

Тонкая структура течений неоднородных и многофазных жидкостей¹

Чашечкин Ю.Д.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

По результатам визуализации течений отмечается существование структур в широком диапазоне масштабов: от галактических до микронных. Обосновывается использование фундаментальной системы уравнений по результатам сравнения симметрий различных моделей течений теоретико-групповыми методами. Полные решения системы отыскиваются методами теории сингулярных возмущений с учетом условия совместности, определяющего степень характеристического уравнения. Сравнение полных решений с данными экспериментов показывает, что регулярные решения характеризуют крупномасштабные компоненты течений, богатое семейство сингулярных решений — формирующуюся тонкую структуру среды. Приводятся примеры расчетов и наблюдений течений стратифицированных, вращающихся и многофазных сред. Обсуждаются требования к методике адекватного эксперимента.

1. Введение

Промышленная революция XVIII–XIX веков сопровождалась сменой этапа эмпирического развития гидродинамики, отмеченного такими достижениями как протяженные водоводы (акведуки), оросительные системы, судоходные каналы, парусные суда, этапом создания научно обоснованных подходов, основанном на совместном математическом и лабораторном моделировании технических устройств и технологий. Развитие теоретической гидродинамики на базе «первых принципов» — законов природы, представленных в форме дифференциальных уравнений, способствовало углублению понимания динамики течений и созданию методик высокоточных воспроизводимых экспериментов. Согласие результатов расчетов и экспериментов стимулировало развитие научного подхода к созданию новых технологий и устройств.

Одновременно с фундаментальными уравнениями широкое распространение получили модельные и конститутивные системы, ориентированные на конкретные приложения. Однако в последние годы традиционные подходы перестали удовлетворять потребности практики как с точки зрения погрешностей расчетов состояний и эволюции систем,

в частности в прогнозах погоды и климата, так и в части научной основы разработки технологий управления энергонасыщенными процессами и аппаратами.

Быстро развивающиеся прецизионные оптические методы наблюдений позволили выявить в природных явлениях «тонкую структуру среды», образованную семействами высокоградиентных прослоек и протяженных нитей в широком диапазоне линейных размеров: от световых лет в галактических системах [1] до микронных в течениях, возникающих в высыхающей капле суспензий наночастиц [2].

В качестве примера на рис. 1 приведены теневые картины течения, возникающего при намерзании льда на интенсивно охлаждаемый цилиндрический холодильник, погруженный в стратифицированный раствор поваренной соли с температурой $T = 20^\circ\text{C}$, иллюстрирующие существенное влияние тонкой структуры многокомпонентного конвективного течения на тепломассоперенос и форму фронта кристаллизации.

Слоистая структура течения обуславливает регулярную волнистость поверхности льда. Тонкие кристаллы окиси олова, составляющие вытянутое по вертикали пятно примеси (рис. 1(а)) спустя 114.5 мин, переносятся течениями и собираются на тонких горизонтальных прослойках, расположенных с шагом $\langle h \rangle = 1.2$ см (рис. 1(б)).

Дальнейшие экспериментальные исследования показали, что тонкая структура влияет на тепломассоперенос, динамику и энергетику течений. В

¹Работа выполнена при финансовой поддержке ОЭММ-ПУ РАН (Программа ОЭ-13 «Вихри и волны в сложных средах») и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12-01-00128-а). Эксперименты выполнены на уникальных стендах УСУ ГФК «ИПМех РАН», поддерживаемых Минобрнауки России (ГК 16-518-11-7059).

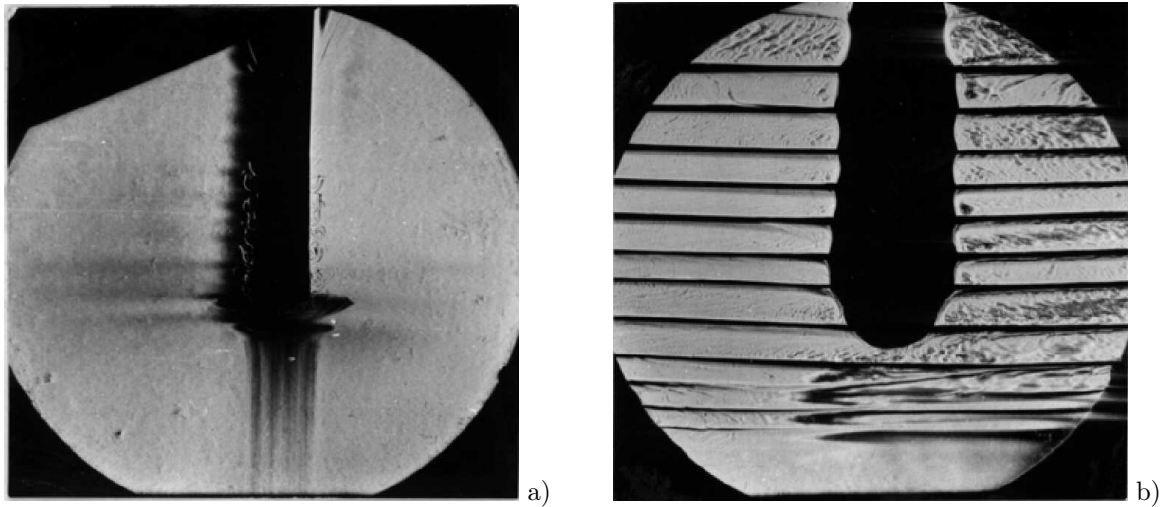


Рис. 1. Теневая картина намерзания льда на цилиндрическом холодильнике в непрерывно стратифицированной среде ($\Lambda = 9.5$ м; $T_b = 6.2$ с): а, б) — $t = 2.45; 114$ мин

этой связи следует подчеркнуть, что идентификация механизмов формирования тонкой структуры течений, создание математических моделей процессов ее формирования, оценка влияния структур на геометрию и динамику течений представляют и общенаучный, и практический интерес.

Цель данной работы — обсуждение критериев и обоснование выбора определяющей системы уравнений, анализ общих свойств полных решений фундаментальной системы, формулировка некоторых рекомендаций, направленных на повышение результативности проводимых экспериментальных исследований и прикладных разработок.

2. Фундаментальная система уравнений механики жидкостей

Математической основой механики жидкостей являются понятия *числа, пространства, сплошной среды* и параметров, характеризующих *среду* и ее *течения*. Следует подчеркнуть существенное отличие свойств *пространства*, движения которого, по определению, включают перенос и вращение с сохранением расстояния между объектами [3], и погруженной в него *деформируемой среды*. Поскольку декомпозиция оператора течений, по определению Коши–Гельмгольца, помимо операторов переноса и вращения,

$$v_i(r_i + \delta r_i) = v_i(r_i) + \varepsilon_{ijk} \Omega_j \delta r_k + \frac{\partial v_i}{\partial v_l} \delta r_l$$

включает дополнительный сдвиговый член, характеризующий деформацию жидкого объема, при описании течений должен быть определен универ-

сальный признак (параметр), обосновывающий отличие континуумов среды и *метрического пространства*, в которое она помещается. Таким параметром служит переменная плотность среды. Необходимость учета переменной плотности среды отмечал Д.И. Менделеев [4], опубликовавший ряд работ по определению и параметризации уравнений состояния газов и жидкостей [5, 6].

Свойство деформируемости жидких объемов в течениях исключает возможность их идентификации, и, как следствие, наблюдаемость скорости. Возможность опосредованного измерения скорости жидкости и величина погрешностей должна детально анализироваться в условиях конкретного эксперимента.

Наблюдаемыми являются расстояния и временные интервалы, плотность ρ , импульс p^j , концентрация S и полная энергия e (или температура T) жидкости. Совокупность законов сохранения для наблюдаемых параметров течений, выраженных в дифференциальной форме, составляет основу теоретической гидродинамики. Каждое из уравнений формулировалось независимо от других на протяжении длительного временного интервала. Так уравнение неразрывности опубликовал Даламбер в 1748 г. [7]; закон сохранения импульса p^j для идеальной жидкости — Эйлер в 1752 г. [8], а для вязкой среды — Навье в 1822 г. (исходя из молекулярных представлений [9]), а для сплошных сред и с решениями — Стокс в 1845 г. [10], уравнение переноса тепла или температуры — Фурье в 1822 г. [11] и, наконец, диффузии — Фик в 1855 г. [12].

Фундаментальная система уравнений с учетом

второго закона термодинамики в форме уравнения для скорости производства энтропии с уравнением состояния Менделеева имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j (p^j) &= 0, \\ \frac{\partial (p^i)}{\partial t} + \left(\nabla_j \frac{p^j}{\rho} \right) p^i &= \\ = -\nabla^i P + \rho g^i + \nu \Delta (p^i) + 2\varepsilon^{ijk} p_j \Omega_k + f^i, & \quad (1) \\ \frac{\partial \rho T}{\partial t} + \nabla_j \cdot (p^j T) &= \Delta (\kappa_T \rho T), \\ \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \nabla_j \cdot (p^j S) &= \Delta (\kappa_S \rho S), \\ \rho &= \rho(P, S, T), \end{aligned}$$

где Ω_k — угловая скорость глобального вращения жидкости; g^i — ускорение свободного падения; f^i — внешняя сила; ν , κ_T , κ_S — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии; $v^j = p^j / \rho$ — скорость течения; ∇_j и Δ — операторы Гамильтона и Лапласа. Система (1) учитывает диссипацию импульса, но не описывает влияние внутренней энергии на динамику течений.

Система уравнений (1) дополняется начальными и граничными условиями, учитывающими особенности изучаемого процесса: непротекания для плотности и составляющих жидкости компонент вещества (концентрации примеси или солености) и прилипания для скорости на твердых поверхностях, равенства сил на контактных поверхностях двух жидкостей, а также затухания всех возмущений на бесконечности).

Система (1) определена, разрешима, самосогласованна и характеризуется более высокой размерностью физического пространства задачи, чем система уравнений механики твердого тела. Распространенное рассмотрение течений жидкости при постоянстве плотности ρ (однородная несжимаемая жидкость) фактически приводит к отождествлению двух разнородных объектов — континуума метрического пространства и погруженной в него деформируемой сплошной среды, что проявляется в вырожденности определяющей системы Даламбера–Навье–Стокса [13].

Рассмотрению уравнений как единой системы, определяющей физические величины, характеризующие жидкость, и закономерности их изменений в течениях в XIX и первой половине XX века препятствовало отсутствие методов анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений. Получившие широкое распространение полудиффузионные представления, способствовали распространению редуцированных (теория пограничного слоя) или конститутивных (теория турбулентности) моделей. Хотя представление о необходимости опи-

сания течений системой (1) стало общепринятым к началу XXI века [14, 15], на практике основными предметами исследований остаются конститутивные и редуцированные модели.

Возможность дальнейшего развития анализа обеспечена развитием техники символьных вычислений и численного анализа сложных уравнений с применением высокопроизводительной вычислительной техники. В настоящее время реализованы трудоемкие методики вычислений непрерывных симметрий сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных — необходимой части процедуры сравнения общих свойств различных систем, построения решений методами теории сингулярных возмущений, а также совершенствования прецизионного высокоразрешающего эксперимента, обеспечивающего количественное сравнение расчетов и наблюдений.

Учет особенностей условий конкретного эксперимента обуславливает выбор приближений, необходимых для построения моделей изучаемых течений. Реализация приближений может изменять свойства уравнений, приводить к нарушению условия тождественности преобразований — стандартного требования анализа. Одним из методов контроля качества преобразований служит сравнение непрерывных симметрий теоретико-групповыми методами.

3. Симметрии фундаментальной системы уравнений

Результаты проведенного в последнее время теоретико-группового анализа, показали существенные различия симметрий различных систем уравнений в современной гидродинамике [16–18]. В их ряду особое место принадлежит системе (1), инвариантной относительно точечной десятипараметрической группы Галилея с операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, & X_2 &= \partial_x, & X_3 &= \partial_y, \\ X_4 &= \partial_z, & X_5 &= y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \\ X_6 &= \left(z + \frac{gt^2}{2} \right) \partial_x - x\partial_z + (w+gt)\partial_u - u\partial_w, \\ X_7 &= \left(z + \frac{gt^2}{2} \right) \partial_y - y\partial_z + (w+gt)\partial_v - v\partial_w, \\ X_8 &= t\partial_x + \partial_u, & X_9 &= t\partial_y + \partial_v, \\ X_{10} &= t\partial_z + \partial_w. \end{aligned} \quad (2)$$

Набор симметрий (2) с генераторами групп сдвигов по времени и пространству, вращения в горизонтальной плоскости, вращения в системе координат, движущейся относительно данной с ускорением свободного падения и, наконец, генераторы групп преобразований Галилея, отражает «первые

принципы», следующие из однородности пространства и времени, изотропии пространства и эквивалентности инерциальных систем отсчета. Симметрии конститутивных и фундаментальной систем (1) обычно не совпадают, что указывает на нетождественность промежуточных операций, фактическую неприводимость уравнений и коренные различия решений.

Свойства физических величин и процессов определяются видом выбранной системы определяющих уравнений. Течения — перенос импульса, проявляющиеся в силовом воздействии жидкостей на препятствия и конвективном переносе вещества, описываются фундаментальной системой уравнений и сопровождаются сложными взаимобусловленными изменениями наблюдаемых физических величин (плотности вещества, энергии, концентраций примесей, скорости звука и т.д.). Перенос импульса отсутствует в кондуктивных процессах (диффузия и теплопроводность).

Содержание понятий физических величин изменяется при выполнении нетождественных математических преобразований. В качестве одного из примеров можно отметить эволюцию содержания такого параметра, как скорость диссипации механической энергии — производной величины, определяемой сдвигом скорости в классическом подходе, и новой независимой переменной в теориях турбулентности.

Течения жидкостей описываются полными решениями определяющих систем уравнений. Число независимых функций, образующих такое решение, задает порядок системы, который определяется условием совместности составляющих уравнений.

Общие свойства инфинитезимальных периодических решений системы (1) для слабодиссипативных сред с малыми кинетическими коэффициентами ν , κ_T , κ_S , описываются решениями дисперсионного уравнения высокого порядка, которые отыскиваются методами теории сингулярных возмущений. Классификация компонент решений полного уравнения и частных моделей, в которых последовательно пренебрегается эффектами диффузии, температуропроводности и вязкости, дана в [13].

4. Структуры периодических течений и волн в жидкостях: расчеты и наблюдения

Регулярные части решений, характеризующие волновые поля, сохраняются во всех моделях периодических течений: и полной, задаваемой системой (1) и редуцированными системами, включающими уравнения Навье–Стокса и Эйлера. Вол-

новое число k и длина монохроматической волны $\lambda = 2\pi/k$, которые задаются регулярными решениями дисперсионного соотношения, определяются частотой источника ω , например, для акустических волн $k = \omega/c$ (c — скорость звука), для поверхностных волн на глубокой воде $k = \omega^2/g$, его размером или характерным вязким масштабом L_ν (для внутренних волн $L_\nu = \sqrt[3]{g\nu/N}$).

Основную часть решений системы высокого порядка (1) составляют сингулярно возмущенные функции. Полное число таких функций лежит в диапазоне от восьми для задач в полной постановке (четырех в безграничной среде) до четырех (двух в неограниченной вязкой среде) при сохранении только эффектов вязкости. Существование двух различных в общем случае, и совпадающих в приближении однородной жидкости, сингулярно возмущенных компонент обусловлено векторной природой импульса, который служит мерой и силового воздействия потока на препятствия и переноса вещества (расхода жидкости), а также тензорным характером вязких напряжений. Поперечный масштаб сингулярно возмущенных компонент решений задается характерной частотой, значениями кинетических коэффициентов ($\delta_\omega^\nu = \sqrt{\nu/\omega}$, $\delta_\omega^{\kappa_T} = \sqrt{\kappa_T/\omega}$, $\delta_\omega^{\kappa_S} = \sqrt{\kappa_S/\omega}$) или их комбинациями и геометрией задачи [13]. Области течений с выраженными сингулярно возмущенными компонентами решения, определяющими тонкую структуру среды, характеризуются высоким уровнем динамической завихренности $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$, скорости бароклинной генерации завихренности $\dot{\omega} = \nabla \rho \times \nabla P / \rho^2$, скорости диссипации механической энергии ε . Как и волны, компоненты течений, характеризующиеся сингулярно возмущенными функциями, могут наблюдаться во всем пространстве. Их реальное положение определяется решением системы (1) с заданными граничными условиями.

Детальные расчеты течений, вызванных колебаниями поршня на плоскости в непрерывно стратифицированной жидкости, визуализирующие общую картину и тонкую структуру пучков внутренних волн [19] согласуются с данными теневой визуализации стратифицированных течений [20]. С увеличением амплитуды колебаний источника на краях пучков внутренних волн начинают регистрироваться обострения градиентов плотности, в областях конвергенции которых формируются компактные вихри, нарушающие плавность исходной непрерывной стратификации [20]. Вихри данного типа образуются непосредственно в толще жидкости и движутся к источнику течений, а не от него, как можно было бы ожидать. В экспериментах вихри в толще жидкости вдали от препятствий наблю-

даются и в случае вынужденных, и в случае свободных колебаний тел на горизонтах нейтральной плавучести [21]. Траекторные и геометрические параметры пучков внутренних волн в средах с переменной частотой плавучести, рассчитанные на основании полных решений линеаризованной системы (1) [22], согласуются с данными прецизионных измерений полей скорости [23] с расхождением в несколько процентов даже для волн, проникающих в закритические области, где частота волны превышает частоту плавучести.

Тонкоструктурные компоненты течения приводят к перераспределению пассивных примесей в пространстве. В стратифицированных течениях примеси накапливаются на отдельных поверхностях, положение которых задается сингулярно возмущенными компонентами решений, а также на линиях их пересечения. В экспериментах аккумуляция краски в высокоградиентных прослойках наблюдалась как в двумерных, так и в трехмерных спутных стратифицированных течениях — следах позади цилиндра [24] и сферы [25]. Формирование воспроизводящих топографию дна структур в первоначально однородной суспензии, происходит и при возбуждении собственных колебаний в прямоугольном сосуде [26]. Изменения фазового состава и геометрии среды проявляют действие атомно-молекулярных сил, усложняющих структуру и динамику течений [27].

Высокий порядок фундаментальной системы (1) определяет условия полноты гидродинамического эксперимента, в котором необходимо одновременно измерять большее число параметров, чем присутствует в математической модели — определяться должны плотность, импульс, температура, концентрация компонент. Требуется развития и техника гидродинамического эксперимента, позволяющего одновременно регистрировать и крупномасштабные, и большое число тонкоструктурных компонент течений.

Методика современного опыта должна учитывать обратное влияние измерительных приборов и зондирующих полей на измеряемые течения и позволять определять погрешности непосредственно в ходе опытов.

Вследствие ненаблюдаемости скорости жидкости (невозможности объективного определения погрешности измерений, пространственного и временного разрешения инструментов), особое значение приобретает разработка методики непосредственного определения импульса, основанной на измерениях сил, действующих на препятствие в потоке или расхода вдоль выбранной линии тока, и плотности среды (например, по измерениям оптического и

акустического коэффициентов преломления [28]).

5. Заключение

Течения жидкостей — сложные взаимообусловленные изменения наблюдаемых физических величин, характеризующих непрерывную среду (плотности вещества, импульса, энергии, концентраций примесей), сопровождающие перенос импульса.

Методика полного гидродинамического эксперимента должна обеспечивать регистрацию пространственной картины течения, разрешать макро- и микроструктурные компоненты и оценивать погрешности данных непосредственно в процессе их получения.

Измерение импульса течений становится одной из наиболее актуальных задач прикладной аэрогидродинамики, поскольку скорость жидкости непосредственно не наблюдается.

Список литературы

- [1] Light Echoes from V838 Mon: Astronomy Picture of the Day 2011 Dec. 4 // <http://apod.nasa.gov/apod/ap111204.html>.
- [2] Чашечкин Ю.Д., Бардаков Р.Н., Шабалин В.В. Регулярная тонкая структура течений в высыхающей капле суспензии наночастиц кварца // Доклады АН. 2011. Т. 436, №3. С. 336–338.
- [3] Бронштейн Н.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. Изд. 13-е. М.: Наука. 1986. 544 с.
- [4] Менделеев Д.И. О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании. СПб. 1880.
- [5] Менделеев Д.И. Об упругости газов. 1876.
- [6] Менделеев Д.И. Исследование водных растворов по удельному весу. СПб: Тип. Демакова. 1887. 520 с.
- [7] D'Alembert J.-R. Theorie g n rale des vents. Paris. 1747.
- [8] Эйлер Л. Общие законы движения жидкостей // Известия АН. Механика жидкостей и газа. 1999. №6. С. 26–54.
- [9] Navier C.-L.-M.-H. M moire sur les Lois du Mouvement des Fluids // M m. d l'Acad. des Sciences. 1822. V. 6. P. 389–440.
- [10] Stokes G.G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic bodies // Transaction of the Cambridge Philosophical Society. 1845. V. 8. P. 287–319.
- [11] Fourier J.B.J. Th orie analytique de la chaleur Paris. 1822.

- [12] Fick A. Ueber Diffusion // *Annalen der Physik und Chemie*. 1855 V. 94, P. 59–86 (Abridged English translation: On liquid diffusion // London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1856. V. 10. P. 30–39).
- [13] Чашечкин Ю.Д. Иерархия моделей классической механики неоднородных жидкостей // *Морской гидрофизический журнал*. 2010. №5. С. 3–10.
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [15] Muller P. The equations of oceanic motions. Cambridge: CUP. 2006. 292 p.
- [16] Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д. Инвариантные свойства уравнений движения стратифицированных жидкостей // *Доклады АН*. 2002. Т. 387, №6. С. 760–763.
- [17] Chashechkin Yu.D., Baydulov V.G., Kistovich A.V. Basic properties of free stratified flows // *J. of Engng. Math.* 2006. V. 55, № 1–4. P. 313–338.
- [18] Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д. Инвариантные свойства систем уравнений механики неоднородных жидкостей // *Прикладная математика и механика*. 2011. Т. 75, Вып. 4. С. 551–562.
- [19] Бардаков Р.Н., Васильев А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Расчет и измерения конических пучков трехмерных периодических внутренних волн, возбуждаемых вертикально осциллирующим поршнем // *Механика жидкости и газа*. 2007. №4. С. 117–133.
- [20] Chashechkin Yu.D. Visualization of singular components of periodic motions in a continuously stratified fluid // *Journal of Visualization* 2007. V. 10, №1. P. 17–20.
- [21] Чашечкин Ю.Д., Приходько Ю.В. Регулярные и сингулярные компоненты течений при вынужденных и свободных колебаниях сферы в непрерывно стратифицированной жидкости // *Доклады АН*. 2007. Т. 414, №1. С. 44–48.
- [22] Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Линейная теория распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. 1998. Т. 39, №5. С. 88–98.
- [23] Paoletti M.S., Swinney H.L. Propagating and evanescent internal waves in a deep ocean model // *J. Fluid Mech.* 2012. (in press).
- [24] Chashechkin Yu.D., Mitkin V.V. Transportation of a dye in upstream and downstream wakes of the cylinder in continuously stratified liquid // *J. of Visualization*. 2007. V. 10, №1. P. 7.
- [25] Сысоева Е.Я., Чашечкин Ю.Д. Вихревые системы спутного стратифицированного течения за сферой // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1991. №4. С. 82–90.
- [26] Чашечкин Ю.Д., Калинин В.А. Образы топографии в структуре суспензии в стоячих волнах // *Доклады РАН*. 2012. (в печати).
- [27] Прохоров В.Е., Чашечкин Ю.Д. Генерация звука при падении капли на поверхность воды // *Акустический журнал*. 2011. Т. 57, №6. С. 792–803.
- [28] Бардаков Р.Н., Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Расчет скорости звука в стратифицированной морской среде на основе системы фундаментальных уравнений // *Океанология*. 2010. Т. 50, №3. С. 325–333.