно малы. Как видно из рис. 3 значения безразмерных параметров значительно меньше единицы и своих максимальных значений  $Re_{max} = 0.047$  и  $Fo_{max} = 0.247$  достигают при максимальном радиусе пузырька.

На рис. 4 представлены десять пузырьков различного радиуса с гауссовым распределением, находящиеся на значительном расстоянии друг от друга, в различные моменты времени. Под действием

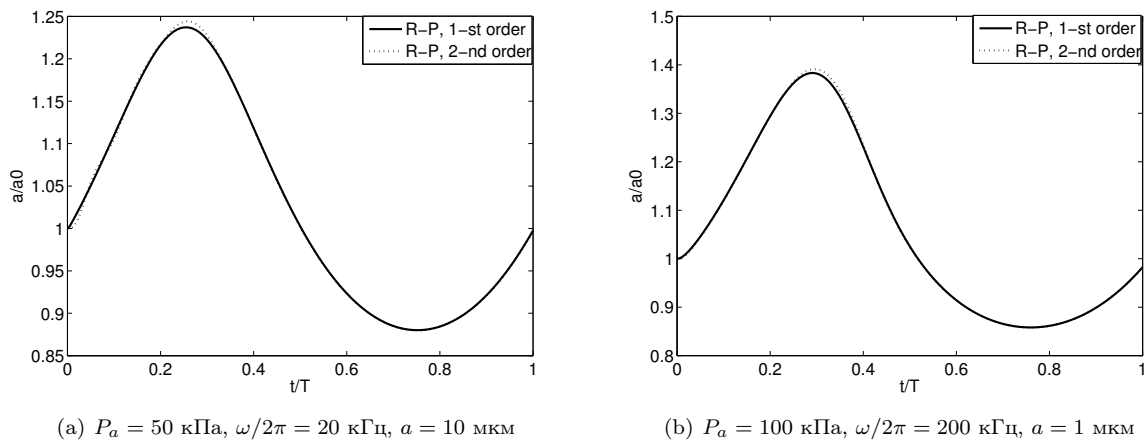


Рис. 1. Решения задач Коши (22) и (23)

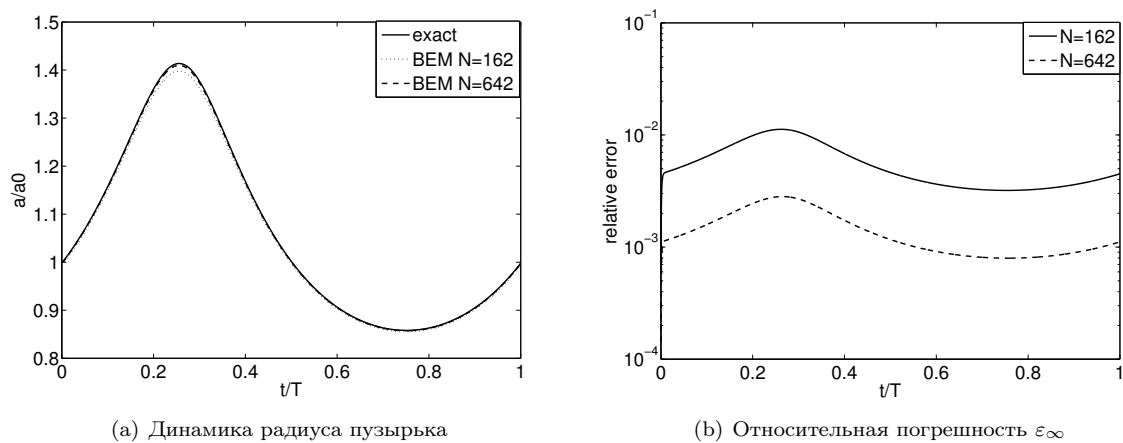


Рис. 2. Сравнение численного и точного решения

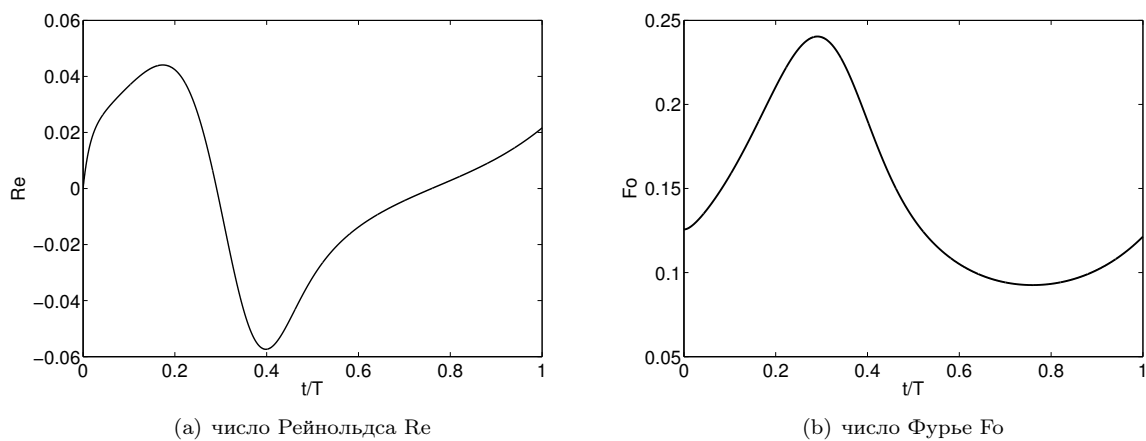


Рис. 3. Безразмерные параметры

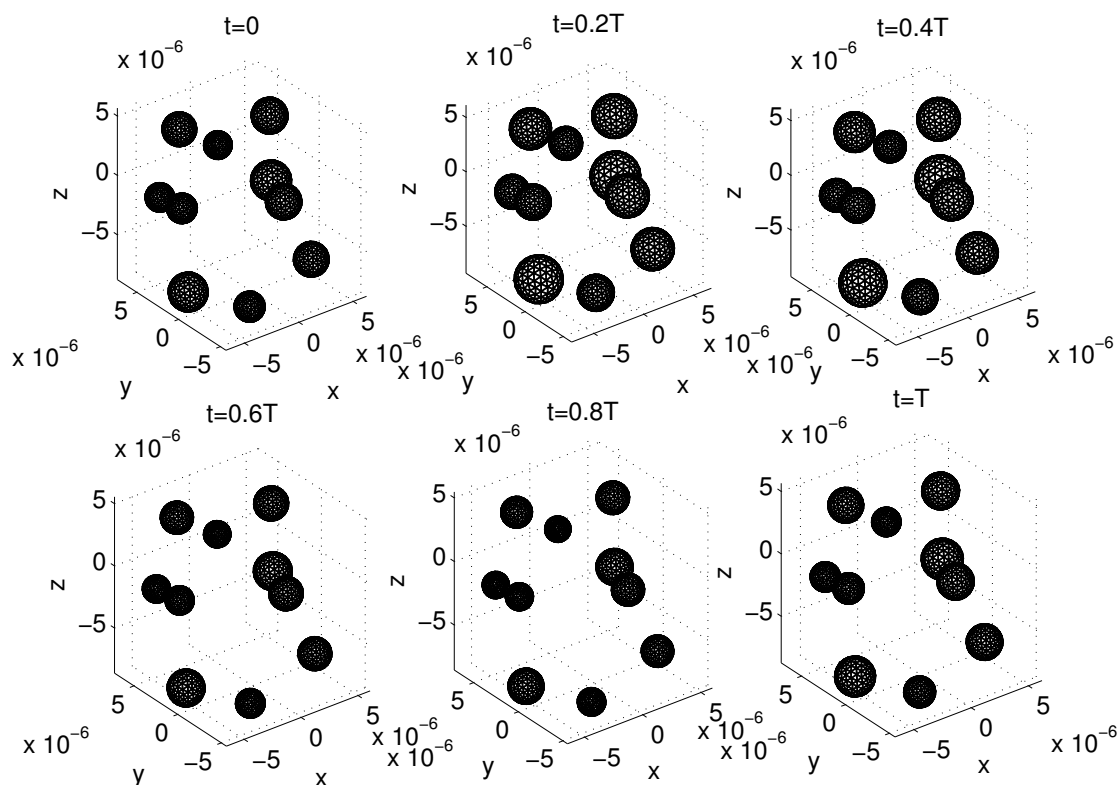


Рис. 4. Динамика нескольких пузырьков в акустическом поле

акустического поля пузырьки расширяются и сжимаются.

## 5. Заключение

Разработаны математическая модель и программный модуль для исследования динамики пузырьков, содержащих сжимаемый газ, под действием акустического поля методом граничных элементов в трехмерном случае. Для учета изменения объема пузырька применялся принцип взаимности Лоренца. Подобраны физические параметры, соответствующие стоковому режиму. Проведено сравнение численных расчетов с точным решением задачи Коши первого порядка для одиночного сферического пузырька. Исследована деформация нескольких пузырьков различных радиусов в акустическом поле.

## Список литературы

- [1] Xi X., Cegla F., Mettin R., Holsteyns F., and Lippert A. Collective bubble dynamics near a surface in a weak acoustic standing wave field // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 132, P. 37–47.
- [2] Gumerov N.A., Akhatov I.S. Numerical simulation of 3D self-organization of bubbles in acoustic fields // In:

C.-D. Ohl, E. Klaseboer, S.W. Ohl, S.W. Gong, and B.C. Khoo (eds), *Proceedings of the 8th International Symposium on Cavitation*. Singapore. 2012.

- [3] Gumerov N.A., Ohl C.-D., Akhatov I.S., Sametov S., Khasimullin M. Waves of acoustically induced transparency in bubbly liquids: theory and experiment // *21st International Congress on Acoustics, Montreal, Canada. Proceedings of Meetings on Acoustics*. 2013. V. 19, 045012.
- [4] Blake J.R., Gibson D.C. Cavitation bubbles near boundaries // *J Fluid Mech.* 1987. V. 19. P. 99–123.
- [5] Sangani A.S., Didwania A.K. Dynamic simulations of flows of bubbly liquids at large Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 250, P. 307–337.
- [6] Plesset M.S., Prosperetti A. Bubble dynamics and cavitation // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 9. P. 145–185.
- [7] Volkova E., Nasibullaeva E., Gumerov N. Numerical Simulations of Soluble Bubble Dynamics in Acoustic Fields // *Proc. IMECE'12. Texas, Houston*. 2012.
- [8] Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.D., Parltitz U., Lauterborn W. The role of surface tension in stable single bubble sonoluminescence // *Ph. Rev. Lett.* 1997. V. 78(2). P. 227–230.

- [9] Pozrikidis C. *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow* // New York: Cambridge University Press, 1992. 271 p.
- [10] Pozrikidis C. Expansion of a compressible gas bubble in Stokes flow // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 442, P. 171–189.
- [11] Pozrikidis C. Computation of the pressure inside bubbles and pores in Stokes flow // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 474, P. 319–337.
- [12] Itkulova Yu.A., Solnyshkina O.A., Gumerov N.A. Toward large scale simulations of emulsion flows in microchannels using fast multipole and graphics processor accelerated boundary element method // *Proc. IMECE'12. Texas, Houston.* 2012.
- [13] Абрамова О.А., Иткулова Ю.А., Гумеров Н.А. Моделирование трехмерного движения деформируемых капель в стоксовом режиме методом граничных элементов // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2013. Т. 6(2), С. 214–223.
- [14] Liu Y.J. A new fast multipole boundary element method for solving 2-D Stokes flow problems based on a dual BIE formulation // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2008. V. 32, P. 139–151.
- [15] Power H. The low Reynolds number deformation of a gas bubble in shear flow: a general approach via integral equations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 1992. V. 9, P. 31–37.
- [16] Power H. The interaction of a deformable bubble with a rigid wall at small Reynolds number: a general approach via integral equations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 1997. V. 19, P. 291–297.