

# Выпрямляющийся разлет газа из вихря<sup>1</sup>

Юлмухаметова Ю.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН

В работе рассмотрена одна подмодель движения газа с линейным полем скоростей. Ее образует система нелинейных дифференциальных уравнений с начальными данными. Найдено несколько первых интегралов такой системы. Для специальных начальных данных задачи найдено приближенное решение дифференциальных уравнений подмодели. Такому решению соответствуют мировые линии, описывающие выпрямляющийся разлет частиц газа из вихря. Построены траектории движения частиц газа.

## 1. Введение

Решение в виде линейного поля скоростей является фундаментальным для любых уравнений механики сплошной среды. Такие модели в газовой динамике были получены еще Дирихле и Риманом [1,2] при изучении динамики эллипсоидальных фигур идеальной несжимаемой жидкости. Для политропного газа такая модель в лагранжевых переменных получена Овсянниковым Л.В. [3], Дайсоном [4]. В этом случае найдены некоторые интегралы полученной системы. Лаврентьевой О.В. в работе [5], была рассмотрена математическая модель движения несжимаемого жидкого эллипсоида со свободной границей, в которой скорости частиц жидкости являются линейными функциями координат, изучено качественное поведение решения такой модели при больших временах. Пухначевым В.В. в [6] рассмотрено плоское движение идеальной несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей. Получено решение, описывающее вращение жидкого круга вокруг центра с постоянной угловой скоростью.

В данной статье будет рассмотрена модель движения газа с линейным полем скоростей, одна из перечисленных в [7], а именно ПОДМОДЕЛЬ 1. Найдено приближенное решение подмодели. В результате построены мировые линии частиц газа для данного решения, описывающие выпрямляющийся разлет частиц газа из вихря.

## 2. Уравнения ПОДМОДЕЛИ 1

В ПОДМОДЕЛИ 1 для решения уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad (1)$$

где  $A = \|a_{ij}(t)\|$  — матрица;  $\vec{u}_0(t) = \|u_{01}, u_{02}, u_{03}\|^T$ ,  $\vec{x} = \|x^1, x^2, x^3\|^T$  — векторы, введены дополнительные переменные по формулам

$$B = A' + A^2, \quad \vec{v} = \vec{u}'_0 + A\vec{u}_0, \quad \tau' = \tau \text{tr} A, \quad (2)$$

а уравнение состояния имеет вид

$$p = \rho^\gamma h(S) \pm \frac{a_0}{2} \ln \rho, \quad (3)$$

где  $\gamma, a_0$  — постоянные;  $h(S)$  — функция энтропии  $S$ . Плотность и давление задаются формулами:

$$\rho = \frac{a_0 + \tau^{-\gamma}}{\vec{x} \cdot S\vec{x} + 2\vec{\xi} \cdot \vec{x} + \phi(t)},$$

$$p = -\frac{a_0 + \tau^{-\gamma}}{2} \ln |\vec{x} \cdot S\vec{x}| - \omega^1(a_0 + \tau^{-\gamma}) \int \frac{dI}{|P(t, I)|} + p_0(t), \quad (4)$$

$$p'_0 + (\ln \tau)' \gamma p_0 = (\ln \tau)' \gamma a_0 \ln(a_0 + \tau^{-\gamma}),$$

$$P(t, I) = I^2 s_{33} + 2I s_{23} + s_{22}, \quad I = \alpha \beta^{-1},$$

$$\alpha = x^2 - x^1 \omega^2 (\omega^1)^{-1}, \quad \beta = x^3 - x^1 \omega^3 (\omega^1)^{-1},$$

так что энтропия определяется из (3),  $S = \|s_{ij}\|$  — симметричная часть матрицы  $B$ . Вектор  $\vec{\xi}(t)$  определяется из равенства:

$$\Delta \vec{\xi}(t) = (s_{33}s_{22} - s_{23}^2)\vec{v} - \omega^1(v^2\vec{s}_3 - v^3\vec{s}_2),$$

$$\Delta = (\omega^1)^2 + s_{33}s_{22} - s_{23}^2 \neq 0, \quad s_{33}s_{22} - s_{23}^2 \neq 0, \quad (5)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 11.G34.31.0042.

где  $\vec{s}_i$  — столбец матрицы  $S$ ;  $v^j$  — координата вектора  $\vec{v}$ ;  $\omega^k$  — координата вектора  $\vec{\omega}$ , который задает антисимметричную часть матрицы  $B$ :

$$E < \vec{\omega} > = \begin{vmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \omega^1 \neq 0,$$

то есть

$$B = S + E < \vec{\omega} >. \quad (6)$$

Функция  $\phi(t)$  определена соотношением

$$\Delta\phi(t) = (v^3)^2 s_{22} + (v^2)^2 s_{33} + 2v^2 v^3 s_{23}. \quad (7)$$

После подстановки решений (1), (3), (4) в уравнения газовой динамики и учитывая равенства (2), (5), (7), получены дифференциальные уравнения для определения матрицы  $S$  векторов  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{v}$  [7]:

$$\begin{aligned} S' + SA + A^T S &= (1 - \gamma + c_0(t)) (\ln \tau)' S, \\ \vec{\omega}' &= A\vec{\omega} - \gamma (\ln \tau)' \vec{\omega}, \\ \vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 &= \\ &= \left( (1 - \gamma)\vec{v} + c_0(t)\vec{\xi} \right) (\ln \tau)', \\ c_0(t) &= \gamma \tau^\gamma (a_0 \tau^\gamma + 1)^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

и дополнительные соотношения

$$S\vec{\omega} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0, \quad (9)$$

которые выполняются в силу уравнений подмодели, если выполняются в начальный момент времени.

Таким образом, ПОДМОДЕЛЬ 1 состоит из 6-ти нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для нахождения 6-ти неизвестных. Функции плотности, давления и уравнение состояния заданы. Подмодель вполне определена.

Дифференциальные уравнения для матрицы  $A$ , функции  $\tau$  из (2) и уравнения (8) для матрицы  $S$  и вектора  $\vec{\omega}$  назовем *основными*, так как они независимы от уравнений для векторов  $\vec{u}_0$  и  $\vec{v}$ . Введем начальные данные для основных уравнений при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} S(0) = S_0 &= \|s_{ij}^0\|, \quad \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0 = \|\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}\|^T, \\ \tau(0) &= 1. \end{aligned}$$

Для матрицы  $A$  будет справедливо разложение  $A = S_A + E < \vec{\omega}_A >$ ,  $S_A = S_A^T = \|s_{ij}^A\|$ ,  $\vec{\omega}_A = \|\omega_A^1, \omega_A^2, \omega_A^3\|^T$ . Тогда начальные данные для  $A$  имеют вид:

$$\begin{aligned} S_A(0) = S_1 &= \|s_{ij}^1\|, \quad \vec{\omega}_A(0) = \vec{\omega}_1 = \|\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}\|^T \\ A(0) &= S_1 + E < \vec{\omega}_1 >. \end{aligned}$$

Основные уравнения образуют нелинейную систему 19-го порядка с 18-ю параметрами для начальных данных.

### 3. Интегралы

Матричным уравнением (2) действуем на вектор  $\vec{\omega}$ , учитывая (9), (6), получим равенство

$$A'\vec{\omega} + A^2\vec{\omega} = 0.$$

Из уравнения (8) выразим  $A\vec{\omega}$  и подставим в последнее равенство. Получим линейное однородное дифференциальное уравнение для вектора  $A\vec{\omega}$ , решение которого имеет вид:

$$A\vec{\omega} = \vec{\sigma}_1 \tau^{-\gamma}, \quad (10)$$

где  $\vec{\sigma}_1 = S_0\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0$ . Интеграл (10) позволяет найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (8) в виде:

$$\vec{\omega} = (\vec{\sigma}_1 t + \vec{\sigma}_2) \tau^{-\gamma}, \quad (11)$$

где  $\vec{\sigma}_2 = \vec{\omega}_0$ . Учитывая (11), интеграл (10) можно переписать в виде линейного интеграла:

$$A(\vec{\sigma}_1 t + \vec{\sigma}_2) = \vec{\sigma}_1. \quad (12)$$

Начальные данные задачи при  $t = 0$  должны удовлетворять для ПОДМОДЕЛИ 1 дополнительному соотношению:

$$S_0\vec{\omega}_0 = 0. \quad (13)$$

### 4. Преобразования эквивалентности

Основные уравнения допускают некоторые преобразования эквивалентности, сохраняющие структуру уравнений, но меняющие начальные данные. Воспользуемся этим фактом для сокращения числа параметров задачи с начальными данными.

Основные уравнения допускают преобразование сдвига  $t \rightarrow t + t_0$ . Тогда в интеграле (12), за счет выбора  $t_0$ , можно добиться того, чтобы  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 0$  и получить дополнительное уравнение связи начальных данных:

$$\vec{\omega}_0 \cdot S_1 \vec{\omega}_0 = 0. \quad (14)$$

Основные уравнения, интеграл (12) допускают поворот, осуществляемый постоянной ортогональной матрицей  $O$ :  $A \rightarrow O^T A O$  ( $\vec{\omega}_A \rightarrow O^T \vec{\omega}_A$ ,  $S_A \rightarrow O^T S_A O$ ),  $S \rightarrow O^T S O$ ,  $\vec{\omega} \rightarrow O^T \vec{\omega}$ . За счет выбора матрицы  $O$  векторы  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\omega}_A$  в начальный момент времени повернем в положение:

$$\vec{\omega}_0 = \|\omega_0, 0, 0\|^T, \quad \omega_0 \neq 0, \quad \vec{\omega}_1 = \|\omega_{11}, \omega_{12}, 0\|^T. \quad (15)$$

Тогда из уравнений связи начальных данных (13), (14) получим:  $s_{11}^0 = s_{12}^0 = s_{13}^0 = 0$ ,  $s_{11}^1 = 0$ .

Основные уравнения, интеграл (12) допускают преобразование растяжения:  $t \rightarrow \delta^{-1} t$ ,  $A \rightarrow \delta A$ ,

$S \rightarrow \delta^2 S$ ,  $\vec{\omega} \rightarrow \delta^2 \vec{\omega}$ . За счет выбора параметра растяжения  $\delta$ , величину  $\omega_0$  из (15) можно сделать  $\pm 1$ .

Других линейных преобразований эквивалентности нет.

Интегралы (11) и (12):

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0 \tau^{-\gamma}, \quad \omega_2 = \omega_0 t s_{12}^1 \tau^{-\gamma}, \\ \omega_3 &= \omega_0 t (s_{13}^1 - \omega_{12}) \tau^{-\gamma}, \\ a_{11} + a_{12} t s_{12}^1 + a_{13} t (s_{13}^1 - \omega_{12}) &= 0, \\ a_{21} + a_{22} t s_{12}^1 + a_{23} t (s_{13}^1 - \omega_{12}) &= s_{12}^1, \\ a_{31} + a_{32} t s_{12}^1 + a_{33} t (s_{13}^1 - \omega_{12}) &= s_{13}^1 - \omega_{12},\end{aligned}$$

понижают порядок основной системы. Преобразования эквивалентности уменьшили количество параметров начальной задачи с 15 до 10 существенных параметров. Учитывая найденные интегралы, решение основных уравнений сводится к решению системы:

$$\begin{aligned}\vec{a}'_3 + \vec{a}_3 (a_{33} - a_{13} t (s_{13}^1 - \omega_{12})) + \\ + \vec{a}_2 (a_{23} - a_{13} t s_{12}^1) = \vec{s}_3 + \vec{\omega} \times \vec{k} - \\ - a_{13} (\vec{\omega}_1 \times \vec{i} + \vec{s}_1^1), \quad \tau' = \tau \operatorname{tr} A, \\ \vec{a}'_2 + \vec{a}_2 (a_{22} - a_{12} t s_{12}^1) + \\ + \vec{a}_3 (a_{32} - a_{12} t (s_{13} - \omega_{12})) = \vec{s}_2 + \vec{\omega} \times \vec{j} - \\ - a_{12} (\vec{\omega}_1 \times \vec{i} + \vec{s}_1^1), \quad s'_{ij} + \vec{s}_j \cdot \vec{a}_i + \\ + \vec{s}_i \cdot \vec{a}_j = f(\tau) (\ln \tau)' s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{16}$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – декартов базис;  $f(\tau) = 1 - \gamma + \gamma \tau^\gamma (a_0 \tau^\gamma + 1)^{-1}$ ,  $A = \|\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\|$ .

Начальные данные:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & s_{12}^1 & s_{13}^1 + \omega_{12} \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & s_{23}^1 - \omega_{11} \\ s_{13}^1 - \omega_{12} & s_{23}^1 + \omega_{11} & s_{33}^1 \end{pmatrix},$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^0 & s_{23}^0 \\ 0 & s_{23}^0 & s_{33}^0 \end{pmatrix}, \quad \tau(0) = 1.$$

Интегралов системы (16), кроме (11), (12) больше не обнаружено, поэтому решить аналитически систему (16) с произвольными существенными параметрами не представляется возможным. Рассмотрим систему (16) при специальных значениях начальных данных.

## 5. Плоская модель

Система (16) записана для матриц  $A$  и  $S$  третьего порядка. Для специальных начальных данных система (16) имеет дополнительные интегралы.

*Определение.* Если матрицы  $A$  и  $S$  имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{pmatrix},$$

то будем говорить, что они задают плоский (двумерный) случай системы (16).

*Теорема.* Если начальные данные для матрицы  $A$  выбрать в виде

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^1 & s_{23}^1 \\ 0 & s_{23}^1 & s_{33}^1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}_1 = \|\omega_{11}, 0, 0\|^T, \quad \omega_{11} \neq 0,$$

то система (16) сведется к плоскому случаю.

Перепишем систему (16) для плоского случая с учетом разложения матрицы  $A = S_A + E < \vec{\omega}_A >$ :

$$\begin{aligned}\omega'_A + \omega_A (\ln \tau)' &= \omega_0 \tau^{-\gamma}, \\ (s_{22}^A)' + (s_{22}^A)^2 + (s_{23}^A)^2 - (\omega_A)^2 &= s_{22}, \\ (s_{23}^A)' + s_{23}^A (\ln \tau)' &= s_{23}, \\ (s_{33}^A)' + (s_{33}^A)^2 + (s_{23}^A)^2 - (\omega_A)^2 &= s_{33}, \\ s_{22}' + 2(s_{22} s_{22}^A + s_{23} s_{23}^A + s_{23} \omega_A) &= \\ = f(\tau) (\ln \tau)' s_{22}, \\ s_{23}' + s_{23} (\ln \tau)' + s_{23}^A (s_{22} + s_{33}) + \omega_A (s_{33} - \\ - s_{22}) &= f(\tau) (\ln \tau)' s_{23}, \quad (\ln \tau)' = s_{22}^A + s_{33}^A, \\ s_{33}' + 2(s_{23} s_{23}^A + s_{33} s_{33}^A - s_{23} \omega_A) &= \\ = f(\tau) (\ln \tau)' s_{33},\end{aligned}\tag{17}$$

с начальными данными:

$$\begin{aligned}\omega_A(0) &= \omega_{11}, \quad s_{22}^A(0) = s_{22}^0, \quad s_{33}^A(0) = s_{33}^0, \quad s_{23}^A(0) = s_{23}^0, \\ s_{22}(0) &= s_{22}^1, \quad s_{23}(0) = s_{23}^1, \quad s_{33}(0) = s_{33}^1, \quad \tau(0) = 1.\end{aligned}$$

От переменных  $\omega_A, s_{22}^A, s_{23}^A, s_{33}^A, s_{22}, s_{23}, s_{33}, \tau$  системы (17) перейдем к переменным  $\omega_A, s_{23}^A, s_{23}, \operatorname{tr} S_A, \tau, \operatorname{tr} S, |S|, |S_A|$ , где  $|S|$  – определитель матрицы  $S$ :

$$\begin{aligned}(\tau \omega_A)' &= \omega_0 \tau^{1-\gamma}, \quad (s_{23}^A \tau)' = s_{23} \tau, \\ s_{23}' + s_{23}^A \operatorname{tr} S - \omega_A (s_{22} - s_{33}) &= \\ = (f(\tau) - 1) (\ln \tau)' s_{23}, \\ \tau'' \tau^{-1} &= \operatorname{tr} S + 2|S_A| + 2\omega_A^2, \\ (\tau |S_A|)' &= \omega_A^2 \tau' + \tau (G - 2s_{23}^A s_{23}), \\ \tau' &= \tau \operatorname{tr} S_A \\ |S|' \tau &= 2|S| \tau' (f(\tau) - 1),\end{aligned}\tag{18}$$

$$(\operatorname{tr} S)' = f(\tau) \operatorname{tr} S \tau' \tau^{-1} - 2(F + 2s_{23}^A s_{23}),$$

где  $G = s_{33}^A s_{22} + s_{22}^A s_{33}$ ,  $F = s_{22} s_{22}^A + s_{33} s_{33}^A$ ,  $s_{33} =$

$\text{tr}S - s_{22}$ ,

$$\begin{aligned} s_{22} &= \frac{1}{2}\text{tr}S + \sqrt{\frac{1}{4}(\text{tr}S)^2 - s_{23}^2 - |S|}, \\ s_{33}^A &= \text{tr}S_A - s_{22}^A, \\ s_{22}^A &= \frac{1}{2}\text{tr}S_A \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\text{tr}S_A)^2 - (s_{23}^A)^2 - |S_A|}. \end{aligned} \tag{19}$$

Система (18) имеет интеграл

$$|S| = \frac{|S_0|(a_0\tau^\gamma + 1)^{2/a_0}}{(a_0 + 1)^{2/a_0}\tau^{2\gamma}}, \quad |S_0| = s_{22}^0 s_{33}^0 - (s_{23}^0)^2.$$

В (18) явно не входит переменная  $t$ , поэтому сделаем замену

$$\tau' = \lambda(\tau) \neq 0,$$

где  $\lambda$  — некоторая функция от переменной  $\tau$ . Тогда  $dt = \lambda^{-1}d\tau$ . Таким образом, порядок системы (18) понижен на 2 единицы:

$$\begin{aligned} (\tau\omega_A)_\tau &= \omega_0\tau^{1-\gamma}\lambda^{-1}, \quad (\tau s_{23}^A)_\tau = s_{23}\tau\lambda^{-1}, \\ \lambda(s_{23})_\tau + s_{23}^A\text{tr}S - \omega_A(s_{22} - s_{33}) &= \\ &= (f(\tau) - 1)\lambda\tau^{-1}s_{23}, \\ \lambda\lambda_\tau\tau^{-1} &= \text{tr}S + 2|S_A| + 2\omega_A^2, \\ (\tau|S_A|)_\tau &= \omega_A^2 + \tau\lambda^{-1}(G - 2s_{23}^A s_{23}), \\ \tau(\text{tr}S)_\tau &= f(\tau)\text{tr}S - 2\tau\lambda^{-1}(F + 2s_{23}^A s_{23}). \end{aligned} \tag{20}$$

### 6. Частное решение плоской модели

Пусть в (20)  $s_{23}^A = 0$ . Тогда она имеет еще один интеграл. Из 2-го и 3-го уравнений системы следует  $s_{23} = 0$ ,  $s_{22} = s_{33}$ ,  $\omega_A \neq 0$ ,  $F = G = s_{22}\lambda\tau^{-1}$ . Тогда 6-ое уравнение интегрируется:

$$s_{22} = \frac{s_{22}^0(a_0\tau^\gamma + 1)^{1/a_0}}{(a_0 + 1)^{1/a_0}\tau^\gamma}.$$

Система (20) принимает вид:

$$\begin{aligned} (\tau\omega_A)_\tau &= \omega_0\tau^{1-\gamma}\lambda^{-1}, \\ \lambda\lambda_\tau &= 2(s_{22} + |S_A| + \omega_A^2)\tau, \\ (\tau|S_A|)_\tau &= \omega_A^2 + s_{22}. \end{aligned} \tag{21}$$

Система (21) имеет интеграл:

$$\lambda^2 = 4\tau^2|S_A| + k, \quad k = (s_{22}^1 - s_{33}^1)^2. \tag{22}$$

Отсюда определяется  $|S_A|$ . Уравнения (21) свелись к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \lambda c_\tau &= \omega_0\tau^{1-\gamma}, \quad 2\tau\lambda\lambda_\tau = \lambda^2 - k + 4c^2 + \\ &+ N_0(a_0\tau^\gamma + 1)^{1/a_0}\tau^{2-\gamma}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$c = \tau\omega_A, \quad N_0 = 4s_{22}^0(a_0 + 1)^{-1/a_0}$$

с начальными данными

$$c(1) = \omega_{11}, \quad \lambda(1) = s_{22}^1 + s_{33}^1. \tag{24}$$

Найдем приближенные решения уравнений (23).

### 7. Приближенные решения

Первое уравнение (23) допускает растяжение  $\tau = T\tau_1$ ,  $c = T^{1-\gamma/2}c_1$ ,  $\lambda = T^{1-\gamma/2}\lambda_1$ . Применяя растяжение ко второму уравнению (23), получим

$$\begin{aligned} 2\tau_1\lambda_1(\lambda_1)_{\tau_1} &= \lambda_1^2 - kT^{\gamma-2} + \\ &+ 4c_1^2 + N_0(a_0T^\gamma\tau_1^\gamma + 1)^{1/a_0}\tau_1^{2-\gamma}. \end{aligned}$$

Положим

$$T^2 = k, \quad T^\gamma = \varepsilon, \tag{25}$$

где  $\varepsilon, k$  — малые параметры;  $\gamma$  — фиксированная постоянная. Разложим  $\lambda_1$  и  $c_1$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ :

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_{01} + \dots, \quad c_1 = c_0 + \varepsilon c_{01} + \dots \tag{26}$$

При  $\varepsilon = 0$  получим уравнения нулевого приближения:

$$\lambda_0 c_{0\tau_1} = \omega_0\tau_1^{1-\gamma}, \quad \tau_1(\lambda_0^2)_{\tau_1} = \lambda_0^2 + 4c_0^2 + N_0\tau_1^{2-\gamma}.$$

Введем замену переменных при помощи инвариантов растяжения [8]:

$$\lambda_0 = \mu\tau_1^{1-\gamma/2}, \quad c_0 = 2^{-1}g\tau_1^{1-\gamma/2}, \quad s = \ln \tau_1, \tag{27}$$

получим автономную систему

$$\begin{aligned} g_s + g(1 - \gamma/2) &= 2\omega_0\mu^{-1}, \\ (\mu^2)_s + (1 - \gamma)\mu^2 &= g^2 + N_0. \end{aligned} \tag{28}$$

Откуда следует уравнение Абеля:

$$\frac{d\mu}{dg} = \frac{N_0 + g^2 + (\gamma - 1)\mu^2}{4\omega_0 + g\mu(\gamma - 2)}. \tag{29}$$

Уравнение (29) допускает дискретные симметрии:  $\mu \rightarrow -\mu$ ,  $g \rightarrow -g$ ;  $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$ ,  $\mu \rightarrow -\mu$ . Следовательно, уравнения (29) достаточно рассмотреть при  $g \geq 0$  с  $\omega_0 = +1$ . Далее рассмотрим простой случай  $\gamma = 2$ ,  $N_0 = 1$ . Уравнение (29) примет вид:

$$4\frac{d\mu}{dg} = 1 + g^2 + \mu^2. \tag{30}$$

У каждой интегральной кривой уравнения (30) существует асимптота  $g = g_0$ ,  $g_0$  — постоянная;  $\mu = F(g, g_0)$ . Выберем интегральную кривую соответствующую нулевым начальным данным  $\mu(0) = 0$ :

$$\mu = F(g).$$

Дальнейшее решение будем искать для этой кривой. При этом численные расчеты дают  $g_0 \simeq 3,65$ .

Определим начальные данные задачи (28) при  $t = 0$ . Так как функция  $\mu(\tau_1)$  есть нулевое приближение для  $\lambda(\tau_1)$ , то  $\mu(1/\sqrt{\varepsilon}) \sim s_{22}^1 + s_{33}^1 = \alpha$ , а

так как  $g(\tau_1)$  есть нулевое приближение для  $c(\tau)$ , то  $g(1/\sqrt{\varepsilon}) \sim 2\omega_{11} = \beta$  (см. (24), (26), (27)).

Определим функции  $A(\tau)$ ,  $\vec{u}_0(\tau)$ . Из первого уравнения (28) функция  $g = G(\tau)$  определяется неявно соотношением

$$\int_{g_1}^g F(g)dg = 2 \ln \frac{\tau}{\tau_1}, \quad (31)$$

$$\mu = F(G(\tau)) = M(\tau) \sim \lambda(\tau),$$

где  $g_1 = g(\tau_1)$ ,  $\tau_1 \in (\tau_0; \infty)$ .

Из (23), (26), (27) следует  $\omega_A \sim G(\tau)(2\tau)^{-1}$ .

Из (19), (22), (25) следует  $s_{22}^A = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\varepsilon})\tau^{-1}$ ,

$s_{33}^A = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\varepsilon})\tau^{-1}$ . Элементы матрицы  $A$  из (1) определены

$$-A^T = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^A & -\omega_A \\ 0 & \omega_A & s_{33}^A \end{pmatrix} = \frac{D}{2\tau}, \quad (32)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M(\tau) + \sqrt{\varepsilon} & -G(\tau) \\ 0 & G(\tau) & M(\tau) - \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Для вектора  $\vec{u}_0$  справедливо уравнение:

$$\mu \vec{u}_{0\tau\tau} + \left(\mu_\tau + \frac{\mu}{\tau}\right) \vec{u}_{0\tau} + \left(2A_\tau + \frac{1}{\tau}A\right) \vec{u}_0 = \frac{2\tau}{a_0\tau^2 + 1} \vec{\xi}, \quad (33)$$

где

$$\vec{\xi}(1 + 16(a_0\tau^2 + 1)^{-2/a_0}) = \mu \vec{u}_{0\tau} + A\vec{u}_0 - 4(a_0\tau^2 + 1)^{-1/a_0} \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \mu(\vec{u}_{02})_\tau + (A\vec{u}_0)_2 \\ -\mu(\vec{u}_{03})_\tau - (A\vec{u}_0)_3 \end{array} \right\|,$$

$$2A_\tau + \frac{1}{\tau}A = \frac{1}{\tau^2} \left( \frac{2}{F(G)}H - \frac{1}{2}D \right),$$

$$H(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_g(G) & -1 \\ 0 & 1 & F_g(G) \end{pmatrix}.$$

Для приближенного решения растянем переменную  $\tau = \sqrt{\varepsilon}\tau_1$ . С точностью до  $\varepsilon$  уравнение (33) принимает вид:

$$\mu \vec{u}_{0\tau_1\tau_1} + \left(\mu_{\tau_1} + \frac{\mu}{\tau_1}\right) \vec{u}_{0\tau_1} + \left[ \frac{2H(G)}{\tau_1^2 F(G)} - \frac{D(\tau_1)}{2\tau_1^2} \right] \vec{u}_0 = 0. \quad (34)$$

Начальные данные возьмем в виде  $\vec{u}_0 = \vec{u}_{00}$ ,  $\vec{u}_{0\tau} = \vec{u}_{01}$ . Если начальные данные нулевые, то решение нулевое  $\vec{u}_0 = 0$ .

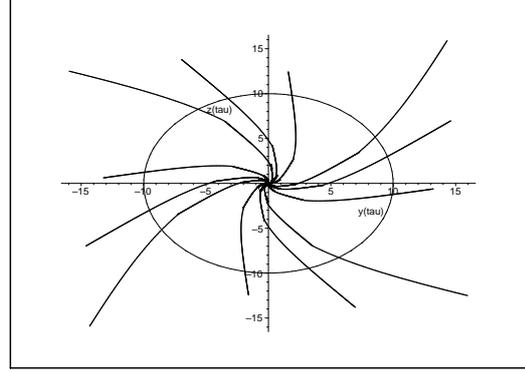


Рис. 1. Траектории частиц

## 8. Мировые линии частиц

Мировые линии задаются уравнением [9]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{u}_0,$$

где матрица  $A$  задана формулой (32), вектор  $\vec{u}_0$  задан формулой (34). Перейдем к дифференцированию по  $\tau$ :

$$M(\tau) \frac{d\vec{x}}{d\tau} \sim A\vec{x} + \vec{u}_0.$$

В координатной записи имеем:

$$M(\tau)x_\tau = u_{01},$$

$$M(\tau)y_\tau = \frac{1}{2\tau} \left( (M(\tau) + \sqrt{\varepsilon})y - G(\tau)z \right) + u_{02}, \quad (35)$$

$$M(\tau)z_\tau = \frac{1}{2\tau} \left( G(\tau)y + (M(\tau) - \sqrt{\varepsilon})z \right) + u_{03},$$

где  $M(\tau)$  и  $G(\tau)$  вычисляются по формулам (31). Решая систему (35) численно при  $\varepsilon = 0, 1$ ,  $\tau \in [0, 7; 10]$ ,  $G(1) = 1$ ,  $M(1) = 0, 3411$ , получим мировые линии. Траектории частиц изображены на рис. 1. Каждая частица газа движется по своей траектории. Частицы, находящиеся на одной траектории в начальный момент времени, движутся по ней. Скорость частицы при движении совершает поворот. Выясним, как ведут себя траектории при  $\tau \rightarrow \infty$ .

В полярных координатах  $y = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$  при нулевых начальных условиях для уравнения (34), система (35) расщепляется:

$$\begin{aligned} 2\tau r^{-1} r_\tau &= 1 + \sqrt{\varepsilon} M^{-1} \cos 2\varphi, \\ 2\tau M \varphi_\tau &= G - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (36)$$

Решение по  $\varphi$  периодическое с периодом  $\pi$ . Значит, начальные данные  $\varphi(1) = \varphi_0$  достаточно брать в интервале  $\varphi_0 \in (0; \pi)$ . Начальные данные  $r(1) = r_0$  определяются произвольной постоянной  $r_0$ . При  $r_0 = 0$  имеем решение  $r = 0$ , частица стоит на месте.

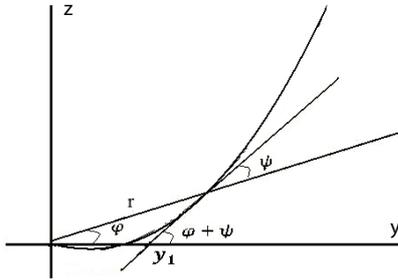


Рис. 2. Положение касательной к траектории

Приближенное решение для φ таково

$$\varphi = \varphi_1 + \sqrt{\varepsilon}\varphi_2 + O(\varepsilon), \tag{37}$$

с начальными данными  $\varphi_0 = \varphi_{01} + \sqrt{\varepsilon}\varphi_{02}$ , где

$$2\tau M\varphi_{1\tau} = G, \quad 2\tau M\varphi_{2\tau} = -\sin 2\varphi_1 \implies \\ \varphi_1 = \tilde{\varphi}_{01} + \int \frac{G}{2\tau M} d\tau, \quad \varphi_2 = \tilde{\varphi}_{02} - \int \frac{\sin 2\varphi_1}{2\tau M} d\tau,$$

где  $\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}_{02}$  — постоянные, которые согласуются с пределами интегрирования.

Приближенное решение (36) для r имеет вид

$$r = r_0\sqrt{\tau} \left( 1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int \frac{\cos 2\varphi_1}{M\tau} d\tau \right) + O(\varepsilon). \tag{38}$$

При  $\tau \rightarrow \infty$  функция  $M(\tau) \sim 4\tau^{1/2}c^{-1}$ , где c — некоторая постоянная. Теперь по формулам (37) находим функцию φ:

$$\varphi \sim \bar{\varphi}_0 - \frac{c}{4\tau^{1/2}} (g_0 - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01}),$$

где  $\bar{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}_{01} + \sqrt{\varepsilon}\tilde{\varphi}_{02} + \frac{c}{4\tau_1^{1/2}}(g_0 - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01})$ . По формуле (38) находим функцию r(τ):

$$r = r_0 \left( \sqrt{\tau} - \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4} \left( \cos 2\bar{\varphi}_{01} - \frac{cg_0}{4\sqrt{\tau}} \sin 2\bar{\varphi}_{01} \right) \right) + \\ + O(\varepsilon\sqrt{\tau}) + O(\sqrt{\varepsilon}\tau^{-1/2}),$$

где  $\bar{\varphi}_{01} = \tilde{\varphi}_{01} + \frac{cg_0}{4\tau_1^{1/2}}$ . Итак,  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}_0, r \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Из формул для φ(τ) и r(τ) находим выражение для r = r(φ):

$$r \sim r_1(\bar{\varphi}_0 - \varphi)^{-1} + r_2 + O(\bar{\varphi}_0 - \varphi),$$

где  $r_1 = r_0k, r_2 = -r_0ck^{-1}\sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01}/16, k = c(g_0 - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01})/4 > 0$ .

Определим угол ψ между касательной к линии r = r(φ) в некоторой точке и радиусом вектором

этой точки при  $\tau \rightarrow \infty$ . Угол вычисляется по формуле:

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{d \ln r}{d\varphi} \sim \frac{r_1}{(\bar{\varphi}_0 - \varphi)(r_1 + r_2(\bar{\varphi}_0 - \varphi))} \rightarrow \infty \implies \\ \psi \sim \bar{\varphi}_0 - \varphi.$$

То есть, при  $\tau \rightarrow \infty$  касательная приближается к радиусу-вектору:  $\psi \rightarrow 0$ . Угол наклона касательной к оси y имеет предел:  $\varphi + \psi \rightarrow \bar{\varphi}_0$ .

Определим наличие асимптот у траектории. Для этого определим как меняется при  $r \rightarrow \infty$  значение  $y_1$  (см. рис. 2):

$$y_1 = r \cos \varphi - r \sin \varphi \operatorname{ctg}(\varphi + \psi) = r \frac{\sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)} \sim \\ \sim r_1(\bar{\varphi}_0 - \varphi)^{-1} \frac{(\bar{\varphi}_0 - \varphi)}{\sin \bar{\varphi}_0} = \frac{r_1}{\sin \bar{\varphi}_0} < \infty$$

Следовательно, у касательной есть предельное положение, то есть существует асимптота у любой траектории. Данный факт полностью согласуется с рис. 1.

## 9. Заключение

Итак, описанное в статье решение задает выпрямляющийся разлет газа из вихря.

## Список литературы

- [1] Dirichlet G.L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik // J. für die und angew. Math. 1860. Bd. 58. H4.
- [2] Риман Б. Сочинения. М.: ГИТЛ, 1948. 543 с.
- [3] Овсянников Л.В. Новое решение уравнений гидродинамики // ДАН СССР. 1956. Т. 111, № 1. С. 47–49.
- [4] Dyson J.F. Dynamics of a spinning gas cloud // J. Math. Mech. 1968. V. 18, № 1. P. 91–101.
- [5] Лаврентьева О.М. О движении жидкого эллипсоида // ДАН СССР. 1980. Т. 253, № 4. С. 828–831.
- [6] Пухначев В.В. О движении жидкого эллипса // Динамика сплошной среды. Новосибирск, ИГ СО АН СССР. 1978. Вып. 33. С. 68–75.
- [7] Юлмухаметова Ю.В. Подмодели движения газа с линейным полем скоростей в вырожденном случае // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 139–150.
- [8] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [9] Хабилов С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа.: Гилем, 2003. 192 с.