

Рост малых деформаций сферичности парового пузырька при его коллапсе в воде¹

Топорков Д.Ю.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань

Изучается эволюция малых деформаций сферичности кавитационного пузырька при его сильном сжатии в воде. Амплитуда давления в жидкости 15 бар. Применяется математическая модель, в которой движение пара и жидкости расщепляется на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение. Сферическая составляющая описывается уравнениями газовой динамики с реалистичными широкодиапазонными уравнениями состояния Нигматулина–Болотновой. Учитываются нестационарная теплопроводность в паре и жидкости, неравновесные процессы испарения–конденсации на межфазной границе. Несферическая составляющая определяется без учета влияния сжимаемости жидкости и неоднородности параметров пара, что позволяет описать ее эволюцию обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка. Установлено, что амплитуда малых начальных искажений сферичности пузырька может возрасти при сжатии не более чем в 320 раз.

1. Введение

После открытия таких явлений, как устойчивая периодическая сонолюминесценция отдельного пузырька [1] и нейтронная эмиссия при акустической кавитации дейтерированного ацетона [2], значительно возрос интерес к проблеме сильного сжатия парогазовых пузырьков в жидкости. Существующие в настоящее время теории сильного сжатия [1, 2] основаны на гипотезе о том, что форма пузырьков при сжатии сохраняется близкой к сферической и в финальной высокоскоростной стадии сжатия внутри них формируется близкая к сферической ударная волна, сходящаяся к центру пузырька. В результате ее фокусировки кратковременно в центре пузырька образуется плотное горячее сферическое ядро, которое испускает свет [1] и нейтроны [2]. Для реализации этого сценария необходимо сохранение формы пузырька близкой к сферической на всем сжатии.

Особенностью экспериментов [2] является тот факт, что когда в них вместо дейтерированного ацетона использовалась тяжелая вода, то выхода нейтронов не наблюдалось. В настоящей работе изучается эволюция малых деформаций сферичности кавитационного пузырька при его сильном сжатии в условиях, близких к экспериментам [2],

но когда в качестве среды используется обычная вода. Применяется математическая модель, аналогичная [3], в которой движение пара и жидкости расщепляется на сферическую и несферическую составляющие. Сферическая составляющая рассчитывается по модели, аналогичной одномерной модели Р.И. Нигматулина [4], в которой движение жидкости и пара описывается уравнениями газовой динамики с реалистичными широкодиапазонными уравнениями состояния Нигматулина–Болотновой [5]. Учитываются нестационарная теплопроводность в обеих средах, неравновесные процессы испарения–конденсации на межфазной границе. Данная модель позволяет проводить детальное изучение динамики пузырька в ходе всего сжатия, как в его низкоскоростном начале, так и в высокоскоростном конце. Можно утверждать, что на сегодня эта модель наиболее адекватно описывает физические процессы, сопровождающие такое сильное сжатие сферических пузырьков.

Несферическая составляющая движения пара и жидкости определяется без учета влияния сжимаемости жидкости и неоднородности параметров пара, что позволяет описать ее эволюцию обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка [3].

2. Постановка задачи

Рассматривается эволюция малых искажений сферичности кавитационного пузырька при его

¹Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований РАН, гранта Президента Российской Федерации (МК-2712.2011.1) и при поддержке РФФИ.

сильном сжатии в однородной жидкости в условиях, близких к экспериментам [2]. При этом роль жидкости играет обычная вода (H_2O) при температуре $20^\circ C$. Давление в жидкости p_∞ полагается постоянным и равным 15 бар, что в экспериментах [2] примерно соответствует среднему значению давления жидкости на фазе сжатия пузырьков (в экспериментах [2] 15 бар есть амплитуда колебаний давления в пучности стоячей волны при статическом давлении 1 бар). В начальный момент времени $t = 0$, за который принимается начало сжатия, кавитационный пузырек является близким к сферическому, с диаметром 1 мм (что согласуется с размерами пузырьков в кластере в начале их сжатия в экспериментах [2]). В начале сжатия жидкость покоится, пар в пузырьке находится в состоянии насыщения (с давлением около 0.22 бар). Поверхность пузырька имеет малое осесимметричное отклонение от сферической формы, причем настолько малое что, несмотря на свой значительный рост, оно остается малым вплоть до конца сжатия. В результате разности давлений в полости пузырька и в окружающей жидкости пузырек очень сильно сжимается (радиус пузырька в ходе сжатия уменьшается примерно в 45 раз). В ходе сжатия несферичность пузырька нарастает в виде колебаний относительно сферической формы. Основное внимание при изучении эволюции несферичности пузырька при его сжатии уделяется степени ее роста. За меру степени роста несферичности принимается отношение максимального значения относительной амплитуды несферичности пузырька (отношения текущего значения размерной амплитуды возмущения сферичности к текущему значению размерного радиуса пузырька) в ходе сжатия к величине этой относительной амплитуды в начале сжатия. Максимальное значение относительной амплитуды несферичности пузырька достигается в силу ее нарастания в виде колебаний либо в конце сжатия, либо незадолго до него.

В случае осесимметричных искажений сферичности пузырька уравнение его поверхности в сферической системе координат r, θ, ϕ представляется в виде ряда

$$r = R(t) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t) P_i(\cos \theta).$$

Здесь t — время; $R(t)$ — радиус пузырька; a_i — амплитуда (со знаком) отклонения формы пузырька от сферической в виде полинома Лежандра $P_i(\cos \theta)$ степени i . Амплитуда искажения $\varepsilon_i = a_i/R$ полагается малой при всех i ($|\varepsilon_i| \ll 1$).

Радиальная составляющая движения пара и жидкости описывается следующими уравнениями

газовой динамики [4, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w r^2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho w r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w^2 r^2 + p r^2) &= 2pr, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e r^2) + \frac{\partial}{\partial r}[w r^2(\rho e + p)] &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность; w — радиальная компонента вектора скорости; p — давление; e — удельная полная энергия; T — температура; κ — коэффициент теплопроводности.

Граничные условия в центре пузырька ($r = 0$), вдали от него ($r = r_\infty, r_\infty \gg R$) и на межфазной границе ($r = R(t)$) имеют вид [4, 6]:

$$\begin{aligned} r = 0 : \quad w &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \\ r = r_\infty : \quad p &= p_\infty, \quad T = T_0; \\ r = R(t) : \quad \dot{R} &= w_l + \frac{j}{\rho_l} = w_g + \frac{j}{\rho_g}, \\ p_l &= p_g - \frac{4\mu_l w_l}{R} - \frac{2\sigma}{R}, \\ \kappa_l \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_l - \kappa_g \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_g &= j l(p_g), \quad T_l = T_g, \end{aligned} \quad (2)$$

где p_∞ — давление в жидкости вдали от пузырька; μ_l — динамический коэффициент вязкости; σ — коэффициент поверхностного натяжения; l — теплота парообразования; j — скорость испарения или конденсации (индексы l и g обозначают жидкость и пар соответственно).

Вязкость жидкости в (1),(2) учитывается в приближении несжимаемости жидкости и без учета ее влияния на изменение энергии. Анализ показывает, что эти допущения приемлемы. Уравнения состояния воды и ее пара и функции физических параметров этих сред $\mu_l, \sigma, \kappa_l, \kappa_g, l$ от T принимаются в виде аппроксимаций экспериментальных данных [5]. Величина j определяется равенствами [4, 6]:

$$\begin{aligned} j &= \frac{\alpha'}{\sqrt{2\pi R_g}} \left(\frac{p_S(T)}{\sqrt{T}} - \frac{\chi p_g}{\sqrt{T}} \right), \\ \chi &= \exp(-\Omega^2) - \Omega \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\Omega \exp(-x^2) dx \right), \\ \Omega &= \frac{j \sqrt{R_g T}}{\sqrt{2} p_g}. \end{aligned}$$

Здесь α' — коэффициент аккомодации; R_g — газовая постоянная для пара; p_S — давление насыщения.

Для описания изменения a_i применяется модель Просперетти [7], в которой учет влияния плот-

ности пара производится согласно [8]:

$$(1+q)\ddot{a}_i + \left[3\frac{\dot{R}}{R} + 2(i+1)(i+2)\frac{\nu_l}{R^2} \right] \dot{a}_i +$$

$$+(i-1) \left[(q-1)\frac{\ddot{R}}{R} + (i+1)(i+2)\frac{\sigma}{\rho_{l0}R^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\nu_l(i+1)\dot{R}}{R^3} \right] a_i + \frac{i(i+1)}{R} \left[\frac{\nu_l Q_i(R,t)}{R} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\nu_l(2i+1)}{R^{2-i}} \alpha_i + \frac{\dot{R}}{R} \beta_i \right] = 0,$$

$$q = \frac{(i+1)\rho_g^-}{i\rho_{l0}}, \quad \alpha_i = -\frac{i+1}{2i+1} \int_R^\infty \frac{Q_i}{r^i} dr,$$

$$\beta_i = \int_R^\infty \left[\left(\frac{R}{r} \right)^3 - 1 \right] \left(\frac{R}{r} \right)^i Q_i dr.$$

Здесь ρ_g^- — граничное значение плотности пара, полученное из решения системы уравнений (1),(2); ρ_{l0} — невозмущенное значение плотности жидкости; $\nu_l = \mu_l/\rho_{l0}$ — кинематический коэффициент вязкости. В ходе всего сжатия при описании несферического возмущения плотность жидкости полагается постоянной $\rho_l = \rho_{l0}$. Функция $Q_i(r,t)$ характеризует вихревое движение жидкости и вводится следующим образом [7]

$$\nabla \times \mathbf{w} = \nabla \times \left(\sum_{i=2}^{\infty} Q_i(r,t) P_i(\cos \theta) \right) \mathbf{e}_r,$$

где \mathbf{w} — вектор скорости жидкости; \mathbf{e}_r — единичный вектор вдоль координаты r . Функция $Q_i(r,t)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \dot{R} R^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Q_i}{r^2} \right) + \nu_l \left[\frac{i(i+1)Q_i}{r^2} - \frac{\partial^2 Q_i}{\partial r^2} \right] = 0$$

и граничных условий

$$Q_i(R,t) = \frac{2}{i+1} \left[(i+2)\dot{a}_i - (i-1)\frac{\dot{R}}{R} a_i + \right.$$

$$\left. + (2i+1)R^{i-1} \alpha_i \right], \quad Q_i(\infty,t) = 0.$$

Принимается, что давление жидкости, как уже было сказано, $p_\infty = 15$ бар (в экспериментах [2] оно на фазе сжатия изменяется в пределах от 14 до 16 бар), коэффициент аккомодации $\alpha' = 0.04$, газовая постоянная $R_g = 461.9 \text{ м}^2/(\text{с}^2\text{К})$.

Полагается, что в начальный момент времени ($t = 0$) радиус пузырька $R = R_m = 500$ мкм, радиальная скорость $\dot{R} = 0$, амплитуда искажения $\varepsilon_i = \varepsilon_{i,m}$, скорость ее изменения $\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_{i,m} = 0$.

Для водяного пара в пузырьке при $t = 0$ принимается: температура $T = T_0 = 293$ К, давление

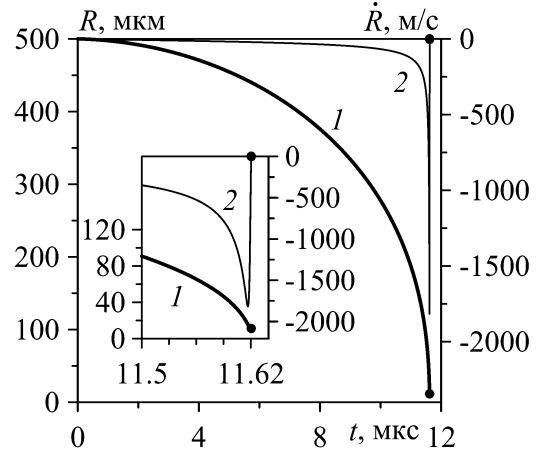


Рис. 1. Изменение R (1) и (2) (точкой отмечен момент коллапса $t_c = 11.6205$ мкс)

$p = p_{g0} = p_{s0} = 2196$ Па (p_{s0} — давление насыщения при $t = 0$), радиальная компонента вектора скорости $w = 0$.

В воде при $t = 0$: температура $T = T_0 = 293$ К, давление $p = p_{l0} = p_\infty = 15$ бар, $w = 0$, начальная завихренность отсутствует $Q_i(r,t=0) = 0$.

Тогда при $t = 0$ имеем: плотность пара $\rho_g = \rho_{g0} = 0.016445 \text{ кг/м}^3$, плотность жидкости $\rho_l = \rho_{l0} = 998.2 \text{ кг/м}^3$, коэффициент теплопроводности жидкости $\kappa_l = 0.5984 \text{ кг}\cdot\text{м}/(\text{с}^3\text{К})$, коэффициент теплопроводности пара $\kappa_g = 0.0182 \text{ кг}\cdot\text{м}/(\text{с}^3\text{К})$, удельная теплота парообразования $l = 2455237 \text{ м}^2/\text{с}^2$, поверхностное натяжение $\sigma = 0.0725 \text{ Па}\cdot\text{м}$, вязкость жидкости $\mu_l = 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$.

3. Результаты

Радиус пузырька при сжатии меняется от $R_m = 500$ мкм в начале сжатия до $R_c = 11$ мкм в его конце (при $t = t_c$, момент коллапса) (рис. 1). Видно, что в финальной стадии сжатия величина \dot{R} стремительно возрастает до значений порядка 1.8 км/с. При этом, в отличие от случая, когда средой является дейтерированный ацетон (с максимальной скоростью сжатия порядка 1 км/с) [3, 4], в конце сжатия в пузырьке не образуется радиально сходящейся ударной волны (рис. 2). Момент достижения пузырьком минимального радиуса принимается за момент коллапса t_c .

Из рис. 3 видно, что при $i = 30$ (что типично для $i < 30$) искажение сферичности пузырька практически на всем протяжении сжатия возрастает в виде нарастающих колебаний из-за проявления неустойчивости Биркгоффа–Плессета. При $i = 200$ (что типично для $i > 130$) амплитуда колебаний

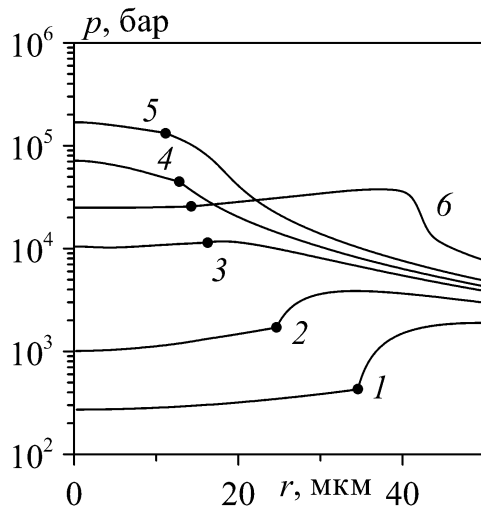


Рис. 2. Радиальные распределения давления в шесть последовательных моментов времени $t_1 = 11.6033$, $t_2 = 11.6113$, $t_3 = 11.6165$, $t_4 = 11.6185$, $t_5 = 11.6205$, $t_6 = 11.6267$ мкс (кривые 1-6 соответственно) финальной стадии сжатия (кривые 1-4), момента коллапса (кривая 5) и обратного движения пузырька после него (кривая 6) (точкой указана граница пузырька, слева от нее — пар, справа — жидкость) в сферическом случае

искажения сначала ($0.2 \leq R/R_m \leq 1$) в силу демпфирующего влияния вязкости жидкости уменьшается, а затем ($R/R_m < 0.2$) постепенно начинает расти, так что с некоторого радиуса ($R/R_m < 0.15$) она увеличивается практически аналогично случаю $i = 30$, где влияние вязкости жидкости несущественно. Отметим, что эти закономерности оказываются практически аналогичными случаю сжатия парового пузырька в дейтерированном ацетоне [3], и можно ожидать, что при использовании других жидкостей принципиальных отличий наблюдаться не будет.

На рис. 4 дана зависимость степени роста амплитуды несферичности пузырька при его сжатии $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$ от номера i и ее огибающая при учете вязкости и при пренебрежении ею. Здесь под $|\varepsilon_{i,c}|$ понимается амплитуда максимального искажения сферичности пузырька в виде $P_i(\cos \theta)$ в процессе сжатия, которое обычно достигается либо в момент коллапса, либо незадолго до него. В силу колебаний ε_i в процессе сжатия зависимости степени роста амплитуды несферичности пузырька $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$ от номера i имеют колебательный характер. Их огибающие используются в качестве приближений зависимостей от номера i максимальных значений

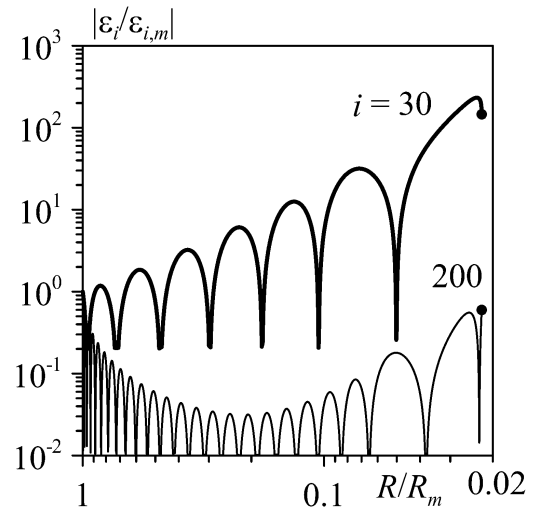


Рис. 3. Эволюция относительной амплитуды искажения сферичности пузырька $|\varepsilon_i/\varepsilon_{i,m}|$ при сжатии для $i = 30$ и 200 (точкой отмечен момент коллапса).

степени роста амплитуды несферичности пузырька $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$, реализующихся при вариации начальной скорости $\varepsilon_{i,m}$, которая в настоящей работе принимается равной нулю. Расчеты показывают, что такой подход является удовлетворительным.

Видно, что при учете вязкости жидкости с увеличением i от $i = 2$ до $i \approx 20$ величина $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$ возрастает от 220 до 320. При дальнейшем увеличении номера i из-за влияния вязкости величина $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$ начинает быстро уменьшаться. Если же вязкость жидкости не учитывать, то $\varepsilon_{i,c}$ с увеличением i возрастает неограниченно. Таким образом, из-за влияния вязкости жидкости при любых i величина $|\varepsilon_i|$ может возрасти при сжатии не более чем в 320 раз (это оказывается близким к случаю сжатия кавитационного пузырька в дейтерированном ацетоне).

4. Заключение

Проведено исследование развития малых деформаций сферичности кавитационного пузырька при его сильном сжатии в обычной воде в условиях, близких к экспериментам по акустической кавитации дейтерированного ацетона. Применялась математическая модель, в которой движение пара и жидкости расщепляется на сферическую и несферическую составляющие. В рамках этой модели сферическая составляющая описывается уравнениями газовой динамики с реалистичными широкодиапазонными уравнениями состояния Нигматулина–Болотновой для жидкости и па-

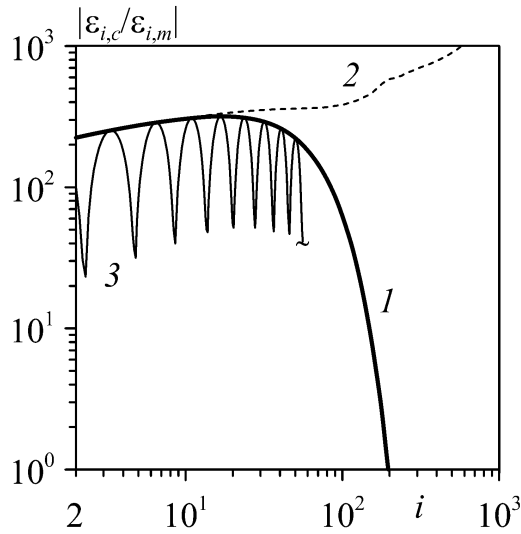


Рис. 4. Огибающие зависимостей степени роста амплитуды возмущений сферичности пузырька при его сжатии $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i,m}|$ от номера i при учете влияния вязкости (1) и при его пренебрежении (2) (3 — фрагмент зависимости, полученной с учетом вязкости)

ра, построенными по экспериментальным данным. Учитываются нестационарная теплопроводность в обеих средах, неравновесные процессы испарения–конденсации на межфазной границе. Несферическая составляющая определяется без учета влияния сжимаемости жидкости и неоднородности параметров пара.

Обнаружено, что в отличие от случая, когда средой является дейтерированный ацетон, при сжатии кавитационного пузырька в воде, несмотря на высокую скорость сжатия (до 1.8 км/с), в паре не образуется сходящейся ударной волны.

Установлено, что без учета влияния вязкости жидкости амплитуда гармонических искаже-

ний сферичности пузырька в момент коллапса с уменьшением длины волны возмущения $\lambda = 2\pi R/i$ (R — радиус; i — номер сферической гармоники) неограниченно возрастает. При учете вязкости жидкости при любых i амплитуда малых начальных искажений сферичности пузырька может возрасти при сжатии не более чем в 320 раз.

Список литературы

- [1] Putterman S.J., Weninger K.P. Sonoluminescence // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. V. 32. P. 445–476.
- [2] Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T. (Jr), Nigmatulin R.I., Block R.C. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // Science. 2002. V. 295. P. 1868–1873.
- [3] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Нигматулин Р.И., Топорков Д.Ю. Эволюция искажений сферичности кавитационного пузырька при акустическом сверхсжатии // МЖГ. 2010. № 1. С. 57–69.
- [4] Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T. (Jr), Taleyarkhan R.P. The theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion // Phys. Fluids. 2005. V. 17. № 10. 107106.
- [5] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // ТВТ. 2011. Т. 49, № 2. С. 310–313.
- [6] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, т. 1 и 2. М.: Наука, 1987.
- [7] Prosperetti A. Viscous effects on perturbed spherical flows // Quarterly of Appl. Math. 1977. V. 34. P. 339–352.
- [8] Lin H., Storey B.D., Szeri A.J. Inertially driven inhomogeneities in violently collapsing bubbles: the validity of the Rayleigh-Plesset equation // J. Fluid Mech. 2002. V. 452. P. 145–162.