

Применение фильтрации для определения параметров процесса нестационарной электрохимической обработки

Поречный С.С.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Рассматривается задача моделирования процесса электрохимической обработки металла с помощью плоского электрода-инструмента. Моделирование нестационарного процесса образования выступа на металлической заготовке осуществляется с учетом переменной функции выхода по току. Описано применение метода фильтрации для уточнения параметров обработки.

1. Введение

В известных работах по моделированию электрохимической обработки (ЭХО) (см. например, [1–3]) решаются задачи различной сложности, учитывающие разные факторы, влияющие на процесс обработки.

При ЭХО поле считается чисто электрическим и при этом потенциальным.

Для задач ЭХО границы, как правило, бывают двух типов: непроницаемые (поверхности изолированных частей электродов) и рабочие поверхности электродов. На непроницаемых границах нормальная составляющая напряженности равна нулю.

На границах, соответствующих поверхности электродов, величина потенциала

$$\Phi_a = 0 + \varphi_a, \quad \Phi_c = -U + \varphi_c, \quad (1)$$

где U — напряжение на электродах; φ_a и φ_c — анодный и катодный потенциалы соответственно.

Для ЭХО на импульсном токе в качестве основного расчетного соотношения используется закон Фарадея

$$\frac{dh}{dt} = \eta(j) k_I \frac{\alpha_m}{\rho \kappa} j = \eta(j) \frac{k}{\kappa} j, \quad k = \frac{k_I \alpha_m}{\rho}, \quad (2)$$

где h — толщина растворенного металла; t — время; η — анодный выход по току; α_m — массовый электрохимический эквивалент растворяемого металла; j — плотность тока; k_I — величина, обратная скважности импульсов; ρ — плотность материала.

Ранее при решении задач ЭХО принималось, что зависимость выхода по току от плотности тока либо постоянна, либо она аппроксимировалась

гиперболой [2, 4], либо дробно-квадратичной функцией [2].

В данной работе экспериментальная зависимость выхода по току от напряженности аппроксимировалась дробно-линейной функцией

$$\eta(j) = \begin{cases} 0, & j \leq \beta, \\ \eta_0 \frac{j - \beta}{j - \gamma}, & j > \beta, \end{cases} \quad (\gamma < \beta). \quad (3)$$

Однако оказалось, что параметр γ сравнительно мал, и аппроксимация гиперболой имеет практически такую же погрешность. Использование гиперболы позволяет свести задачу исследования различных режимов обработки к расчетам форм при изменении всего лишь одного параметра $\alpha = E_1/E_0$, где E_0 — характерное значение напряженности.

2. Постановка плоских задач

Рассмотрим в качестве примера задачу ЭХО, схема которой (в сечении) изображена на рис. 1. Плоский электрод-инструмент (ЭИ) $A'FCGB'$ со щелью FG движется вертикально вниз со скоростью V_n . С течением времени поверхность анода AB изменяется за счет электрохимического растворения согласно закону Фарадея (2). Поверхности ЭИ и обрабатываемой детали считаются эквипотенциальными (потенциал детали равен нулю, потенциал ЭИ равен $-U$).

Таким образом, для задачи, рассмотренной на рис. 1, при эквипотенциальных электродах область, соответствующая МЭП, на плоскости комплексного потенциала имеет форму вертикальной полосы шириной U (см. рис. 2).

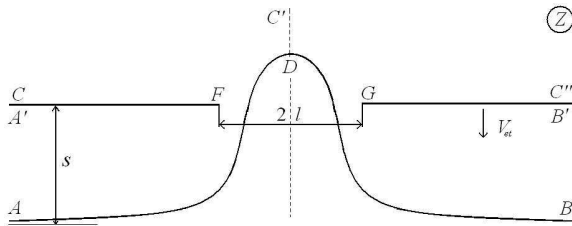


Рис. 1. Схема МЭП

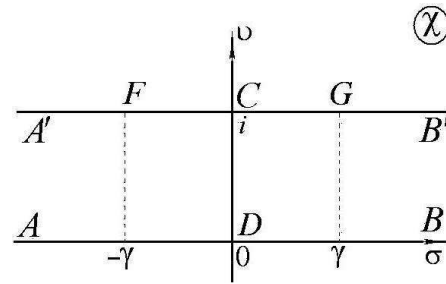


Рис. 3. Форма образа МЭП на параметрической плоскости χ

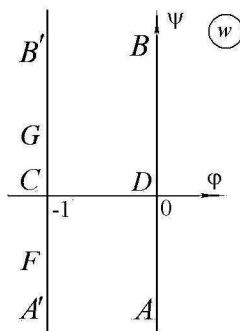


Рис. 2. Форма образа МЭП на плоскости комплексного потенциала

Известны решения задач Хеле–Шоу, полученные на основе методов конечных разностей, конечных и граничных элементов [4]. Тем не менее, разработанные ранее методы не обладают достаточной устойчивостью к накоплению погрешности при расчете длительных переходных процессов.

Отобразим конформно области, соответствующие МЭП на плоскостях Z и W , на полосу χ (рис. 3). Тогда задачу определения функции $W(Z)$, аналитической на области МЭП и удовлетворяющей условию эквипотенциальности анода и катода, можно решать в параметрическом виде.

Необходимо найти три аналитические внутри полосы $0 < \Re\chi < 1$ функции $W(\chi)$, $Z(\chi, t)$ и $\partial Z/\partial t(\zeta, t)$, удовлетворяющие определенным краевым условиям. Функция $W(\chi)$ осуществляет конформное отображение полосы на полосу (и не зависит от времени).

Краевым условием для определения функции $Z(\chi, t)$ является равенство известной при каждом фиксированном t функции $f(\sigma, t)$ мнимой (или действительной) части $Z(\chi, t)$ на границе $\chi = \sigma$ ($-\infty < \sigma < \infty$).

Тогда краевым условием для определения производной $\partial Z/\partial t(\zeta, t)$ на части границы, соответ-

ствующей поверхности анода служит равенство [3]

$$\Im \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \overline{\frac{\partial Z}{\partial \sigma}} \right) = -k\eta(\sigma) \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}. \quad (4)$$

На участках границы, соответствующих поверхности ЭИ, растворения не происходит, поэтому в точках, расположенных на этих границах, правая часть (4) равна нулю (в системе координат связанной с ЭИ). Уравнение (4) является более общим видом краевого условия по типу уравнения Полубариновой–Галина [3].

3. Нестационарная обработка плоским ЭИ со щелью

Рассмотрим плоскую нестационарную задачу электрохимического растворения с помощью ЭИ, представляющего собой фольгу со щелью шириной $2l$ (рис. 1).

Асимптотическая величина зазора на бесконечности влево S изменяется и приближается к стационарной величине

$$S_{st} = \frac{kU}{V_{et}} \eta \left(\frac{U}{S_{st}} \right) = \frac{kU}{V_{et}} \eta_0 \left(\frac{\frac{U}{S_{st}} - E}{\frac{U}{S_{st}}} \right) = \frac{kU\eta_0}{V_{et}} (1 - \alpha), \quad \alpha = \frac{E_1 S_{st}}{U}, \quad E_1 = \frac{j_1}{\kappa}. \quad (5)$$

Задачи удобнее решать в безразмерном виде. Сведение к безразмерным величинам для данной задачи проведем следующим образом. В качестве характерного размера l выберем величину стационарного зазора. Перейдем к безразмерным величинам z, x, y, τ и w , где

$$\begin{aligned} z &= \frac{Z}{S_{st}}, & x &= \frac{X}{S_{st}}, & y &= \frac{Y}{S_{st}}, \\ \tau &= \frac{V_{et}}{S_{st}} t = \frac{k\eta_0(1-\alpha)}{S_{st}^2} t, \\ w &= \frac{W}{U}, & \tilde{\eta}(\sigma) &= \frac{\eta(\kappa E_n)}{\eta_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом согласно (4):

$$\Im \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) = -\tilde{\eta}(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v_{et} &= -\frac{dy'_A}{d\tau} = -\frac{S_{st}}{S_{st}V_{et}} \frac{dY'_A}{dt} = 1, \\ v_{ecm} &= -\frac{dy_A}{d\tau} = \frac{1 - \alpha s(\tau)}{s(\tau)(1 - \alpha)}, \\ s &= \frac{S}{S_{st}}, \quad \frac{ds}{d\tau} = v_{ecm} - v_{et}. \end{aligned} \quad (8)$$

Конформное отображение $w(\chi)$ (рис. 2) осуществляется формулой

$$w = \varphi + i\psi = i\chi, \quad \frac{dw}{d\chi} = i.$$

Функцию $z(\chi, \tau)$ представим в виде суммы $z(\chi, \tau) = z_0(\chi, \tau) + z_\Delta(\chi, \tau)$, где $z(\chi, \tau)$ — искомая функция; $z_0(\chi, \tau)$ — известная функция с особенностями, выбираемая из условия равенства нулю на бесконечности мнимой части $z_\Delta(\chi, \tau)$; $z_\Delta(\chi, \tau)$ — неизвестная функция. В неподвижной системе координат

$$\begin{aligned} z(\chi, \tau) &= s(\tau)\chi - i \int_0^\tau v_{ecm}(\tau_1) d\tau_1 + \\ &+ \mu(\tau) th \frac{\pi\chi}{2} + z_\Delta(\chi, \tau), \end{aligned} \quad (9)$$

где $-i \int_0^\tau v_{ecm}(\tau_1) d\tau_1$ — слагаемое, которое определяет движение асимптоты к анодной поверхности вниз; $\mu(\tau) th \frac{\pi\chi}{2}$ — функция, отображающая полосу на полуплоскость с горизонтальным разрезом, проходящим через бесконечность. Параметр $\mu(\tau)$ определяется отношением l к $s(\tau)$.

Функция $z_\Delta(\chi, \tau)$ получается следующим образом. Будем искать решение на границе $\chi = \sigma$ в узловых точках $\sigma_m (m = 0, \dots, n)$. Задаваемыми будут значения $\Im z_\Delta(\sigma_m, \tau_j) = y_m$. Примем $\Im z_\Delta(\sigma_0, \tau) = 0, \Im z_\Delta(\sigma_n, \tau) = 0$, поскольку $z_\Delta(\sigma, \tau)$ быстро (как экспонента) убывает при $\sigma \rightarrow \pm\infty$. Значения $\Im z_\Delta(\sigma, \tau)$ в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна $P(\sigma, \tau)$, имеющего две непрерывные производные

Для восстановления функции $z_\Delta(\chi, \tau)$ используем формулу Шварца с учетом того, что $z_\Delta(\chi, \tau)$ аналитическая функция, имеющая, как и $z_0(\chi, \tau)$, чисто действительные значения на прямой $\Im\chi = 1$:

$$z_\Delta(\chi, \tau) = sh\pi\chi \int_0^\infty P(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{ch\pi\sigma - ch\pi\chi}. \quad (10)$$

Производная равна

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\chi}(\chi, \tau) &= s(\tau) + \frac{\pi}{2} \frac{\mu(\tau)}{ch^2 \frac{\pi\chi}{2}} + \frac{\partial z_\Delta}{\partial \chi}(\chi, \tau), \\ \frac{\partial z_\Delta}{\partial \chi}(\chi, \tau) &= \int_0^\infty \Im \frac{\partial z_\Delta}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \frac{sh\pi\sigma}{ch\pi\sigma - ch\pi\chi} d\sigma. \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения $\mu(\tau)$ запишем уравнение для полуширины щели ЭИ

$$\begin{aligned} l &= s(\tau)\gamma(\tau) + \mu(\tau) ch \frac{\pi\gamma(\tau)}{2} + \\ &+ z_\Delta(\gamma(\tau) + i, \tau). \end{aligned} \quad (12)$$

На плоскости χ обозначим $\gamma(\tau) + i$ образ точки G , определяемый уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \sigma} &= s(\tau) - \mu(\tau) \frac{\pi}{2sh^2 \frac{\pi\gamma(\tau)}{2}} + \\ &+ \frac{\partial z_\Delta}{\partial \sigma}(\gamma(\tau) + i, \tau) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

так как G является точкой возврата. Таким образом, параметры $\mu(\tau)$ и $\gamma(\tau)$ определяются на каждом временном шаге путем решения системы уравнений (12), (13).

Нестационарная задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений численным методом с конечным шагом по времени $\Delta\tau$. При этом на каждом временном шаге τ_j решаются задачи конформного отображения полосы параметрической плоскости χ на физическую плоскость z . В полном объеме эта задача решается только при $\tau = 0$, так как после каждого шага по времени значения переменных $y_m(\tau_j)$ являются известными, и остается только подставить их в сплайн и интеграл Шварца (10). После этого остается решить краевую задачу: найти частную производную $\frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ как аналитическую функцию комплексного параметра χ , удовлетворяющую краевому условию (7).

Для вычисления производной $\frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_\Delta(\chi, \tau_j)$. Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta\tau$ будут значения $\Im \frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\sigma_m, \tau_j) = q_m$. Значения $\Im \frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\sigma, \tau_j)$ в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна $Q(\sigma, \tau)$. Для восстановления $\frac{\partial z_\Delta}{\partial \tau}(\chi, \tau)$ используем формулу Шварца (10).

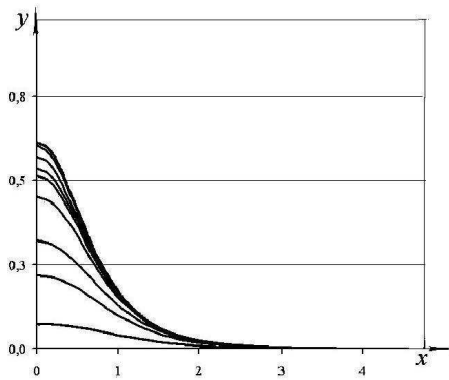


Рис. 4. Формы обрабатываемой поверхности при $l = 1$ ($\alpha = 0,25$)

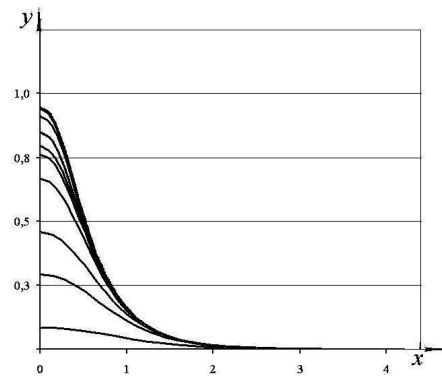


Рис. 5. Формы обрабатываемой поверхности при $l = 1$ ($\alpha = 0,5$)

Определим производную $\frac{\partial z}{\partial \tau}$ при $\chi = \sigma + i0$ с учетом (8):

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{ds}{d\tau} \sigma - iv_{ecm} + \frac{d\mu}{d\tau} th \frac{\pi \chi}{2} + \frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}. \quad (14)$$

Значения q_m определяются методом коллокаций [3] по краевому условию (7) с учетом (11), (14) и того, что $\psi = \sigma$. На катоде краевое условие $\Im z(\sigma + i) = s$ выполняется за счет выбора вида искомой функции (9). Численно задача решается методом предиктор–корректор второго порядка с использованием сплайна и интеграла Шварца на каждом временном шаге.

4. Численные результаты

На рис. 4–7 показаны формы нестационарной обрабатываемой поверхности при различных l : $l = 1$ (рис. 4, 5) и $l = 3$ (рис. 6, 7) для $\alpha = 0,25$ и $\alpha = 0,5$. Видно, что при $l = 1$ при рассмотренных α наблюдается установление стационарной формы, однако, при $l = 3$ стационарное решение не устанавливается, а происходит неограниченный рост высоты выступа. Это объясняется тем, что при $l = 1$ напряженность в верхней точке выступа имеет значения большие, чем E_1 , а при $l = 3$ за счет отдаления от кромок ЭИ напряженность становится меньше, чем E_1 (с начала процесса или с некоторого момента времени), и растворения в этих точках не происходит. Устанавливается некоторая «финальная» форма.

В работе было проведено сравнение форм выступов, полученных экспериментально и расчетно. Расхождение МЭЗ порядка 10–20% при расчете с $\eta = \text{const}$ наблюдается в области, близкой к основанию («прикомлевой»). При расчете формы с помощью предложенного численного метода и использования экспериментальной зависимости $\eta(j)$ погрешность существенно уменьшается.

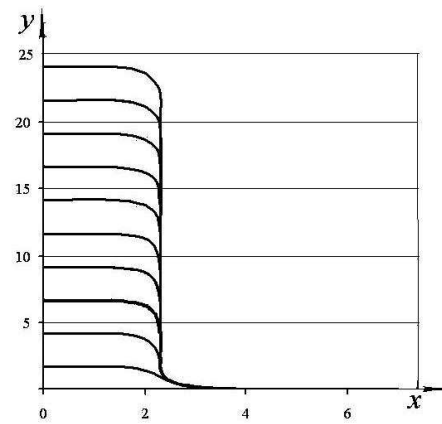


Рис. 6. Формы обрабатываемой поверхности при $l = 3$ ($\alpha = 0,25$)

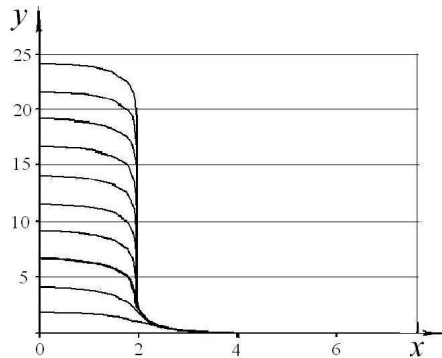


Рис. 7. Формы обрабатываемой поверхности при $l = 3$ ($\alpha = 0,5$)

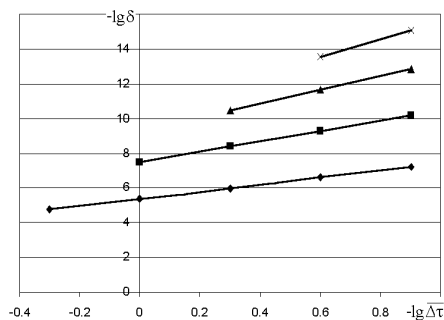


Рис. 8. Результаты фильтрации по $\Delta\tau$ для оценки погрешности и уточнения результатов

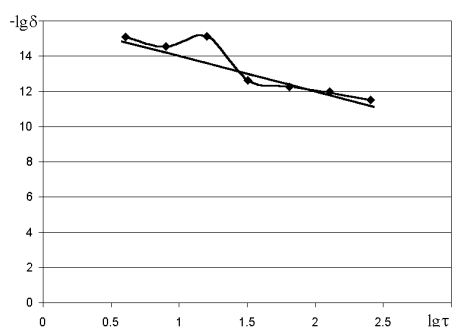


Рис. 9. Зависимость погрешности округления от τ

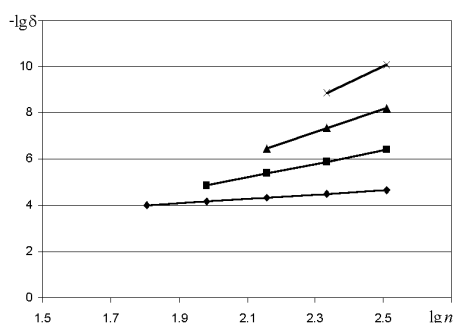


Рис. 10. Результаты фильтрации и оценки погрешности по числу узлов n

Поскольку установление финальной формы происходит значительно медленнее, для исследования этой зависимости применяется многоэтапная фильтрация. На рис. 8 показаны зависимости оценок относительной погрешности от шага по без-

размерному времени $\Delta\tau$ для $\lambda = 3$; $n = 144$; $\overline{\Delta\tau} = \Delta\tau/\Delta\tau_0$, $\Delta\tau_0 = 0,01$ с помощью фильтрации [5]. Видно, что фильтрация позволяет существенно уточнить результаты. Однако с увеличением τ точность ограничивается наличием погрешности округления. Согласно рис. 9 зависимость этой погрешности от $\lg \tau$ близка к линейной $y = 16 - 2 \cdot \lg \tau$.

Влияние числа узловых точек n на погрешность проиллюстрирована на рис. 10 для $\lambda = 3$; $\tau = 32$; $\Delta\tau = 0,01$. Обнаруживаются степенные составляющие погрешности с $f_j(n) = n^{-k_j}$, $k_j = 1, 3, 5, \dots$

5. Выводы

На основе ТФКП предложена новая двумерная математическая модель нестационарного процесса ЭХО. Найдены формы выступов, возникающих на обрабатываемой поверхности при обработке плоским ЭИ со целью.

Сравнение форм выступов на обрабатываемой поверхности, полученных экспериментально и теоретически, показало их удовлетворительное совпадение.

С помощью методов фильтрации численных результатов найдены закономерности и параметры, характеризующие погрешность финальных форм обрабатываемой поверхности.

Список литературы

- [1] Клоков В.В. Электрохимическое формообразование. Казань: КГУ, 1984. 80 с.
- [2] Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е.И. Методы расчета электрохимического формообразования. Казань: КГУ, 1990. 387 с.
- [3] Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008. 413 с.
- [4] Миназетдинов Н.М. Об одной задаче размерной электрохимической обработки // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 214–220.
- [5] Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Поречный С.С. Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. № 3(80). С. 105–110.