УДК 532.5

Применение консервативной схемы при численном моделировании задачи диффузии для одиночного пузырька в акустическом поле[1]

Бутюгина Е.В.[*,], Насибуллаева Э.Ш.[*], Ахатов И.Ш.[**,***], Гумеров Н.А.[**,****]**

[*]Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа
[**]Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем, БашГУ, Уфа
[***]Department of Mechanical Engineering, North Dakota State University, USA
[****]Institute for Advanced Computer Studies, University of Maryland, USA

В работе представлен численный метод решения полной диффузионной задачи для одиночного пузырька, колеблющегося в акустическом поле, основанный на консервативной разностной схеме для уравнения диффузии, где роль закона сохранения играет непрерывность диффузионного потока. Разработанный метод позволяет также учитывать влияние изменения массы газа в пузырьке на динамику самого пузырька, которая является сильно нелинейной. Сравнение результатов расчета изменения массы газа в пузырьке по представленной схеме и стандартной схеме, не сохраняющей общую массу системы «газ–жидкость», показало, что во втором случае накопление ошибки расчета может дать физически некорректную картину.

1. Введение

В последнее время большое внимание уделяется исследованию явления акустической кавитации и связанных с ней физических явлений (самоорганизация пузырьков, многопузырьковая сонолюминесценция, химические реакции внутри пузырька и в жидкости и т.п.), наблюдаемых в физике, химии и биологии и находящих широкое практическое применение в технике, медицине и различных областях промышленности.

Задача самоорганизации пузырьков является актуальной, так как на сегодняшний день нет четкого представления о механизме процесса, и для его детального понимания необходимо прибегнуть к компьютерному моделированию и результатам экспериментальных исследований. Прямых экспериментов по изучению самоорганизации пузырьков на сегодняшний день насчитываются единицы: исследования новосибирской (Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН; например, [1, 2]) и немецкой (Третий физический институт, Университет г. Геттингена; например, [3–5]) научных групп. Существующие математические модели рассматривают в основном одномерные и двумерные постановки с некоторыми ограничениями из-за сложности задачи (особенно в ее трехмерной постановке) [6–9]. В настоящее время в Центре микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем БашГУ проводятся комплексные теоретические, численные и экспериментальные исследования процесса самоорганизации в пузырьковых средах при акустическом воздействии [10–13], в рамках которых была выполнена данная работа.

Поскольку самоорганизация пузырьков возникает в результате обоюдного влияния пузырек–акустическое поле, то одним из важных направлений в понимании фундаментальной природы этого эффекта является исследование диффузионной устойчивости пузырьков при акустическом воздействии. Первоначально интерес к исследованию диффузионных процессов, протекающих между газовым пузырьком и окружающей его жидкостью с растворенным в ней газом, возник из экспериментов по акустической кавитации. В этих экспериментах наблюдалось, что, при наличии акустического поля, маленькие газовые пузырьки со временем

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (11.G34.31.0040) и РФФИ (гранты №№ 14-01-97019-р_поволжье_а, 14-01-31369-мол_а).

растут. Это явление объяснялось массопереносом растворенного газа между жидкостью и пузырьком и было названо направленной диффузией («rectified mass diffusion») [14]. Математические теории, описывающие данный процесс для случая малых амплитуд колебаний пузырька, представлены, например, в работах [15–17]. Однако, после открытия однопузырьковой сонолюминесценции в 1991 году [18] было обнаружено, что одиночный пузырек в сильном акустическом поле может колебаться в течение нескольких дней без изменения своего размера, что данные математические теории объяснить не могли. Аналитического решения полной системы уравнений задачи диффузии не существует и оно может быть найдено только численно. Главная проблема численного решения данной задачи состоит в том, что изменение массы пузырька со временем очень мало и близко к погрешности расчета. Кроме того, численный эксперимент требует значительных затрат машинного времени. Поэтому до настоящего времени в литературе при исследовании диффузионной задачи, как правило, использовались асимптотические или аппроксимационные модели, которые не дают полного представления о данном процессе (например, [19–22]). Заметим, во всех этих работах не бралось во внимание влияние изменения массы пузырька, обусловленное диффузией, на динамику самого пузырька.

Основной целью данной работы является разработка численного метода решения полной диффузионной задачи для одиночного пузырька, колеблющегося в акустическом поле, который бы учитывал также влияние изменения массы газа в пузырьке на его динамику. Данный метод основан на консервативной разностной схеме для уравнения диффузии, где роль закона сохранения играет непрерывность диффузионного потока.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается одиночный сферически–симметричный газовый пузырек, который совершает радиальные колебания под действием акустического поля, изменяющегося по следующему закону: $p_e(t) = p_0 - p_A \sin(\omega t)$, где p_0 — атмосферное давление; p_A — амплитуда переменного давления; ω — круговая частота.

Моделирование задачи основывается на следующих допущениях: теплообмен в жидкости отсутствует; изменение размеров пузырька за период колебания происходит только за счет диффузии; длина волны звукового поля много больше размеров пузырька ($\omega R << c_l$, где R — радиус пузырька; c_l — скорость звука в жидкости).

Скорость переноса массы газа m_g через подвижную границу пузырька определяется через градиент массовой концентрации газа, растворенного в жидкости, c, по следующей формуле:

$$\frac{dm_g}{dt} = 4\pi R^2(t)\rho_l D_l \left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=R(t)},$$

где ρ_l — плотность жидкости; D_l — коэффициент диффузии; r — пространственная координата.

Движение стенки пузырька описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением Келлера–Миксиса:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p}{\rho_l} + \frac{R}{c_l\rho_l}\frac{dp}{dt}, \tag{1}$$

в котором

$$p = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\frac{m_g}{m_{g0}}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3\gamma} - 4\mu\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} - p_e(t),$$

где σ — поверхностное натяжение; μ — коэффициент динамической вязкости жидкости; γ — показатель адиабаты. Нижний индекс «0» обозначает значение параметра в начальный момент времени. Начальные условия для уравнения (1) имеют следующий вид: $R(0) = R_0$, $\dot{R}(0) = 0$.

Для обезразмеривания системы используются следующие обозначения:

$$a = \frac{R}{R_0}, \quad \bar{t} = \omega t, \quad \bar{m_g} = \frac{m_g}{m_{g0}},$$
$$\bar{\sigma} = \frac{2\sigma}{p_0 R_0}, \quad \bar{p}_0 = \frac{p_0}{\omega^2 R_0^2 \rho_l}, \quad \bar{\mu} = \frac{4\mu}{\omega\rho_l R_0^2}.$$

В итоге получим уравнение (1) в безразмерном виде:

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \bar{p}_0(1+\bar{\sigma})a^{-3\gamma}\left(\bar{m_g} + \frac{a}{\bar{c}_l}\frac{d\bar{m}_g}{d\bar{t}} - 3\gamma\bar{m_g}\frac{\dot{a}}{\bar{c}_l}\right) -$$
$$- \bar{p}_e - \bar{\mu}\frac{\ddot{a}}{\bar{c}_l} - \left(\bar{p}_0\frac{\bar{\sigma}}{a} + \bar{\mu}\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(1 - \frac{\dot{a}}{\bar{c}_l}\right) + \frac{a}{\bar{c}_l}\bar{p}_A\cos(\bar{t}).$$

Уравнение диффузии растворенного в жидкости газа в сферических координатах имеет следующий вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{R^2\dot{R}}{r^2}\frac{\partial c}{\partial r} = D_l\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c}{\partial r}\right). \tag{2}$$

Краевое условие на границе пузырька удовлетворяет закону Генри:

$$c|_{r=R(t)} = \frac{c_0}{p_0}\left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\frac{m_g}{m_{g0}}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3\gamma}.$$

Предполагается, что пузырек образовался в жидкости, которая изначально имела однородную концентрацию газа c_∞. Соответственно, краевое условие вдали от стенки пузырька: $c_{r=\infty} = c_\infty$.

Для устранения вычислительных проблем, связанных с подвижной границей, она зафиксирована с помощью переменной Лагранжа:

$$\xi = \frac{r^3 - R^3}{3R_0^3}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{r^2}{R_0^3}\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{R^2\dot{R}}{R_0^3}\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Тогда получим уравнение (2) в следующем виде:

$$\frac{\partial c}{\partial \bar{t}} = \frac{D_l a^4}{\omega R_0^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(1 + \frac{3\xi}{a^3}\right)^{4/3}\frac{\partial c}{\partial \xi}\right).$$

После дальнейшего обезразмеривания с помощью следующих обозначений:

$$u = \frac{c - c_\infty}{c_0}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{\omega R_0^2}{D_l}, \quad b = \frac{4\pi R_0^3 \rho_l c_0}{3m_{g0}},$$

получим безразмерную систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \frac{a^4}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(1 + \frac{3\xi}{a^3}\right)^{4/3}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right),$$

$$u|_{\xi=0} = (1 + \bar{\sigma})\,\bar{m}_g a^{-3\gamma} - \frac{c_\infty}{c_0},$$

$$\frac{d\bar{m}_g}{d\bar{t}} = 3a^4\frac{b}{\mathrm{Pe}}\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}.$$

3. Дискретная схема для уравнения диффузии

В данной работе была реализована консервативная схема для вычисления диффузионного потока, которая при выборе решения рассматриваемой задачи обладает большим преимуществом перед остальными схемами. А именно, данный метод основан на консервативной разностной схеме для уравнения диффузии, которая сохраняет общую массу системы вследствие выполнения закона сохранения на дискретном уровне.

Как правило, при записи уравнений в частных производных законам сохранения соответствует дивергентная форма записи. Для уравнения диффузии роль закона сохранения играет непрерывность диффузионного потока. Мы построим консервативную схему, используя интегро–интерполяционный метод [23].

Запишем уравнение диффузии в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \quad W = -\frac{a^4}{\mathrm{Pe}}\left(1 + \frac{3\xi}{a^3}\right)^{4/3}\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

или, после применения теоремы Грина,

$$\oint_\Gamma (u(\bar{t},\xi)d\xi - W(\bar{t},\xi)d\bar{t}) = 0. \qquad (3)$$

Сетка по пространству: $\xi = \xi_j$, $j = 0, 1, \ldots, M$; по времени: $\bar{t} = \bar{t}_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Возьмем ячейку в пространстве с номером j так, чтобы ее границами были $(\xi_{j-1} + \xi_j)/2$ и $(\xi_j + \xi_{j+1})/2$. Проинтегрируем интеграл (3) по контуру

$$\begin{array}{ccc}
\left(t_i, \dfrac{\xi_{j-1} + \xi_j}{2}\right) & \rightarrow & \left(t_i, \dfrac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2}\right) \\
\uparrow & & \downarrow \\
\left(t_{i+1}, \dfrac{\xi_{j-1} + \xi_j}{2}\right) & \leftarrow & \left(t_{i+1}, \dfrac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2}\right).
\end{array}$$

Получим:

$$(\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i)\left(W\left(\frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1}}{2}, \frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - W\left(\frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1}}{2}, \frac{\xi_{j-1} + \xi_j}{2}\right)\right) =$$
$$= -\frac{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}}{2}\left(u(\bar{t}_{i+1}, \xi_j) - u(\bar{t}_i, \xi_j)\right).$$

В дискретном виде, подставив выражение для W и введя обозначение

$$\kappa_{i,j+1/2} = a^4(\bar{t}_i)\left(1 + \frac{3(\xi_j + \xi_{j+1})}{2a^3(\bar{t}_i)}\right)^{4/3},$$

после переноса слагаемых, получим

$$u_{i+1,j} - \frac{\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i}{(\xi_{j+1} - \xi_{j-1})\mathrm{Pe}}\left(\kappa_{i+1,j+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{\xi_{j+1} - \xi_j} - \right.$$
$$\left. - \kappa_{i+1,j-\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j} - u_{i+1,j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}}\right) = u_{i,j} + \frac{\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i}{(\xi_{j+1} - \xi_{j-1})\mathrm{Pe}} \times$$
$$\times \left(\kappa_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\xi_{j+1} - \xi_j} - \kappa_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}}\right).$$

Отсюда получается схема Кранка–Николсон [24]. Эти уравнения верны для $j = 1, \ldots, M - 1$. Для $j = 0$ и $j = M$ берутся краевые условия.

Для вычисления изменения массы проинтегрируем уравнение (3) вблизи точки $j = 0$ по контуру (берется как бы «половина» ячейки, не заходя в область $j = -1/2$):

$$\begin{array}{ccc}
(t_i, \xi_0) & \rightarrow & (t_i, (\xi_0 + \xi_1)/2)) \\
\uparrow & & \downarrow \\
(t_{i+1}, \xi_0) & \leftarrow & (t_{i+1}, (\xi_0 + \xi_1)/2).
\end{array}$$

Тогда получим

$$(u(\bar{t}_i, \xi_0) - u(\bar{t}_{i+1}, \xi_0))\left(\frac{\xi_1 - \xi_0}{2}\right) - (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i) \times$$
$$\times \left(W\left(\frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1}}{2}, \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}\right) - W\left(\frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1}}{2}, \xi_0\right)\right) = 0.$$

Заметим, что изменение массы за один шаг по времени равно

$$\bar{m}(\bar{t}_{i+1}) - \bar{m}(\bar{t}_i) = \frac{3b}{\mathrm{Pe}}\int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} a^4 \left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} d\bar{t},$$

а последнее слагаемое в формуле (3) равно, по определению,

$$\int\limits_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} -\frac{a^4}{\mathrm{Pe}}\left(1+\frac{3\xi}{a^3}\right)^{4/3} \left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} d\bar{t} =$$
$$= -\frac{1}{3b}\int\limits_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} \frac{3b}{\mathrm{Pe}} a^4 \left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} d\bar{t} = -\frac{1}{3b}(\bar{m}(\bar{t}_{i+1}) - \bar{m}(\bar{t}_i)).$$

Получаем выражение для вычисления значения массы на следующем шаге по времени:

$$\frac{1}{3b}\left(\bar{m}_g(\bar{t}_{i+1}) - \bar{m}_g(\bar{t}_i)\right) = \frac{\bar{t}_{i+1}-\bar{t}_i}{2(\xi_1-\xi_0)\mathrm{Pe}} \times$$
$$\times \left(\kappa_{i,1/2}(u_{i,1}-u_{i,0}) + \kappa_{i+1,1/2}(u_{i+1,1}-u_{i+1,0})\right) -$$
$$-\frac{\xi_1-\xi_0}{2}\left(u(\bar{t}_{i+1},\xi_0) - u(\bar{t}_i,\xi_0)\right).$$

4. Результаты вычислений

Численное исследование уравнения Келлера–Миксиса (1) для одиночного пузырька реализовано с помощью метода Дормана–Принца восьмого порядка точности [25] с адаптивным выбором шага по времени так, чтобы ошибка решения за один шаг не превышала заданного параметра ϵ. Численный метод верифицирован с использованием встроенной процедуры Matlab ode45 для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Расчет массопереноса через стенку пузырька осуществлялся двумя способами: с использованием вышеописанной полностью консервативной схемы и стандартной схемы, рассмотренной, например, в работе [11].

Изменение полной массы газа в системе «газ—жидкость» можно записать следующим образом:

$$\Delta\bar{m}_{full} = \bar{m}_g(\bar{t}) - \bar{m}_g(0) + 3b\int\limits_0^\infty u(\bar{t},\xi)d\xi,$$

где последнее слагаемое является изменением массы газа, растворенного в жидкости. Изменение полной массы системы за любой промежуток времени должно быть равно нулю, что позволяет проверить консервативность схемы в численных расчетах.

В табл. 1 приведены значения изменения полной массы системы $\Delta\bar{m}_{full}$, а также значения безразмерной максимальной массы газа в пузырьке $\bar{m}_{gmax}$ в течение нескольких периодов T акустического поля. Здесь и далее расчеты проводились для пузырька с начальным радиусом $R_0 = 2$ мкм при следующих параметрах: $\gamma = 1.4$, $\sigma = 0.0725$ Н/м, $p_0 = 10^5$ Па, $c_l = 1500$ м/с, $\omega = 2\pi \cdot 20$ кГц, $D = 2\cdot 10^{-9}$ м^2/с и $c_0 = 2.5\cdot 10^{-5}$, $p_A = 1.5\cdot 10^5$ Па.

Таблица 1. Изменение полной массы и максимальная масса для консервативной (a) и стандартной (b) схем

T	$\Delta\bar{m}_{full}$; $\bar{m}_{gmax}$ (a)	$\Delta\bar{m}_{full}$; $\bar{m}_{gmax}$ (b)
1	$8.2\cdot 10^{-12}$; 1.0003	$2.0\cdot 10^{-4}$; 1.0004
5	$4.0\cdot 10^{-11}$; 1.0009	$1.0\cdot 10^{-3}$; 1.0002
10	$3.8\cdot 10^{-12}$; 1.0012	$1.9\cdot 10^{-3}$; 0.9995
15	$3.3\cdot 10^{-11}$; 1.0014	$2.9\cdot 10^{-3}$; 0.9987
20	$5.1\cdot 10^{-10}$; 1.0018	$3.9\cdot 10^{-3}$; 0.9891

Использовалась неравномерная сетка, сгущающаяся к стенке пузырька по закону $\xi_j = L\cdot j^3/M^3$, $j = 0,\ldots,M$. Здесь $L = 10^3$ было выбрано так, чтобы граница расчетной области не оказывала существенного влияния на динамику пузырька.

Как можно видеть, значение $\Delta\bar{m}_{full}$ в случае использования консервативной схемы много меньше, чем если дискретный закон сохранения не выполнен. Во втором случае величины изменения полной массы системы и максимальной массы газа в пузырьке оказываются одного порядка. Таким образом, накопление численной ошибки при использовании обычной схемы может оказать существенное влияние на динамику пузырька за счет направленной диффузии. Наглядно данный эффект можно продемонстрировать следующим образом: в табл. 1 масса газа в пузырьке, рассчитанная с использованием консервативной схемы, $\bar{m}_{gmax}$ (a) растет со временем, тогда как во втором случае она убывает. Результаты, полученные в работе [22] с помощью аппроксимационной теории, говорят о том, что масса при данных параметрах должна расти до достижения пузырьком равновесного значения. Следовательно, применение консервативной схемы позволяет корректно вычислить изменение массы газа в пузырьке.

Для исследования сходимости вышеописанной схемы уравнение (1) решалось с помощью метода Рунге–Кутта 4-го порядка, поскольку в этом случае величины временных шагов изменяются более значительно при изменении параметра ϵ. Поэтому такой метод более наглядно демонстрирует сходимость по времени, чем метод Дормана–Принца 8-го порядка точности. Тестовые расчеты проводились при значениях величины M (количество точек по пространству) от 2^9 до 2^{13} и величины ϵ от 10^{-2} до 10^{-12}. В табл. 2 показана абсолютная ошибка, возникающая при сравнении решений по отношению к наиболее точному ($M = 8192$, $\epsilon = 10^{-12}$). По мере уменьшения ϵ и, следовательно, среднего шага по времени $h_t = 2\pi/N$, сходимость схемы по пространству более заметна. Так, если посмотреть на две последние строки таблицы, можно заме-

Таблица 2. Сходимость консервативной схемы

Шаг	$M = 512$	$M = 1024$	$M = 2048$	$M = 4096$	$M = 8192$
$\epsilon = 10^{-2}$ $(N = 1620)$	$2.3 \cdot 10^{-1}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$
$\epsilon = 10^{-4}$ $(N = 2590)$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-7}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$
$\epsilon = 10^{-6}$ $(N = 4620)$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-7}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
$\epsilon = 10^{-8}$ $(N = 10190)$	$8.1 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$5.3 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$3.2 \cdot 10^{-8}$
$\epsilon = 10^{-10}$ $(N = 24680)$	$8.0 \cdot 10^{-6}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$4.7 \cdot 10^{-9}$
$\epsilon = 10^{-12}$ $(N = 61560)$	$8.0 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$9.6 \cdot 10^{-8}$	0

тить, что ошибка составляет $O(h^2)$. Определить зависимость ошибки от временного шага сложнее, поскольку в алгоритме реализована возможность автоматического выбора шага, но тем не менее, можно наблюдать уменьшение ошибки с уменьшением параметра ϵ.

5. Заключение

В данной работе был разработан численный метод вычисления динамики сферического пузырька в изотропном акустическом поле с учетом массопереноса через подвижную стенку пузырька. Метод основан на консервативной разностной схеме для уравнения диффузии, где роль закона сохранения играет непрерывность диффузионного потока. Кроме того, реализованы и верифицированы программные модули для моделирования динамики пузырька методами Дормана–Принца 8-го порядка точности и Рунге–Кутта 4-го порядка точности.

Проведено сравнение результатов расчета изменения массы газа в пузырьке по представленной полностью консервативной схеме и стандартной схеме, не сохраняющей общую массу системы «газ–жидкость». Показано, что для получения физически корректной картины, необходимо использовать полностью консервативную схему, поскольку в противном случае накопление численных ошибок может существенно повлиять на динамику пузырька и привести к неверному результату.

Исследована сходимость схемы, учитывающей дискретный закон сохранения массы. Показано, что с увеличением числа шагов по пространству, ошибка составляет $O(h^2)$. Также показано, что ошибка уменьшается с уменьшением шага по времени. Выявлено, что для практического применения более эффективной является схема Дормана–Принца, благодаря более высокому порядку аппроксимации и ориентированности на жесткие задачи.

Список литературы

[1] Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд. СО РАН. 2000. 435 с.

[2] Воронин Д.В., Санкин Г.Н., Тесленко В.С., Меттин Р., Лаутерборн В. Вторичные акустические волны в полидисперсной пузырьковой среде // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 22–32.

[3] Lauterborn W., Schmitz E., Judt A. Experimental approach to complex acoustic system // Int. J. Bifurcation Chaos, 1993. V. 3. P. 635–642.

[4] Parlitz U., Mettin R., Luther S., Akhatov'I., Voss M., Lauterborn W. Spatiotemporal dynamics of acoustic cavitation bubble clouds // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1999. Vol. 357. P. 313–334.

[5] Lauterborn W., Kurz T., Akhatov I. Nonlinear Acoustics in Fluids. In: Springer Handbook of Acoustics, Ed. T.D. Rossing, Springer, 2007. Pp. 257–297.

[6] Kobelev Yu.A, Ostrovsky L.A. Nonlinear acoustic fenomena due to bubble drift in a gas-liquid mixture // J. Acoust. Soc. Am. 1989. Vol. 85, № 2. P. 621–629.

[7] Akhatov I., Parlitz U., Lauterborn W. Pattern formation in acoustic cavitation // J. Acoust. Soc. Am. 1994. Vol. 96, № 6. P. 3627–3635.

[8] Akhatov I., Parlitz U., Lauterborn W. Towards a theory of self-organization phenomena in bubble-liquid mixtures // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 4990–5003.

[9] Gumerov N.A. On self-organization of voids in acoustic cavitation // Proc. Third Int. Conf. on Multiphase Flow, CD-ROM edition, Lyon, France, June 8–12. 1998.

[10] Gumerov N.A., Akhatov I.S. Numerical simulation of 3D self-organization of bubbles in acoustic fields // Proceedings of the 8th International Symposium on Cavitation (CAV2012), 13–16 August 2012, Singapore. Paper № 189.

[11] Volkova E.V., Nasibullaeva E.S., Gumerov N.A. Numerical simulations of soluble bubble dynamics in acoustic fields // Proceedings of the ASME 2012

International Mechanical Engineering Congress & Exposition IMECE2012 (Houston, Texas, USA, 9–15 November 2012). 2012. IMECE2012-86243. 7 pp.

[12] Gumerov N.A., Ohl C.-D., Akhatov I.S., Sametov S.P., Khasimullin M.V. Waves of acoustically induced transparency in bubbly liquids: theory and experiment // POMA Volume 19, pp. 045012 (June 2013). 9 pages.

[13] Nasibullaeva E.S., Akhatov I.S. Bubble cluster dynamics in an acoustic field // J. Acoust. Soc. Am. 2013. Vol. 133, № 6. P. 3727–3738.

[14] Blake F.G. The onset of cavitation in liquids. Acoustics Res. Lab., Harvard Univ., Tech. Memo. 1949. № 12.

[15] Hsieh D.Y., Plesset M.S., Theory of rectified diffusion of mass into gas bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 1961. Vol. 33, № 2. P. 206–215.

[16] Eller A., Flynn H.G. Rectified diffusion during nonlinear pulsations of cavitation bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 1965. Vol. 37, № 3. P. 493–503.

[17] Crum L.A., Hansen G.M. Generalized equations for rectified diffusion // J. Acoust. Soc. Am. 1982. Vol. 72, № 5. P. 1586–1592.

[18] Barber B.P., Putterman S.J. Observation of synchronous picosecond sonoluminescence // Nature (London). 1991. Vol. 352. P. 318–320.

[19] Fyrillas M.M., Szeri A.J. Dissolution or growth of soluble spherical oscillating bubbles // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 277. P. 381–407.

[20] Lofstedt R., Weninger K., Putterman S., Barber B.P. Sonoluminescensing bubbles and mass diffusion // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 4400–4410.

[21] Hilgenfeldt S., Lohse D., Brenner M.P. Phase diagrams for sonoluminescing bubbles // Phys. Fluids. 1996. Vol. 8. P. 2808–2826; Vol. 9. P. 2462(E).

[22] Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.-D., Parlitz U., Lauterborn W. The role of surface tension in stable single–bubble sonoluminescence // Ph. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 2. P. 227–230.

[23] Лобанов А., Петров И. Численные методы решения уравнений в частных производных. www.intuit.ru/studies/courses/1170/213/lecture/2919. Лекция 2.

[24] Crank J., Nicolson P., A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type. Proc. Camb. Phil. Soc. 1947. 43(1). P. 50–67.

[25] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.