

Численное моделирование разлива над непроницаемым грунтом¹

Гильманов С.А.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. З. Бишевой, Стерлитамак

Разного рода гидродинамические процессы в подавляющем большинстве случаев могут иметь неблагоприятные с точки зрения экологии и экономики последствия. Это требует разработки адекватных мер для организации ликвидации последствий таких явлений. Математическое моделирование разливов имеет прикладное значение для разработки технологического оборудования, предназначенного для уменьшения влияния последствий разливов и его предупреждения.

1. Введение

Под мгновенным разливом столба жидкости понимают гидродинамический процесс, при котором в начальный момент времени каким-либо образом убираются стены, ограничивающие столб жидкости. Это может быть разрушение стены в силу различных причин или иной процесс. Разрушение столба жидкости под действием силы тяжести является актуальной и интересной задачей прикладной гидродинамики.

Время, в течение которого столб теряет свою цилиндрическую форму является малым по сравнению с временем, необходимым для того чтобы разлив принял стационарную конфигурацию. В литературе условно выделяют три этапа при разрушении столба жидкости [1, 2]. Первый этап — инерционный — здесь основную роль играют силы тяжести и силы инерции; второй — переходный этап — здесь начинает сказываться влияние сил сопротивления со стороны поверхности растекания. Третий этап — стационарный, когда сила тяжести уравновешивается силами сопротивления со стороны окружающей среды. В литературе существуют и другие подходы [3, 4] к моделированию разрушения столба жидкости. Мгновенные разливы представляют собой достаточно быстрые движения жидкости, которые могут охватывать большие области на поверхности грунта. Также рост зеркала разлива ведет к росту испарения жидкости. Натурные эксперименты показывают, что для количественного согласования теории и эксперимента требуется уточнение моделей. Наибольшие отклонения поведения реаль-

ных разливов от результатов численного моделирования наблюдается на краях разлива, причем эти отклонения имеют тенденцию к увеличению с течением времени [2].

В работе исследован разлив жидкости конечного объема радиально-симметричной конфигурации. Полученные решения позволяют уточнить и обобщить ранее полученные результаты.

2. Моделирование разлива

Моделирование разлива рассмотрим на основе теории мелкой воды. Такой подход справедлив для разлива в том случае, когда его радиус значительно больше высоты $R \gg h$, а вертикальные скорость и ускорение пренебрежимо малы по сравнению с горизонтальными. Схема разлива представлена на рис. 1.

2.1. Математическая модель

Уравнение неразрывности может быть представлено в следующем виде [2]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rhv) = 0, \quad (1)$$

здесь $h = h(r, t)$ — высота слоя жидкости над горизонтальной поверхностью над радиальной координатой r в момент времени t ; $v = v(r, t)$ — соответствующая усредненная по высоте скорость. Уравнение баланса импульсов принято в виде [5], где пренебрегаем силами сопротивления:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -g \frac{\partial h}{\partial r}, \quad (2)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-01-97014-р_поволжье_a) и ГНТП РБ (Программа 3).

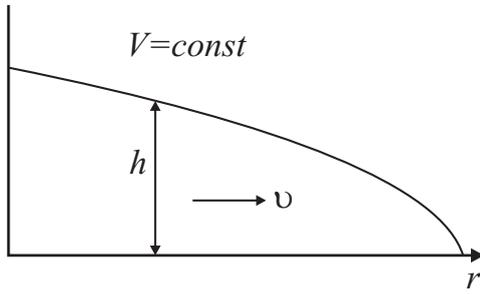


Рис. 1. Схема разлива в радиальном разрезе

здесь g — ускорение силы тяжести. Сохранение объема жидкости представлено как:

$$2\pi \int_0^{R(t)} r h dr = V_0, \quad (3)$$

здесь $R(t)$ — зависимость радиуса растекания от времени.

2.2. Автомоделное решение

Решение системы (1)–(2) будем искать в виде:

$$h(r, t) = a(t)f(\xi), \quad \xi = \frac{r}{b(t)}, \quad v(r, t) = \dot{b}(t)V(\xi). \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем точки над a и b означают производные по времени. Указание переменных далее опущено. Подстановка (4) в (1), (2) и некоторое преобразование дает

$$\frac{\dot{a}b}{ab} = \frac{1}{f} \left(\xi \frac{df}{d\xi} - \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi f V) \right) \quad (5)$$

для уравнения неразрывности и

$$\frac{a\ddot{b}b + ab\ddot{b} - \dot{a}\dot{b}b}{b(\dot{a}b - 2a\dot{b})} = \frac{V - \xi \frac{dV}{d\xi}}{V} \quad (6)$$

для уравнения баланса импульсов. Левые части (5) и (6) являются функциями от времени, а правые — от автомоделной переменной ξ . Тогда воспользуемся методом разделения переменных, предложенным Фурье [6]. Решение левой части (5) указанным методом дает общее решение в виде

$$a = Db^C, \quad (7)$$

где C — параметр; D — постоянная интегрирования. Правая часть (5) не дает однозначного решения в силу того, что состоит из двух неизвестных функций.

Аналитическое решение дает правая часть (6) в неявной форме:

$$\left(\xi - \frac{V}{1+E} \right)^E \sqrt[E]{V} = G, \quad (8)$$

здесь E — параметр уравнения (6); G — постоянная интегрирования. В частных случаях удается получить выражение для V в явной форме. Некоторые из этих выражений приведены ниже:

$$E = 0, \quad V = \xi, \quad V = G = \text{const}, \quad (9)$$

$$E = -\frac{1}{2}, \quad V = \frac{\sqrt{1+G\xi}-1}{G}, \quad V = -\frac{\sqrt{1+G\xi}+1}{G}, \quad (10)$$

$$E = 1, \quad V = \xi \pm \sqrt{\xi^2 - 2G}. \quad (11)$$

Подстановка, например, второго решения (9) в правую часть (5) дает аналитическое решение для f в виде:

$$f = \frac{H}{\xi} (\xi - G)^{C+1}, \quad (12)$$

а первого решения (10) имеет следующее аналитическое решение:

$$f = \frac{H}{\xi} \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 2G})^{-2-C}}{\sqrt{\xi^2 - 2G}}, \quad (13)$$

здесь H — константа интегрирования.

Интегрирование левой части (6) осуществлено численно при помощи задания начальных значений b , \dot{b} и \ddot{b} с учетом (7).

С течением времени столб жидкости разливается, его высота уменьшается, а радиус растет, поэтому должно быть выполнено $\dot{a} < 0$, $\dot{b} > 0$. Для постепенного замедления разлива должно быть выполнено условие $\ddot{b} < 0$. Совершим подстановку (4) в (3) и получим выражение в виде произведения:

$$2\pi ab^2 \int_0^{\xi_0} \xi f d\xi = V_0. \quad (14)$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия $2\pi ab^2 = V_0$

и $\int_0^{\xi_0} \xi f d\xi = 1$, что приведет к некоторому сужению множества решений. Сравнение последнего выражения с (7) дает следующие значения для C и D :

$$D = \frac{V_0}{2\pi}, \quad C = -2. \quad (15)$$

Выражения (12) и (13) при этом примут вид:

$$f = \frac{H}{\xi} \frac{1}{(\xi - G)}, \quad f = \frac{H}{\xi} \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 2G})^{-4}}{\sqrt{\xi^2 - 2G}}. \quad (16)$$

Определим значения ξ_0 для этих зависимостей как функции от величин G, H :

$$\xi_0 = G(1 - \exp(H^{-1})), \quad (17)$$

$$H\xi_0^2((\xi_0^2 - 2G)^{\frac{1}{2}}(\xi_0^2 - G - \xi_0(\xi_0^2 - 2G)^{\frac{1}{2}})) = 8G^4. \quad (18)$$

Как видно из (18) второе выражение не решается явно относительно ξ_0 .

3. Заключение

Рассмотрена постановка задачи о разливе жидкости конечного объема на инерционном этапе. Уравнения, описывающие процесс разлива при помощи обобщенной автомодельной переменной, сведены к виду, удобному для решения. Получены некоторые аналитические выражения для автомодельной скорости и автомодельного профиля. Указано, что временные функции в общем виде не имеют аналитических решений, однако могут быть решены численно.

Список литературы

- [1] Гамзаев Х.М. Моделирование растекания нефтяной пленки по поверхности моря // ПМТФ. 2009 год. Т. 50, № 2. С. 127–130.
- [2] Spannuth M.J., Neufeld J.A., Wettlaufer J.S., Grae Worster M. Axisymmetric viscous gravity currents flowing over a porous medium // J.Fluid Mech. 2009. V. 622, № 1. P. 135–144.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Издание 5-е. Т. VI. Гидродинамика. М: Физматлит, 2006. 736 с.
- [4] Герлах С.А. Загрязнение морей. Л: Гидрометеоиздат, 1985. 262 с.
- [5] Шагапов В.Ш., Гильманов С.А. Растекание жидкости по поверхности, сопровождаемое впитыванием в грунт // ПМТФ. 2010 год. Т. 51, № 5. С. 88–94.
- [6] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, Издание 4-е. 1966. 444 с.