

Смена симметрии однородной неустойчивости при изменении температуры в стационарном сдвиговом потоке нематика со слабыми граничными условиями в электромагнитном поле¹

Насибуллаев И.Ш.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В работе проводится численное исследование индуцированного изменения температуры переключения симметрии однородной неустойчивости в стационарном сдвиговом потоке нематического жидкого кристалла в электромагнитном поле со слабыми граничными условиями.

1. Введение

Нематические жидкие кристаллы (НЖК) представляют собой фазу, промежуточную между твердым телом и жидкостью. Как и твердые тела НЖК обладают анизотропией ряда физических свойств (упругость, двулучепреломление), а как жидкость могут течь. Эти особенности приводят к тому, что НЖК чувствителен к внешним воздействиям (гидродинамические течения, электромагнитные поля, ориентирующее влияние твердой поверхности) и демонстрируют ряд физических явлений, одним из которых является ориентационная неустойчивость — изменение равновесной ориентационной структуры НЖК выше порогового значения внешнего воздействия. Исследование комбинированного воздействия внешних электромагнитных полей и ориентирующего влияния ограничивающей поверхности (слабого сцепления) на устойчивость течения НЖК рассматривалась ранее в теоретической работе [1]. Было показано, что в зависимости от величин внешнего воздействия возможны четыре типа неустойчивости: два вида пространственной структуры (однородная и пространственно-периодическая) могут иметь две различные симметрии возмущений (четная и нечетная). В работе [2] на примере однородной неустойчивости было показано, что температура может влиять на величину порога неустойчивости. В данной работе приводятся результаты расчетов параметров, при которых возможна смена типа однород-

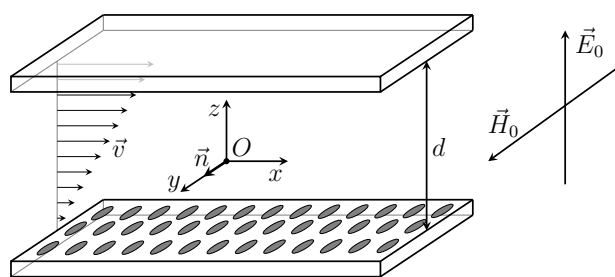


Рис. 1. Геометрия задачи

ной неустойчивости (смена симметрии структурно-ориентационного перехода) под действием температуры.

2. Математическая модель

Рассматривается слой НЖК толщиной d , заключенного между двумя бесконечными параллельными пластинами (рис. 1). Начало декартовой системы координат помещено в центре слоя, ось z направлена перпендикулярно слою. Исследуется ориентационная устойчивость НЖК в сдвиговом стационарном потоке вдоль оси Ox от внешних электрического \vec{E}_0 (направленного перпендикулярно слою, вдоль оси Oz) и магнитного \vec{H}_0 (направленного перпендикулярно плоскости потока Oy) полей и характера поверхностного сцепления в области температур существования нематической фазы ($T = 20 \div 46.2^\circ \text{C}$). Начальная ориентация НЖК \vec{n}_0 перпендикулярна плоскости потока (направлена вдоль оси Oy).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-97009).

Течение НЖК описывается уравнением Навье–Стокса [3]:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -p_{,i} + \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где введено обозначение для частной производной $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$, $p_{,i}$ — компоненты градиента давления; ρ — плотность НЖК; v_i — компоненты скорости жидкости.

Тензор вязкости характеризует вязкость жидкости при течении в различных направлениях и содержит 6 коэффициентов вязкости α_i :

$$\Sigma_{ij} = \alpha_1 n_i n_j A_{km} n_k n_m + \alpha_2 n_i N_j + \alpha_3 n_j N_i + \alpha_4 A_{ij} + \alpha_5 n_i n_k A_{kj} + \alpha_6 A_{ik} n_k n_j. \quad (2)$$

Симметричный тензор скорости:

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (3)$$

Скорость изменения ориентации директора:

$$N_i = \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i}{\partial x_j} v_j + n_j \omega_{ij}. \quad (4)$$

Антисимметричный тензор скорости:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (5)$$

Уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z} = 0. \quad (6)$$

Уравнение баланса моментов сил, действующих на директор:

$$I \frac{d}{dt} \left[\vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{dt} \right] = [\vec{n} \times \vec{h}^e] - [\vec{n} \times \vec{h}^d], \quad (7)$$

где I — момент инерции.

Упругая h^e и диссипативная h^d части молекулярного поля имеют вид:

$$h_i^e = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial n_{i,j}} - \frac{\partial F}{\partial n_i}, \quad h_i^d = \gamma_1 N_i + \gamma_2 A_{ij} \cdot n_j, \quad (8)$$

где $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$ — вращательные вязкости НЖК.

Объемная плотность свободной энергии F во внешнем электрическом \vec{E} и магнитном \vec{H} полях имеет вид:

$$F = \frac{1}{2} \{ K_{11} (\nabla \cdot \vec{n})^2 + K_{22} [\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{n})]^2 + K_{33} [\vec{n} \times (\nabla \times \vec{n})]^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_a (\vec{n} \cdot \vec{E})^2 - \mu_0 \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H})^2 \}. \quad (9)$$

Здесь K_{ii} — константы упругости Франка; $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$ — анизотропия диэлектрической проницаемости НЖК (ε_{\parallel} и ε_{\perp} — диэлектрические проницаемости параллельно и перпендикулярно направлению длинных осей молекул НЖК, соответственно); $\chi_a = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$ — анизотропия магнитной восприимчивости; ε_0 и μ_0 — диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость в вакууме, соответственно [4].

Так как директор представляет собой единичный вектор, записывается условие нормировки:

$$\vec{n}^2 = 1 \Rightarrow n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (10)$$

Граничные условия для скорости определяются условиями прилипания (скорость молекул НЖК на поверхности совпадает со скоростью самой поверхности):

$$v(z = -d/2) = 0, \quad v(z = +d/2) = V_0, \quad (11)$$

где V_0 — скорость движения верхней пластины относительно неподвижной нижней.

Граничные условия на ориентацию директора определяются из условия равновесия моментов сил, действующих на директор на ограничивающей поверхности [5]:

$$\pm \frac{\partial F}{\partial (\partial n_i / \partial z)} + \frac{\partial F_s}{\partial n_i} = 0, \quad (12)$$

где знак « \pm » соответствует поверхности $z = \pm d/2$; F — объемная плотность свободной энергии; F_s — поверхностная плотность свободной энергии, которая для малых отклонений $\vec{n}_1 = \vec{n} - \vec{n}_0$ директора \vec{n} от равновесия \vec{n}_0 , по аналогии с потенциалом Раппини [6], имеет вид:

$$F_s = \frac{1}{2} W_a n_{1x}^2 + \frac{1}{2} W_p n_{1z}^2, \quad (13)$$

где $W_a > 0$ — азимутальная сила поверхностного сцепления (характеризующая силу, которую необходимо приложить к директору для его поворота в плоскости твердой поверхности) и $W_p > 0$ — полярная сила поверхностного сцепления (характеризующая силу, которую необходимо приложить к директору для его отклонения от плоскости твердой поверхности).

2.1. Базовое течение

Базовое состояние системы определим таким образом, чтобы директор был ориентирован перпендикулярно плоскости потока:

$$\vec{n}_0 = (0, 1, 0). \quad (14)$$

Базовая скорость имеет только компоненту v_x и зависит от z (плоское параллельное течение):

$$\vec{v}_0(z) = (v_{0x}(z), 0, 0). \quad (15)$$

В случае сдвигового потока давление постоянно (и равно атмосферному давлению с открытых концов ячейки), то есть $p_{,x} \equiv 0$. Таким образом, решение с учетом граничных условий (11) имеет вид:

$$v_{0x} = V_0 \left(\frac{z}{d} + \frac{1}{2} \right). \quad (16)$$

2.2. Линейный анализ устойчивости

Линейный анализ устойчивости позволяет определить пороговое значение параметров системы, при которых течение становится неустойчивым относительно бесконечно малых возмущений.

Ищем решения в следующем виде:

$$\vec{n}(z) = \vec{n}_0 + \vec{n}_1(z), \quad \vec{v}(z) = \vec{v}_0(z) + \vec{v}_1(z), \quad (17)$$

где \vec{n}_0 и $\vec{v}_0(z)$ — базовое состояние (14), (15) и $\vec{n}_1(z)$, $\vec{v}_1(z)$ — малые возмущения.

Для однородных (вдоль оси Oy) возмущений:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(z) &= \{n_{1x}(z), n_{1y}(z), n_{1z}(z)\}, \\ \vec{v}_1(z) &= \{v_{1x}(z), v_{1y}(z), v_{1z}(z)\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (17) в систему уравнений (1), (7) и граничные условия (11), (12) и линеаризуя полученные выражения относительно малых параметров компонент \vec{n}_1 и \vec{v}_1 , получаем уравнения на бесконечно малые возмущения, содержащие градиент сдвига $v_{0x,z}$. Порогу ориентационной неустойчивости соответствует значение $v_{0x,z}$, при котором существует нетривиальное решение для $\{\vec{n}_1, \vec{v}_1\}$. Пороговое значение $v_{0x,z}$ зависит от параметров системы, определяемых внешними воздействиями и условиями (характера поверхностного сцепления, величины напряженности внешнего поля, температуры).

Для того чтобы определить характерные параметры системы и упростить запись уравнений, перепишем математическую модель в безразмерной форме. В качестве характерного расстояния выберем толщину слоя d , в качестве характерного времени — характерное время релаксации директора $\tau_d = \frac{(-\alpha_2)d^2}{K_{22}}$. В безразмерном виде компоненты директора и скорости (с тильдами) имеют вид:

$$\begin{aligned} n_{1x} &= \tilde{n}_{1x}, n_{1z} = \tilde{n}_{1z}, \\ v_{1x} &= \frac{d}{\tau_d} \tilde{v}_{1x}, v_{1z} = \frac{d}{\tau_d} \tilde{v}_{1z}, \partial_z = \frac{1}{d} \partial_{\tilde{z}}. \end{aligned}$$

Чтобы получить более компактную систему уравнений, используем следующие аффинные преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{1x} &= \frac{N_{1x}}{\beta}; \tilde{n}_{1z} = N_{1z}; \\ \tilde{v}_{1x} &= \frac{V_{1x}}{\beta^2}; \tilde{v}_{1z} = \frac{V_{1z}}{\beta^2 \eta_{23}}; \beta^2 = \frac{K_{22} \alpha_3 \eta_3}{K_{11} \alpha_2 \eta_1}; \end{aligned}$$

Введем безразмерные коэффициенты вязкости и упругости:

$$\begin{aligned} \eta_{13} &= \frac{\eta_1}{\eta_3}; \eta_{31} = \frac{\eta_3}{\eta_1}; \eta_{42} = \frac{\eta_4}{\eta_2}; \eta_{53} = \frac{\eta_5}{\eta_3}; \\ \alpha_{23} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_3}; k_{21} = \frac{K_{22}}{K_{11}}; k_{31} = \frac{K_{33}}{K_{11}}; k_{32} = \frac{K_{33}}{K_{22}}, \end{aligned}$$

Введем безразмерные поля и характеристические величины:

$$\begin{aligned} e &= \text{sgn}(\varepsilon_a) \frac{\pi^2 E_0^2}{E_F^2}; h = \frac{\pi^2 H_0^2}{H_F^2}; \\ E_F &= \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_{11}}{|\varepsilon_a| \varepsilon_0}}; H_F = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_{22}}{\mu_0 \chi_a}}; \tau_v = \frac{\rho d^2}{\eta_3}, \end{aligned}$$

где E_F , H_F — поля перехода Фредерикса для жесткого сцепления; τ_v — характерное время релаксации скорости.

Граничные условия перепишем в виде:

$$\begin{aligned} v_{1y}(z = \pm d/2) &= 0, \\ \pm \frac{K_{22}}{W_a} n_{1x,\tilde{z}} + n_{1x} &= 0, \\ \pm \frac{K_{11}}{W_p} n_{1z,\tilde{z}} + n_{1z} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для характеристики компонент силы поверхностного сцепления введем безразмерные величины $\beta_a = \frac{K_{22}}{W_a d}$, $\beta_p = \frac{K_{11}}{W_p d}$ — отношения характеристической длины компоненты силы поверхностного сцепления $\frac{K_{ii}}{W_j}$ к толщине слоя d . $\beta_i = 0$ соответствует идеальному жесткому сцеплению (ориентация НЖК на поверхности фиксирована), $\beta_i = \infty$ — идеальному слабому сцеплению (т.е. поверхность не оказывает ориентирующего воздействия на НЖК), а конечные значения β_i — реальному слабому сцеплению (отклонение ориентации молекул НЖК на поверхности от равновесного значения возрастает с ростом возмущения).

Контрольным безразмерным параметром для градиента скорости сдвига будет $a^2 = \frac{\beta \tau_d V_0}{d}$.

Окончательные уравнения в безразмерном виде (для удобства тильды опускаем):

$$\begin{aligned} V_{1y,zz} + (\eta_{23} - 1)(a^2 N_{1x})_{,z} &= 0, \\ -a^2 N_{1z} - N_{1x,zz} + h N_{1x} &= 0, \\ (\partial_z^2 + e - k_{21}h)N_{1z} + V_{1y,z} + a^2 \eta_{23} N_{1x} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} V_{1y}(z = \pm 1/2) &= 0, \\ \pm \beta_a N_{1x,z} + N_{1x} &= 0, \quad \pm \beta_p N_{1z,z} + N_{1z} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

2.3. Симметрия однородных неустойчивостей

Проводим анализ симметрий решений системы (20) с граничными условиями (21) относительно преобразования $z \rightarrow -z$. Обозначим как «четное» решение, решение с четной симметрией компоненты N_{1x} , «нечетное» — соответственно с нечетной симметрией этой компоненты. Симметрия остальных компонент определяется однозначно из уравнений для заданной симметрии одной из компонент.

Нечетное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} N_{1x} &= C_1 \operatorname{sh}(\xi_1 z) + C_2 \sin(\xi_2 z), \\ N_{1z} &= C_3 \operatorname{sh}(\xi_1 z) + C_4 \sin(\xi_2 z), \\ V_{1y} &= C_5 \operatorname{ch}(\xi_1 z) + C_6 \cos(\xi_2 z) + C_7. \end{aligned} \quad (22)$$

После подстановки (22) в систему (20) и граничные условия (21), получаем выражение для порогового напряжения сдвига:

$$\begin{aligned} &(\pi^2 h + \xi_2^2)(\xi_1 \beta_a \operatorname{ch}(\xi_1/2) + \operatorname{sh}(\xi_1/2)) \times \\ &\quad \times (\xi_2 \beta_p \cos(\xi_2/2) + \sin(\xi_2/2)) - \\ &-(\pi^2 h - \xi_1^2)(\xi_2 \beta_a \cos(\xi_2/2) + \sin(\xi_2/2)) \times \\ &\quad \times (\xi_1 \beta_p \operatorname{ch}(\xi_1/2) + \operatorname{sh}(\xi_1/2)) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где:

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= \frac{\pi^2}{2k_{12}} \left\{ [(1 + k_{12})h - k_{12}e] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{[(1 - k_{12})h - k_{12}e]^2 + 4k_{12}^2 \frac{a^4}{\pi^4}} \right\}, \\ \xi_2^2 &= \frac{\pi^2}{2k_{12}} \left\{ -[(1 + k_{12})h - k_{12}e] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{[(1 - k_{12})h - k_{12}e]^2 + 4k_{12}^2 \frac{a^4}{\pi^4}} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{и } k_{12} = \frac{K_{11}}{K_{22}}.$$

Решение четного типа имеет вид:

$$\begin{aligned} N_{1x} &= C_1 \operatorname{ch}(\xi_1 z) + C_2 \cos(\xi_2 z) + C_3, \\ N_{1z} &= C_4 \operatorname{ch}(\xi_1 z) + C_5 \cos(\xi_2 z) + C_6, \\ V_{1y} &= C_7 \operatorname{sh}(\xi_1 z) + C_8 z. \end{aligned} \quad (25)$$

После подстановки (25) в систему (20) и граничные условия (21) пороговое значение напряжения сдвига находится из условия существования нетривиального решения:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi^2 h & f_0 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \end{vmatrix} = 0, \quad (26)$$

где:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\eta_{13}}{2} \left(\frac{\pi^4 h(h - ke)}{a^4 k \eta_{13}} - 1 \right), \\ f_1 &= -\xi_2 \beta_a \sin(\xi_2/2) \cos(\xi_2/2), \\ f_2 &= (\pi^2 h + \xi_2^2) [-\xi_2 \beta_p \sin(\xi_2/2) + \cos(\xi_2/2)], \\ f_3 &= \frac{1 - \eta_{13}}{\xi_2} \sin(\xi_2/2), \\ f_4 &= \xi_1 \beta_a \operatorname{sh}(\xi_1/2) + \operatorname{ch}(\xi_1/2), \\ f_5 &= (\pi^2 h - \xi_1^2) [\xi_1 \beta_p \operatorname{sh}(\xi_1/2) + \operatorname{ch}(\xi_1/2)], \\ f_6 &= \frac{1 - \eta_{13}}{\xi_1} \operatorname{sh}(\xi_1/2). \end{aligned}$$

Из условия существования нетривиального решения получаем трансцендентное выражение, содержащее параметр $a^2 = a^2(e; h; \beta_a; \beta_p)$ — безразмерная скорость сдвига, зависящая от величин электрического и магнитного полей и компонент силы поверхностного сцепления. Решение этого уравнения относительно a^2 дает нам пороговое значение a_c^2 , при котором базовое состояние теряет устойчивость. Из двух типов решений реализуется только то, которое соответствует наименьшему порогу a_c^2 .

3. Результаты

Расчеты порога неустойчивости проводились для материальных параметров НЖК МББА в температурном диапазоне существования нематической фазы $T = 20 \div 46, 2^\circ \text{C}$. Температурные зависимости для коэффициентов упругости K_{ii} были взяты из работы [7]. Экспериментальные данные по измерению коэффициентов вязкости α_i [8] были нами обработаны методом наименьших квадратов для получения функциональной зависимости $\alpha_i(T)$ в виде многочленов 4-го порядка (отличие $\alpha_i(T)$ в

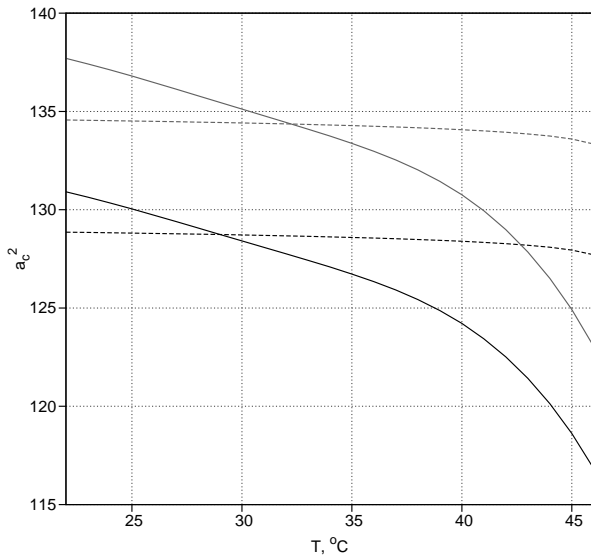


Рис. 2. Зависимость a_c^2 для однородной четной (—) и нечетной (---) неустойчивости от температуры T в магнитном поле ($H_0/H_F = 3, 5$ — черная линия, $H_0/H_F = 3, 6$ — серая линия) для компонент сцепления $\beta_a = 1, \beta_p = 0, 01$

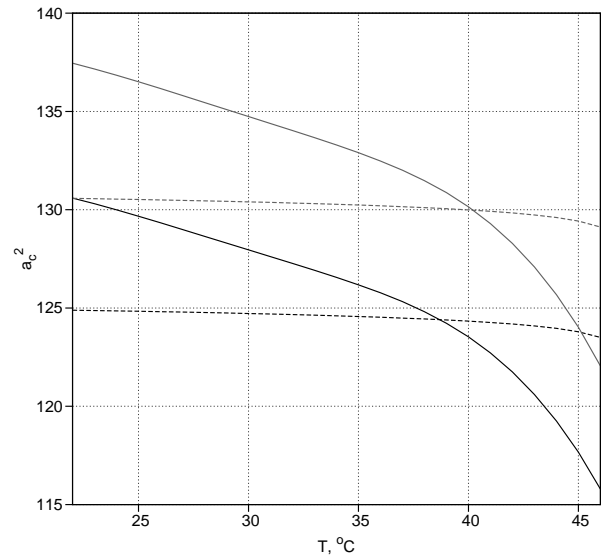


Рис. 3. Зависимость a_c^2 для однородной четной (—) и нечетной (---) неустойчивости от температуры T в магнитном поле ($H_0/H_F = 3, 5$ — черная линия, $H_0/H_F = 3, 6$ — серая линия) для компонент сцепления $\beta_a = 0, 01, \beta_p = 1$

экспериментальных точках не превышает 5%):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,033 - 0,0085T + 4,4 \cdot 10^{-4}T^2 - \\ &\quad - 9,2 \cdot 10^{-6}T^3 + 7,1 \cdot 10^{-8}T^4, \\ \alpha_2 &= -0,424 + 0,0145T + 1,46 \cdot 10^{-4}T^2 - \\ &\quad - 1,29 \cdot 10^{-5}T^3 + 1,55 \cdot 10^{-7}T^4, \\ \alpha_3 &= 0,019 - 0,0028T + 1,47 \cdot 10^{-4}T^2 - \\ &\quad - 3,49 \cdot 10^{-6}T^3 + 3,03 \cdot 10^{-8}T^4, \\ \alpha_4 &= 0,439 - 0,0312T + 0,0011T^2 - \\ &\quad - 1,81 \cdot 10^{-5}T^3 + 1,23 \cdot 10^{-7}T^4, \\ \alpha_5 &= 0,214 + 0,0012T - 0,00069T^2 + \\ &\quad + 2,23 \cdot 10^{-5}T^3 - 2,21 \cdot 10^{-7}T^4, \\ \alpha_6 &= -0,197 + 0,0138T - 4,33 \cdot 10^{-4}T^2 + \\ &\quad + 6,79 \cdot 10^{-6}T^3 - 4,21 \cdot 10^{-8}T^4. \end{aligned}$$

Под действием электрического поля E_0 пороги неустойчивости возрастают, но порог неустойчивости четного типа всегда ниже порога для неустойчивости нечетного типа во всей рассматриваемой температурной области и во всем диапазоне компонент сил поверхностного сцепления.

В магнитном поле возможна смена типа неустойчивости [1] при изменении величины магнитного поля H_0 и компонент сил поверхностного сцепления β_a и β_p . На рис. 2 показана смена симметрии структурно-ориентационного перехода при

заданных H_0, β_a и β_p вызванная изменением температуры. Для слабого азимутального $\beta_a = 1$ и жесткого полярного $\beta_p = 0, 01$ сцепления в магнитном поле с ростом температуры четная однородная неустойчивость сменяется однородной неустойчивостью нечетного типа. С ростом величины магнитного поля смена типа неустойчивости происходит при более высоком значении температуры. Отметим, что величина порога нечетного типа неустойчивости сильно зависит от температуры (уменьшается с ростом температуры), в то время как порог неустойчивости четного типа при изменении температуры меняется слабо.

На рис. 3 показана смена симметрии структурно-ориентационного перехода для тех же параметров, что на рис. 2, но с жестким азимутальным сцеплением $\beta_a = 0, 01$ и слабым полярным сцеплением $\beta_p = 1$. Видно, что смена компонент сил поверхностного сцепления приводит к уменьшению пороговой амплитуды скорости a_c^2 для нечетного типа неустойчивости (пороговое значение a_c^2 для четного типа неустойчивости практически не изменилось), в результате увеличивая значение температуры T_c , при которой происходит смена симметрии неустойчивости. Таким образом, можно получить зависимость $T_c(\beta_a, \beta_p)$ и из сравнения с результатами эксперимента определить компоненты силы поверхностного сцепления.

4. Заключение

В работе было проведено исследование влияния температуры на смену симметрии неустойчивости в стационарном сдвиговом потоке НЖК под действием электромагнитного поля и температуры. Было получено, что смена симметрии однородной неустойчивости под действием температуры возможна в магнитном поле. Асимметрия зависимости критической температуры T_c от компонент силы поверхностного сцепления β_a и β_p может быть использована для экспериментального определения β_a и β_p .

Список литературы

- [1] Nasibullayev I.Sh. Orientational instabilities in nematic liquid crystals with weak anchoring under combine action of steady flow and external fields /I.Sh. Nasibullayev, O.S. Tarasov, A.P. Krekhov et al. // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 051706-1–10.
- [2] Насибуллаев И.Ш. Влияние температуры на однородные неустойчивости в стационарном сдвиговом потоке нематического жидкого кристалла с жесткими граничными условиями / И.Ш. Насибуллаев, О.В. Юрина // Труды Института механики УНЦ РАН. Вып.7 / Под ред. С.Ф. Урманчеева. Уфа: Гилем, 2010. С. 191–201.
- [3] Де Жен, П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
- [4] Пикин С.А. Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981. 336 с.
- [5] Kedney P.J., Leslie F.M. Switching in a simple bistable nematic cell // Liq. Cryst. V. 24. I. 9. 1998. Pp. 613–618.
- [6] Rapini A., Papoular M. Distorsion d'une lamelle nématique sous champ magnétique conditions d'ancrage aux parois // Liq. Cryst. 1998. V. 24. P. 613–618.
- [7] Leenhouts F. Elastic constants of nematic liquid crystalline Schiff's bases /F. Leenhouts, A.J. Dekker // J. Chem. Phys. 1981. V. 74, № 3. P. 1956–1965.
- [8] Wang H. A method to estimate the Leslie coefficients of liquid crystals based on MBBA data /H. A Wang, Th. X. Wu, S. Gauza et al. // Liquid Crystals. 2006. Vol. 33, № 1. P. 91–98.