

Усиление и гашение волн конечной длительности посредством пузырьковой области в одномерном приближении¹

Галимзянов М.Н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Изучаются некоторые особенности динамики волн давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны конечных размеров в одномерном приближении. Задача рассматривается с учетом нелинейных эффектов. Представлены результаты воздействия волновых импульсов на пузырьковую область с неравномерным распределением пузырьков, а также воздействия на твердую стенку, покрытую пузырьковой завесой.

1. Введение

К настоящему времени имеется ряд работ, посвященных исследованиям одномерных волн в пузырьковых жидкостях, которые описаны в [1, 2]. В данной работе рассмотрена эволюция одномерных волн давления в жидкости с пузырьками газа, а именно случай, плоского удара по жидкости, в которой находится пузырьковая зона конечных размеров с неравномерным распределением пузырьков по длине завесы. Также численно смоделировано ударно-волновое воздействие на твердую стенку, покрытую пузырьковой завесой.

2. Постановка задачи

Пусть в жидкости находится зона, заполненная смесью жидкости с пузырьками газа, ограниченная в общем случае цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси x . Рассмотрим волновые возмущения, которые могут инициироваться воздействием на систему граничным давлением (например, $p = p^0(t)$ при $x = 0$) (рис. 1). На рис. 1 введены следующие обозначения: x_z — координата, обозначающая положение пузырьковой завесы; l_x — протяженность завесы; L — длина канала. Также показано схематическое расположение датчика D .

Для описания движения в пузырьковой жидкости примем следующие основные допущения: в каждом элементарном объеме все пузырьки сфе-

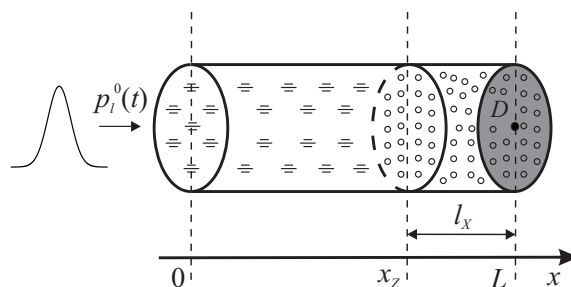


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области с расположением датчиков

рические и одного радиуса, вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсации пузырьков, отсутствует дробление и слипание пузырьков. Кроме того, будем рассматривать случай, когда отсутствует массообмен между фазами, а температуру жидкости (в отличие от температуры газа в пузырьках) можно считать постоянной. Для рассматриваемой смеси запишем систему макроскопических уравнений сохранения масс, числа пузырьков, импульса и давления в пузырьках в односкоростном приближении [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad (i = l, g), \quad \frac{dn}{dt} + n \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial x} &= 0, \quad \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g w}{a} - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \\ w &= \frac{da}{dt} \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ \alpha_l + \alpha_g &= 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \\ \rho_i &= \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l, \end{aligned} \quad (1)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фонда фундаментальных исследований ОЭМПИУ РАН (ОЕ-13), Программы фонда фундаментальных исследований Президиума РАН (П-23) и РФФИ (гранты №№ 11-01-97004-р_поволжье_a и 11-01-00171-а)

где a — радиус пузырьков; γ — показатель адиабаты для газа; p_i — давления фаз; ρ_i^0 — истинные плотности фаз; α_i — объемные содержания фаз; q — интенсивность теплообмена; n — число пузырьков в единице объема; w — радиальная скорость движения стенки пузырька; u — скорость движения по координате x . Нижними индексами $i = l, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения в соответствии с уточнением, предложенным в [3], будем полагать

$$w = w_R + w_A, \quad (2)$$

где w_R описывается уравнением Рэлея–Ламба

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0}, \quad (3)$$

ν_l — вязкость жидкости.

Добавка w_A определяется из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}. \quad (4)$$

Здесь C_l — скорость звука в «чистой» (без пузырьков) жидкости. Жидкость примем акустически сжимаемой, а газ калорически совершенным:

$$p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R T_g, \quad (5)$$

где R — газовая постоянная; T_g — температура. Здесь и в дальнейшем индексами «0» внизу снабжены параметры, относящиеся к начальному невозмущенному состоянию.

Тепловой поток q задается приближенным конечным соотношением [1]:

$$q = \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3, \quad (6)$$

$$\text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100 \\ 10, & \text{Pe} < 100 \end{cases},$$

$$\text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_{pg} \rho_g^0},$$

где $T_0 = \text{const}$ — температура жидкости; λ_g и c_{pg} — теплопроводность и теплоемкость газа при постоянном давлении; Nu — число Нуссельта.

Принятая система уравнений позволяет адекватно описывать динамику волн с достаточно «крутыми» участками, когда сжатие пузырьков определяется не только эффектами радиальной инерции несущей жидкости, но и акустической разгрузкой на пузырьках, и, следовательно, сжимаемостью

жидкости. Кроме того, из этой математической модели в частном случае при $\alpha_g = 0$ следует волновое уравнение для акустически сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой зоной это обстоятельство, в свою очередь, позволяет использовать сквозные методы расчета.

3. Метод численного исследования

Для численного анализа задачи об эволюции волн в жидкости при наличии в ней пузырьковой зоны удобнее пользоваться системой уравнений, приведенной выше, записанной в лагранжевых переменных. Это, в частности, связано с тем, что в лагранжевых координатах пузырьковая зона неподвижна. Из приведенных выше уравнений, после некоторых преобразований, можно получить следующую систему в лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_l}{\partial s}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = u, \\ \frac{\partial p_l}{\partial t} &= \frac{C_l^2 \rho_l^0}{1 - \alpha_g} \left[\frac{3\alpha_g}{a} w + \left(\frac{(1 - \alpha_g)^2}{(1 - \alpha_{g0})} + \alpha_g \right) \frac{\partial u}{\partial s} \right], \\ \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \frac{3\alpha_g}{a} w - \frac{n}{n_0} \frac{\partial u}{\partial s} \alpha_g, \\ \frac{\partial p_g}{\partial t} &= -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= w = w_A + w_R, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}, \\ \frac{\partial w_R}{\partial t} &= \left[\frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} - \frac{3}{2} w_R^2 - 4\nu_l \frac{w_R}{a} \right] \frac{1}{a}, \end{aligned} \quad (7)$$

где s — лагранжева переменная, в качестве которой берется начальное значение эйлеровой координаты ($s = x_0$).

Система (7) решается численно по явной схеме. Причем не требуется вводить искусственную вязкость, поскольку приведенные уравнения из-за учета межфазного теплообмена и акустической разгрузки являются системой с естественной диссипацией [4].

Приведем принцип построения разностной схемы, которая принята для решения данной задачи. Для аппроксимации дифференциальных уравнений используем равномерную шахматную сетку

$$(s_i, t_k), (s_{i+1/2}, t_k),$$

$$s_{i+1} = s_i + h, \quad s_{i+1/2} = s_i + 0,5h,$$

$$s_0 = 0, \quad s_N = M, \quad t_{k+1} = t_k + \tau, \quad t_k = k\tau,$$

$$i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где h и τ — соответственно шаги по координате и по времени. К узлам сетки (s_i, t_k) будем относить

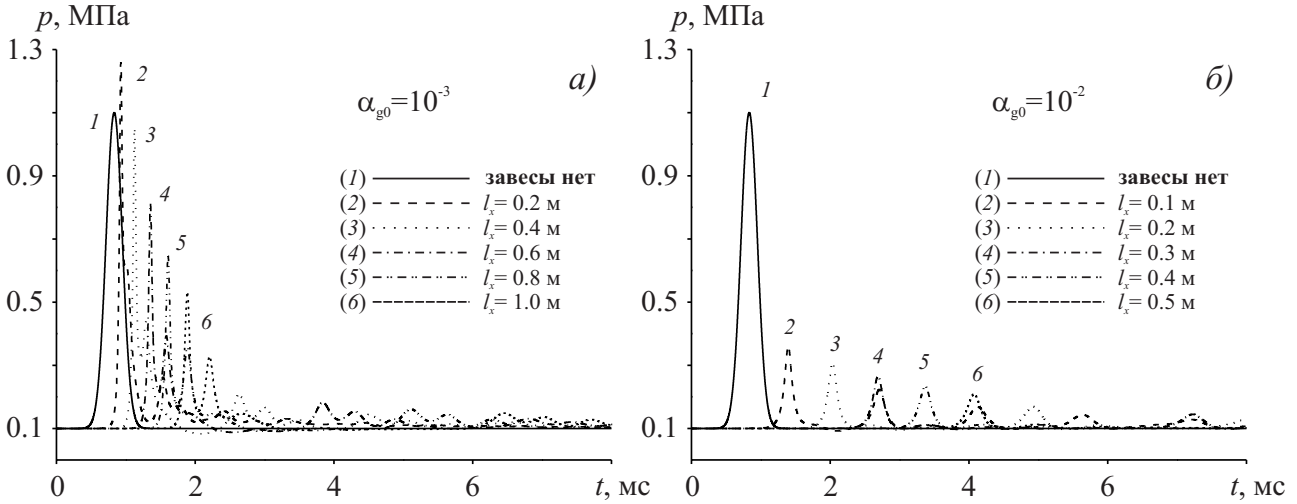


Рис. 2. Показания датчика на твердой стенке по времени при различной протяженности пузырьковой зоны для $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (а) и $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (б)

сеточные функции скорости u_i^k и эйлеровой переменной x_i^k , к «полуцелым» точкам $(s_{i+1/2}, t_k)$ — сеточные функции всех остальных параметров. Такая аппроксимация обеспечивает устойчивость решения волновых задач в однофазных системах (жидкостях и газах) конечно-разностным методом [4].

4. Начальные и граничные условия

4.1. Начальные условия

Начальные условия ($t = 0$) при $x > 0$, соответствующие состоянию покоя системы в расчетной области с измерением $L = h \cdot N$, запишутся в виде:

$$p = p_0, \quad u = 0, \quad \rho = \rho_0.$$

Для случая области с пузырьковой зоной конечных размеров имеем

$$\alpha_g = \begin{cases} \alpha_{g0}, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases},$$

где $Q = (x_z < x < x_z + l_x)$.

4.2. Граничные условия

Граничные условия записываются следующим образом: на границе $x = L$ — условие непротекания жидкости принимает вид $u = 0$. На торцевой границе $x = 0$ используется условие на поршне давления $p_l(t) = p_l^0(t)$.

Отметим, что задание давления на границе $x = 0$ соответствует разрыву мембраны между камерой высокого давления, заполненной газом, и рабочей камерой, заполненной исследуемой системой.

5. Результаты численных расчетов

В рамках рассмотренной модели исследовалось влияние протяженности пузырьковой области и начального радиуса пузырьков, а также начального объемного содержания пузырьков на степень воздействия импульсного сигнала на твердую стенку. Импульсный сигнал задавался граничным давлением по следующему закону:

$$p_l^0(t) = p_0 + \Delta p_0 \cdot \exp \left[- \left(\frac{t - t_*/2}{t_*/2} \right)^2 \right],$$

где $p_0 = 0.1$ МПа — первоначальное давление в расчетной области; $\Delta p_0 = 0.5$ МПа и $t_* = 10^{-3}$ с — амплитуда и характерная временная протяженность импульса, соответственно. В рассмотренных задачах импульс «падает» на пузырьковую область, полностью сформировавшись в области «чистой» жидкости ($C_l \cdot t_* < L$).

На рис. 2 представлены расчеты, которые иллюстрируют влияние начального объемного газосодержания в пузырьковой зоне при различных ее протяженностях на степень воздействия импульсного сигнала на твердую стенку, где начальный радиус пузырьков был принят равным 10^{-3} м. Из показаний датчика видно (рис. 2(б)), что для объемного газосодержания $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ присутствие небольшого (относительно пространственной протяженности импульсного сигнала $C_l \cdot t_* > l_x$) участка пузырьковой области непосредственно перед стенкой на пути распространения сигнала в несколько раз уменьшает воздействие на нее. Причем, чем больше протяженность пузырьковой области, тем меньше воздействие на твердую стенку. Для объемного газосодержания $\alpha_{g0} = 10^{-3}$

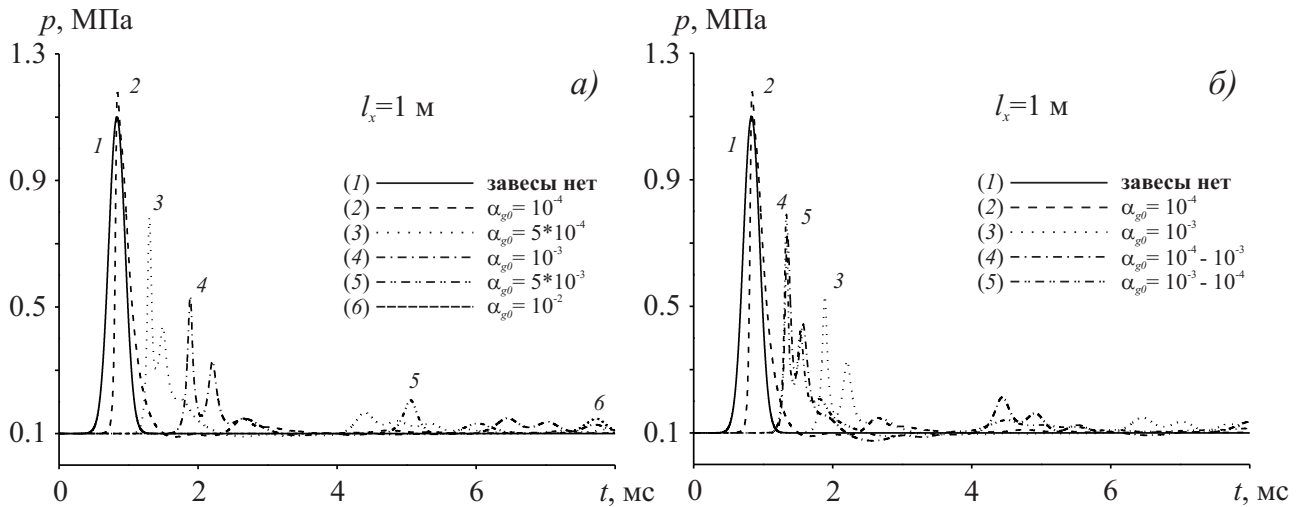


Рис. 3. Показания датчика на твердой стенке по времени при протяженности пузырьковой зоны $l_x = 1$ м для различных начальных объемных газосодержаний

аналогичная картина уменьшения воздействия на твердую стенку (рис. 2(а)) видна на линиях 3–6, а для линии 2 заметно небольшое увеличение воздействия, примерно в 1 атмосферу. Данное увеличение амплитуды воздействия связано с меньшей разницей в скоростях ударных волн в пузырьковой области и «чистой» жидкости. Для начального объемного газосодержания $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ скорость распространения возмущений ~ 110 м/с, тогда как для $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ — ~ 440 м/с. Следовательно, для случая (а) импульсное возмущение дальше проходит в пузырьковую область, сохраняя свою первоначальную амплитуду. Заметим, что по своим способностям уменьшения воздействия импульсного возмущения пузырьковая область протяженностью $l_x = 0.2$ м с начальным объемным газосодержанием $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (линия 2 на рис. 2(б)) имеет такие же характеристики, как пузырьковая область протяженностью $l_x = 1.0$ м с начальным объемным газосодержанием $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (линия 6 на рис. 2(а)).

На рис. 3 представлены результаты численных расчетов, которые иллюстрируют влияние начального объемного газосодержания в пузырьковой зоне при фиксированной ее протяженности на динамику воздействия импульсного сигнала на твердую стенку. В проведенных расчетах для объемных газосодержаний от $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-4}$ до 10^{-2} наблюдается уменьшение амплитуды воздействия на твердую стенку по сравнению со случаем отсутствия завесы (рис. 3(а)). Видно, что для случая объемных газосодержаний $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$ и $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (линии 5 и 6 на рис. 3(а)) импульс давления «падает» на твердую стенку с амплитудой ~ 1 атм, что делает пузырьковые области с данными характеристиками эффективным инструментом для гашения возму-

щений. Для начального объемного газосодержания $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ мы наблюдаем совершенно иную картину, чем в предыдущих случаях, а, именно, усиление амплитуды падающего сигнала (линия 2 на рис. 3(а)). В данном случае величина скорости распространения возмущений в пузырьковой области сильно зависит не только от сжимаемости пузырьков, но и от сжимаемости самой жидкости. По рисунку видно, что происходит изменение формы переднего фронта волны, что приводит к проявлению радиальной инерции жидкости при сжатии завесы и небольшому увеличению амплитуды сигнала (~ 1 атм). Также представлены результаты по численному моделированию исходной задачи при неоднородном распределении по длине завесы начального объемного газосодержания (рис. 3(б)). Для рассмотренного диапазона объемных газосодержаний с $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ до 10^{-3} видим, что направление изменения газосодержания по длине завесы не вносит существенной разницы. Это связано с тем, что при переходе от меньшего объемного газосодержания к большему (от $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ к 10^{-3}) эффект увеличения амплитуды (при $\alpha_{g0} = 10^{-4}$) плавно переходит в эффект гашения (при $\alpha_{g0} = 10^{-3}$), и наоборот для противоположного случая.

На рис. 4 представлены результаты численных расчетов, которые иллюстрируют влияние начального радиуса пузырьков в пузырьковой зоне при фиксированной ее протяженности на динамику воздействия импульсного сигнала на твердую стенку. Из показаний датчика на рис. 4(а) можно сделать вывод, что для более крупных пузырьков (линии 1 и 2) амплитуда прошедшего сигнала меньше, чем для более мелких (линии 3–5), но воздействие на стенку начинается раньше. Это может быть свя-

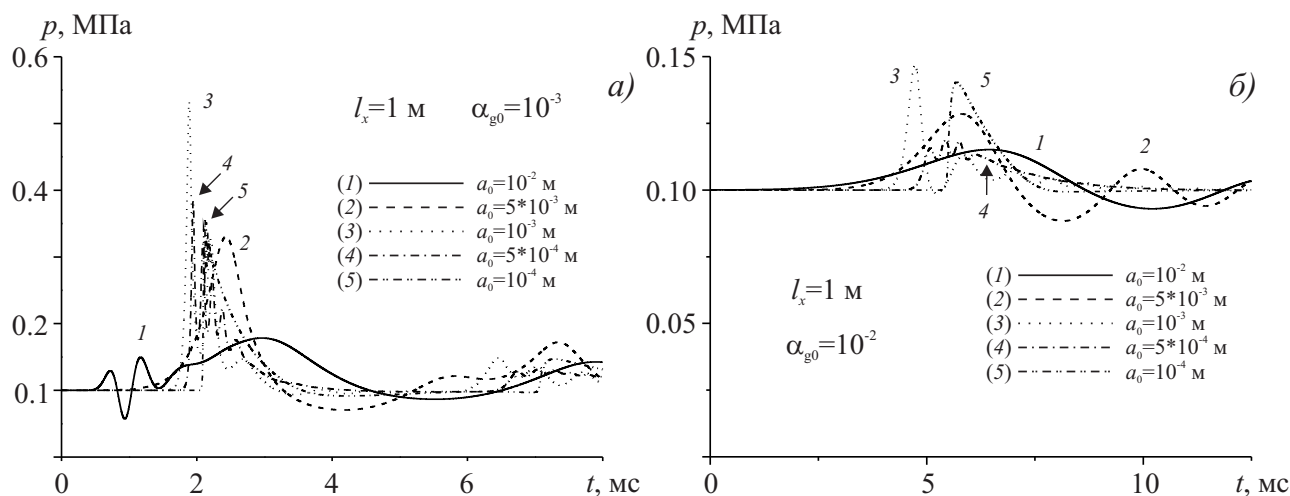


Рис. 4. Показания датчика на твердой стенке по времени при протяженности пузырьковой зоны $l_x = 1$ м для различных начальных радиусов пузырьков

зано с тем, что в случае крупных пузырьков завеса раньше начинает реагировать на падающий импульс, и за счет инерциального движения пузырьков, часть импульса «доходит» до стенки, при этом теряя большую часть своей амплитуды. Из рис. 4(б) видим, что для объемного газосодержания $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ величина начального радиуса пузырьков несущественно меняет волновую картину, и средняя амплитуда прошедшего волнового сигнала не превышает 5% от первоначальной, но при этом увеличивается время воздействия на стенку.

6. Заключение

По результатам численных расчетов установлено, что пузырьковая завеса в пристеночной области может как гасить, так и усиливать амплитуду падающего сигнала. При правильном подборе параметров пузырьковой области (газосодержания, радиуса пузырьков, протяженности) можно практически исключить ударно-волновое воздействие на стенку. Также установлено, что в рассматриваемом диапазоне данных необходимая для гашения волнового сигнала протяженность пузырьковой области определяется начальным объемом газосодержания, например, пузырьковая область протяженностью $l_x = 0.2$ м с начальным объемным газосодержанием $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ имеет такие же характеристики по гашению сигнала, как пузырьковая область протяженностью $l_x = 1.0$ м с начальным объемным газосодержанием $\alpha_{g0} = 10^{-3}$.

Было установлено, что в рассматриваемом диапазоне объемных газосодержаний от $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ до 10^{-3} направление изменения газосодержания по длине завесы не вносит существенных различий в

динамику волнового сигнала в завесе. Данный результат связан с тем, что при переходе от меньшего объемного газосодержания к большему (от $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ к 10^{-3}) эффект увеличения амплитуды (при $\alpha_{g0} = 10^{-4}$) плавно переходит в эффект гашения (при $\alpha_{g0} = 10^{-3}$), и наоборот для противоположного случая.

Список литературы

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с., Ч. 2. 360 с.
- [2] Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва. Эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
- [3] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волн в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1077–1088.
- [4] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.