Институт механики им. Р.Р.Мавлютова Уфимского научного центра РАН

УДК 519.624, 534.1

Определение коэффициента постели по собственным частотам колебаний балки

Аитбаева А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В данной работе рассматривается механическая система, представляющая собой конечную балку Эйлера–Бернулли, которая лежит на сплошном упругом основании. По собственным частотам ее изгибных колебаний получено решение для нахождения коэффициента постели, характеризующего жесткость основания.

1. Введение

В инженерной практике часто встречаются балки, лежащие на сплошном упругом основании. К таким балкам могут быть отнесены ленточные фундаменты зданий, шпалы железнодорожного пути, рельсы, трубопроводы и т.д. При этом величина реакции в каждой точке статически нагруженной балки зависит от ее прогиба, а прогиб, в свою очередь, зависит от реакции со стороны основания, таким образом эта задача является статически неопределимой.

Для решения задачи принимаются гипотезы, связывающие величины реакций с деформацией основания. Одной из таких гипотез является гипотеза Винклеровского основания. Упругое основание рассматривается как система опирающихся на жесткое горизонтальное основание и не связанных между собой пружин, сжатие которых возрастает прямо пропорционально приложенной нагрузке. Коэффициент пропорциональности между нагрузкой и деформацией называется коэффициентом постели.

Сопротивление основания развивается только непосредственно под нагрузкой, поэтому модель Винклера хорошо отражает работу конструкции, если основание представлено жидкостью, и чаще всего этот метод используется при строительстве на слабых грунтах или в случае малой мощности слоя сжимаемого грунта.

В данной работе задача определения коэффициента постели рассматривается как динамическая и сводится к обратной. В такой формулировке требуется найти неизвестный параметр по собственным частотам изгибных колебаний, вызванных механическим ударом по балке. Ранее такой метод решения не приводился.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную балку Эйлера–Бернулли со свободными концами, лежащую на упругом основании.

Для нашего случая уравнение свободных изгибных колебаний балки [1] запишется в виде:

$$EJ\frac{\partial^4 U(X,t)}{\partial X^4} + kU(X,t) + \rho F\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2},$$

$U = U(X,t)$ — прогиб оси балки — просадка основания (балки); EJ — изгибная жесткость; ρ — плотность балки; F — площадь поперечного сечения; L — длина балки. Величина $k = k_0 b$ называется погонным коэффициентом постели, где b — ширина балки, а k_0 — коэффициент постели. При $t = 0$ должны выполняться начальные условия [1]:

$$U(X,0) = f(X), \quad \frac{\partial U(X,0)}{\partial t} = g(X),$$

где $f(X)$, $g(X)$ — функции, определяющие начальное положение оси балки.

Краевые условия для свободных концов записываются в следующем виде:

$$EJ\frac{\partial^3 U(0,t)}{\partial X^3} = 0, \quad EJ\frac{\partial^2 U(0,t)}{\partial X^2} = 0,$$

при $(X = 0)$;

$$EJ\frac{\partial^3 U(L,t)}{\partial X^3} = 0, \quad EJ\frac{\partial^2 U(L,t)}{\partial X^2} = 0,$$

при $(X = L)$.

Вводя обозначения $x = X/L$, $u = U/L$, запишем уравнение и краевые условия, приведенные выше, следующим образом:

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{L^4 k u(x,t)}{EJ} + \frac{\rho F L^4}{EI}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$\text{при } x = 0\text{: } \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$
$$\text{при } x = 1\text{: } \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Тогда, при замене $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$, поставленная выше задача сводится (см., например, [2]) к следующей спектральной задаче [1]:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} U_1 = y'''(0) = 0, U_2 = y''(0) = 0;\\ U_3 = y'''(1) = 0, U_4 = y''(1) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\lambda^4 = \rho F L^4 \omega^2/(EI) - \frac{L^4 k}{EJ}. \tag{3}$$

Таким образом, имеем краевую задачу (1), (2) со спектральным параметром λ и неизвестным коэффициентом k.

3. Решение прямой и обратной задач

Для начала найдем собственные значения λ_k. Функции $y_1(x,\lambda) = (\cos\lambda x + \cosh\lambda x)/2$, $y_2(x,\lambda) = (\sin\lambda x + \sinh\lambda x)/(2\lambda)$, $y_3(x,\lambda) = (-\cos\lambda x + \cosh\lambda x)/(2\lambda^2)$, $y_4(x,\lambda) = (-\sin\lambda x + \sinh\lambda x)/(2\lambda^3)$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y^{(4)}(x,\lambda) = \lambda^4 y(x,\lambda), \tag{4}$$

удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0,\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq r, \\ 1 \text{ при } j = r, \end{cases} \qquad j,\ r = \overline{1,4}, \tag{5}$$

(другими словами, решения $y_j(x,\lambda)$ $(j = 1,2,3,4)$ образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [1]). Общее решение уравнения (4) представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} y(x) = y(x,\lambda) = C_1 y_1(x,\lambda) + C_2 y_2(x,\lambda) + \\ + C_3 y_3(x,\lambda) + C_4 y_4(x,\lambda). \end{aligned}$$

Для нахождения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используем краевые условия (2):

$$\begin{aligned} U_i(y) = U_i(C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4) = \\ = C_1 U_1(y_1) + C_2 U_2(y_2) + \\ C_3 U_3(y_3) + C_4 U_4(y_4) \quad (i = \overline{1,4}). \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнение для определения собственных значений задачи (1), (2) следует из условия существования ненулевого решения системы (6). Ненулевое решение для C_i существует тогда и только тогда, когда равняется нулю определитель системы:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Выражение (7) называется характеристическим определителем спектральной задачи (1), (2). Его нули совпадают с собственными значениями этой задачи. Учитывая условия (5), из (7) получаем

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}.$$

Отсюда, мы имеем

$$\Delta(\lambda) \equiv -\frac{1}{4}\lambda^4 (\cos\lambda \cosh\lambda - 1). \tag{8}$$

Число собственных значений λ_k бесконечно, выпишем только первые три:

$$\lambda_1 = 4,730040, \lambda_2 = 7,853204, \lambda_3 = 10,99560. \tag{9}$$

Вернемся теперь к выражению (3) и найдем ω:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{EJ\lambda_i^4}{2\pi\rho F L^4} + \frac{k_0 b}{\rho F}}, \quad (i = 1,2,...). \tag{10}$$

Полученная формула нахождения собственных частот и есть решение прямой задачи.

Выразив из (3) коэффициент k, найдем решение обратной задачи:

$$k = \frac{EJ\lambda_i^4}{2\pi L^4} - \rho F \omega_i^2.$$

Учитывая, что $k = k_0 b$, получим формулу для нахождения коэффициента постели

$$k_0 = \frac{EJ\lambda_i^4}{2\pi b L^4} - \frac{\rho F \omega_i^2}{b}. \tag{11}$$

Из формулы видно, что для нахождения коэффициента постели достаточно только одной собственной частоты. Рассмотрим пример.

Пример 1.

Пусть требуется определить коэффициент постели балластного слоя щебня, на котором лежит железобетонная шпала $E = 3,05 \cdot 10^{10}$ $\mathrm{N/m^2}$, $\rho = 2500$ $\mathrm{kg/m^3}$ и длиной $2,7$ m, с размерами поперечного сечения $b \times h = 0,25 \times 0,18$ $\mathrm{m^2}$, по собственным частотам изгибных колебаний балки $\omega_1 = 464.834$ Hz, $\omega_2 = 736.253$ Hz, $\omega_3 = 1268.621$ Hz.

Последовательно вычисляем все необходимые геометрические и жесткостные расчетные характеристики для заданной системы:

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,25 \cdot 0,18^3}{12} = 1,215 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^4,$$

$$EJ = 3,05 \cdot 10^{10} \cdot 1,215 \cdot 10^{-4} = 3,71 \cdot 10^6\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2.$$

Все данные взяты из справочника [4].

Подставив все полученные значения, а также собственные частоты в (11), получим:

$$k_0 = \frac{EJ\lambda_1^4}{bL^4} + \frac{\rho F \omega_1^2}{b} = 7,49 \cdot 10^7\ \mathrm{P}a,$$

$$k_0 = \frac{EJ\lambda_2^4}{bL^4} + \frac{\rho F \omega_2^2}{b} = 7,5 \cdot 10^7\ \mathrm{P}a,$$

$$k_0 = \frac{EJ\lambda_3^4}{bL^4} + \frac{\rho F \omega_3^2}{b} = 7,5 \cdot 10^7\ \mathrm{P}a.$$

Как видим, для различных собственных частот мы получаем одно и то же значение коэффициента постели.

4. Заключение

В данной работе мы показали, что для нахождения коэффициента податливости основания достаточно одной собственной частоты. Как показывает практика и многочисленные примеры, для более точного решения рекомендуется брать первые собственные значения и частоты.

Список литературы

[1] Вибрации в технике: справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания нелинейных систем / под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

[2] Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.

[3] Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения М.: Физматлит, 2009. 272 с.

[4] Каримов И.Ш., Строительная механика: Теоретический курс с примерами типовых расчетов: Учебное пособие. Уфа: ГУП РБ «Издательство Белая река», 2008. 280 с.

[5] Бабаков И.М. Теория колебаний : учеб. пособие. 4-е изд., испр. М.: Дрофа, 2004. 591 с.