МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 517.9

Симметрийные свойства дифференциальных уравнений переноса дробного порядка[1]

Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В работе рассматриваются некоторые особенности применения методов группового анализа к дифференциальным уравнениям дробного порядка. Обсуждается проблема точечной замены переменных в операторе дробного дифференцирования и обосновывается общий вид такой замены, сохраняющей вид оператора Римана-Лиувилля. Приводится формула продолжения инфинитезимального оператора группы на дробную производную от функции по функции и простым примером иллюстрируется необходимость рассмотрения у уравнений дробного порядка локальных и нелокальных симметрий, зависящих, в частности, от начальных условий задачи. Обсуждаются виды преобразований эквивалентности для уравнений дробного порядка и приводятся результаты групповой классификации диффузионно-волнового уравнения. На примере дробно-дифференциальных уравнений переноса показано, что разработанные методы могут быть использованы вместе с методом инвариантных подпространств для построения частных решений.

1. Введение

Дифференциальные уравнения с производными дробного порядка $[1,2]$ в последнее время находят все более широкое применение в качестве математических моделей аномальных процессов, протекающих в сложных средах, и обусловленных такими свойствами среды как память, перемежаемость, пространственная нелокальность и др. Особенно широкое применение данные уравнения получили в теории процессов аномального переноса вещества и энергии для описания суб- и супердиффузии, диффузионно-волновых процессов, аномальной теплопроводности и др. $[3,4]$. Аналитические методы исследования свойств и построения решений таких уравнений, особенно нелинейных, развиты слабо. Поэтому представляется актуальным развитие методов группового анализа для исследования этого класса уравнений.

В работах [5–8] методы построения точечных групп преобразований, допускаемых дифференциальными уравнениями, были развиты для уравнений, содержащих производные дробного порядка типа Римана–Лиувилля

$$\left({}_cD_x^\alpha y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_c^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \quad (1)$$

и Капуто

$$\left({}_c^CD_x^\alpha y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_c^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt, \quad (2)$$

где $n=[\alpha]+1$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Были построены формулы продолжения инфинитезимального оператора группы на интегралы и производные дробного порядка вида (1), (2), разработаны алгоритмы нахождения допускаемой группы для уравнений, содержащих эти производные, решены некоторые задачи групповой классификации обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных дробного порядка.

Данная работа состоит из четырех разделов, каждый из которых посвящен обсуждению особенностей, возникающих при переносе некоторых алгоритмов классического группового анализа на дифференциальные уравнения с производными дробного порядка. В разделе 2 рассматриваются точечные замены переменных в операторах дробного дифференцирования: обсуждается условие инвариантности формы оператора, а также приводятся частные случаи замен переменных, переводящих оператор типа Римана–Лиувилля в другие известные операторы дробного дифференцирования. В разделе 3 впервые приводится обобщение формулы продолжения на дробные производные от функции по функции. Там же простым примером иллюстрируется наличие у уравнения дробного порядка локальных и нелокальных симметрий, зависящих, в

[1]Работы выполнена в рамках договора 11.G34.31.0042 между Министерством образования и науки РФ, ведущим ученым профессором Н.Х. Ибрагимовым и ФГБОУ ВПО УГАТУ

частности, от начальных условий задачи. Раздел 4 посвящен краткому обсуждению проблемы преобразований эквивалентности в уравнениях с дробными производными; приводится результат групповой классификации диффузионно-волнового уравнения. Наконец, в разделе 5 обсуждаются вопросы совместного использования метода инвариантных подпространств [9] и группового анализа для построения решений нелинейных уравнений переноса дробного порядка.

2. Замены переменных в производных дробного порядка

В общем случае, произвольная замена переменных $\bar{x}=\varphi(x,y)$, $\bar{y}=\psi(x,y)$ не сохраняет вида оператора дробного дифференцирования. В частности, при такой замене дробная производная Римана–Лиувилля (1) порядка $\alpha\in(0,1)$ переходит в левостороннюю дробную производную от функции $\psi(x,y)$ по функции $\varphi(x,y)$, определяемую как

$$\left({}_cD^{\alpha}_{\varphi[x]}\psi\right)[x]= =\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{D_x\varphi[x]}\frac{d}{dx}\int_{\varphi^{-1}[c]}^{x}\frac{\psi[t]D_t\varphi[t]}{(\varphi[x]-\varphi[t])^{\alpha}}dt. \tag{3}$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение $f[x]\equiv f(x,y(x))$. Определение и основные свойства производных от функции по функции см., например, в [1].

Из анализа (3) достаточно просто может быть найден общий вид точечной замены переменных, сохраняющей структуру оператора ${}_cD^{\alpha}_{x}$. Поскольку оператор дробного дифференцирования является линейным, то замена зависимой переменной также должна быть линейной: $\bar{y}=\psi_0(x)+y\psi_1(x)$, а замена независимой переменной не должна зависеть от y: $\bar{x}=\varphi(x)$. Для сохранения ядра $(x-t)^{-\alpha}$ функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\varphi(x)-\varphi(t)=f(x)g(t)(x-t), \tag{4}$$

где $f(x)$, $g(t)$ — некоторые функции, также подлежащие определению. Меняя в уравнении (4) переменные $x\to t$, $t\to x$, находим, что $g=f$. Далее, дифференцируя уравнение (4) по x и t, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно функции f, общее решение которого имеет вид $f(x)=(c_1+c_2x)$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Зная f, из уравнения (4) находим общий вид $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{c_3+x}{c_1+c_2x}.$$

Для сохранения нижнего предела интегрирования должно выполняться условие $\varphi(c)=c$, откуда

$$c_3=c(c_1+cc_2-1).$$

Утверждение. Общий вид локальной замены переменных, позволяющей сохранить структуру оператора ${}_cD^{\alpha}_{x}$, имеет вид:

$$\bar{x}=\frac{cc_1+(x-c)}{c_1+c_2(x-c)},\quad \bar{y}=\psi_0(x)+y\psi_1(x). \tag{5}$$

Из (5), в частности, следует, что не допускается перенос по x, поскольку он приводит к изменению нижнего предела интегрирования.

Тем не менее, замены переменных, приводящие к изменению оператора дробного дифференцирования с сохранением его важнейшего свойства — линейности, оказываются в ряде случаев весьма полезны. В рамках группового подхода такие замены связаны с преобразования эквивалентности относительно элементов структуры операторов дробного дифференцирования, рассматриваемых в качестве произвольных элементов.

Рассмотрим дробную производную порядка $\alpha\in(0,1)$ функции $y(x)$ по функции $g(x)$:

$${}_cD^{\alpha}_{g(x)}y=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\int_{c}^{x}\frac{y(t)g'(t)}{(g(x)-g(t))^{\alpha}}dt. \tag{6}$$

Дробная производная (1) при $\alpha\in(0,1)$ является частным случаем (6) при $g(x)=x$.

В качестве изменяемого при замене переменных элемента в структуре (6) могут рассматриваться: 1) предел интегрирования c, 2) функция $g(x)$, 3) порядок дробного дифференцирования α. Приведем ряд примеров таких замен переменных, переводящих оператор Римана–Лиувилля в другие известные виды операторов дробного дифференцирования.

1) Перенос по x

$$\bar{x}=x+a,\quad \bar{y}=y \tag{7}$$

сохраняет тип оператора и изменяет лишь нижний предел интегрирования:

$$\left({}_cD^{\alpha}_{x}y\right)(x)=\left({}_{\bar{c}}D^{\alpha}_{\bar{x}}\bar{y}\right)(\bar{x}),\quad \bar{c}=c+a.$$

2) Замена переменных

$$\bar{x}=x^{a},\quad \bar{y}=y \tag{8}$$

приводит к замене оператора Римана–Лиувилля на оператор типа Эрдейи–Кобера [1]:

$$\left({}_cD^{\alpha}_{x}y\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{\bar{x}^{b-1}}\frac{d}{d\bar{x}}\int_{\bar{c}}^{\bar{x}}\frac{\bar{y}(\bar{t})\bar{t}^{b-1}}{(\bar{x}^{b}-\bar{t}^{b})^{\alpha}}d\bar{t}$$

$$b=1/a,\quad \bar{c}=c^{a}.$$

Такая замена часто выполняется при поиске инвариантных решений для уравнений аномального переноса дробного порядка на группе растяжений [5].

3) Замена переменных

$$\bar{x} = e^x, \quad \bar{y} = y$$

приводит к замене оператора Римана–Лиувилля на оператор дробной производной типа Адамара [1]:

$$\left({}_cD_x^\alpha y\right)(x) = \frac{\bar{x}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\bar{x}} \int_{e^{\bar{c}}}^{\bar{x}} \frac{\bar{y}(\bar{t})}{\left(\ln \dfrac{\bar{x}}{\bar{t}}\right)^\alpha} \frac{d\bar{t}}{\bar{t}}.$$

3. Формулы продолжения и нелокальные симметрии

Рассмотрим одно-параметрическую группу точечных преобразований

$$\begin{aligned} \bar{x} = \varphi(x,y,a), \quad \bar{y} = \psi(x,y,a); \\ \varphi|_{a=0} = x, \quad \psi|_{a=0} = y. \end{aligned} \tag{9}$$

В работе [6] на основе инфинитезимального подхода были получены формулы продолжения для производных дробного порядка типа Римана–Лиувилля (1) и Капуто (2). Данный подход может быть расширен и на общий случай дробных производных от функции по функции вида (6).

Пусть инфинитезимальное преобразование для (9) имеет вид:

$$\bar{x} \approx x + a\xi(x,y), \quad \bar{y} \approx y + a\eta(x,y).$$

При выводе формул продолжения важным является вид замены переменной интегрирования в операторе дробного дифференцирования. Очевидный вид замены, когда переменная интегрирования t изменяется по тому же правилу, что и независимая переменная x, не является оптимальным, поскольку приводит к появлению параметра a в нижнем пределе интегрирования, что существенно усложняет дальнейшие преобразования. Более оптимальной является замена переменных, сохраняющая пределы интегрирования, и имеющая вид

$$\bar{t} = t + a\xi(x,y)\frac{g(t)-g(c)}{g(x)-g(c)}\frac{g'(x)}{g'(t)}.$$

Можно показать, что инфинитезимальное преобразование дробной производной (6) имеет вид

$$\left({}_cD_{g(\bar{x})}^\alpha \bar{y}\right) = \left({}_cD_{g(x)}^\alpha y\right) + a\zeta_\alpha,$$

где

$$\zeta_\alpha = {}_cD_{g(x)}^\alpha(\eta - \xi y') + \xi g'(x) {}_cD_{g(x)}^{\alpha+1} y. \tag{10}$$

При $g(x) = x$ (10) переходит в полученную ранее [6] формулу продолжения для производной типа Римана–Лиувилля, а при целых α совпадает с известными классическими формулами продолжения на производные целых порядков [10].

Замечание 1. В отличие от производных целого порядка, раскрывать скобки в правой части (10) в общем случае нельзя, поскольку дробная производная от отдельных слагаемых η и $\xi y'$ может не существовать.

Замечание 2. Формула продолжения (10) может использоваться и при построении нелокальных симметрий.

Проиллюстрируем замечание 2 простым примером. Рассмотрим уравнение

$${}_0D_x^{\alpha+1} y = 0, \quad \alpha \in (0,1), \tag{11}$$

которое имеет известное общее решение $y = x^{\alpha-1}(c_1 x + c_2)$. По определению дробной производной, уравнение (11) может быть записано в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} {}_0I_x^{1-\alpha} y = 0,$$

где

$$\left({}_0I_x^{1-\alpha} y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

— левосторонний интеграл дробного порядка $1-\alpha$.

После нелокальной замены $z = {}_0I_x^{1-\alpha} y$ уравнение (11) запишется в виде $z'' = 0$, которое допускает восьми-параметрическую группу. Обращая нелокальную замену, находим $y = {}_0D_x^{1-\alpha} z$. Используя формулу продолжения (10) и формулу Лейбница для дробного дифференцирования произведения двух функций

$${}_0D_x^\alpha (fg) = \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} {}_0D_x^{\alpha-k} f \, D^k g,$$

можно построить продолжение группы уравнения $z'' = 0$ на дробную производную ${}_0D_x^{1-\alpha} z$. При этом необходимо учитывать, что поскольку $z(0)$ существует, то существует и дробная производная ${}_0D_x^{1-\alpha} z'$. Имеем

$$\tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{z(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$

$$\tilde{X}_2 = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$

$$\tilde{X}_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha-1) z^{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$

$$\tilde{X}_4 = z\frac{\partial}{\partial x} + \frac{z(0)zx^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$

$$\tilde{X}_5 = x\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$

$$\tilde{X}_6 = z\frac{\partial}{\partial z} + z^{(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$
$$\tilde{X}_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xz\frac{\partial}{\partial z} + \Big[(2\alpha-1)xz^{(1-\alpha)} + +(1-\alpha^2)z^{(-\alpha)}\Big]\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$
$$\tilde{X}_8 = xz\frac{\partial}{\partial x} + z^2\frac{\partial}{\partial z} + \Big[(\alpha z'-1)z^{(1-\alpha)} + +(1-\alpha^2)z'z^{(-\alpha)} + \alpha z\Big]\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},$$

где $z^{(1-\alpha)} \equiv {}_0D_x^{1-\alpha}z$. Отсюда, после соответствующей замены переменных, находим симметрии уравнения (11):

$$\begin{gathered}
X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial y},\\
X_2 = x^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial y},\\
X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha-1)y\frac{\partial}{\partial y},\\
X_4 = y^{(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^{(\alpha-1)}(0)y^{(\alpha-1)}x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial y},\\
X_5 = x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y},\\
X_6 = y\frac{\partial}{\partial y},\\
X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + [(2\alpha-1)xy + (1-\alpha^2)Iy]\frac{\partial}{\partial y},\\
X_8 = xy^{(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial x} + [\alpha yy^{(\alpha-1)} - \\
-(1-\alpha)xyy^{(\alpha)} + (1-\alpha^2)y^{(\alpha)}Iy]\frac{\partial}{\partial y}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $y^{(\alpha-1)} \equiv {}_0I_x^{1-\alpha}y$, $Iy \equiv {}_0I_xy$.

Симметрии X_2, X_3, X_5, X_6 являются локальными, остальные симметрии являются нелокальными. Отметим, что входящее в операторы X_1 и X_4 начальное значение $y^{(\alpha-1)}(0)$ является естественным начальным условием при постановке задачи Коши для дробно-дифференциальных уравнений.

Ранее, в работе [6], из принципа инвариантности для уравнения (11) было получено пять локальных симметрий, включая оператор проектирования

$$X_9 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + \alpha xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Данный оператор не может быть получен из (12), но наиболее близким к нему является X_7, полученный из оператора проектирования для уравнения $z''=0$. Нетрудно проверить, что нелокальный оператор

$$X_{10} \equiv X_7 - X_9 = [(\alpha-1)xy + (1-\alpha^2)Iy]\frac{\partial}{\partial y}$$

допускается уравнением (11). При этом в предельном случае $\alpha = 1$ оператор X_{10} обращается в нуль, т.е. X_7 совпадает с X_9.

4. Преобразования эквивалентности

Как и в случае уравнений с производными целых порядков, уравнения с производными дробных порядков могут содержать функциональные параметры, конкретный вид которых неизвестен — так называемые, произвольные элементы. Тем не менее, понятия произвольного элемента и преобразования эквивалентности для таких уравнений могут быть расширены за счет того, что в качестве произвольного элемента могут рассматриваться не только элементы структуры уравнения, но и элементы структуры самих операторов дробного дифференцирования, входящих в уравнение.

Если произвольный элемент не является элементом структуры операторов дробного дифференцирования, то преобразования эквивалентности, соответствующие этому элементу, будем называть *классическими* или *преобразованиями эквивалентности 1-го рода.*

Методика построения преобразований эквивалентности 1-го рода неразрывно связана с задачей групповой классификации уравнения. В качестве примера рассмотрим задачу групповой классификации для диффузионно-волнового уравнения:

$${}_0D_t^{\alpha+1}u = \left(f(u)u_x\right)_x, \quad 0<\alpha<1. \tag{13}$$

В данном случае группа преобразований эквивалентности ищется в классе уравнений, в которых произвольный элемент f является функцией только u. Поэтому преобразования эквивалентности должны допускаться системой, включающей уравнение (13) и уравнения

$$f_x = 0, \quad f_t = 0.$$

Решая соответствующие определяющие уравнения, получаем, что преобразование произвольного элемента имеет вид

$$\bar{f}(u) = c_1 f(c_2 u + c_3),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Результат групповой классификации формулируется следующим образом.

Для произвольной функции $f(u)$ алгебра Ли оказывается двумерной и ее базис составляют операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{2t}{\alpha+1}\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Данная алгебра допускает расширение в случае $f(u) = u^{\beta}$ с произвольным β:

$$X_3 = \frac{\beta}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u},$$

а также при следующих частных значениях параметра:

$$\begin{array}{ll} \beta = -\dfrac{4}{3} & X_4 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} - 3xu\dfrac{\partial}{\partial u}; \\ \beta = -2(1+\alpha^{-1}) & X_4 = t^2\dfrac{\partial}{\partial t} - \alpha tu\dfrac{\partial}{\partial u}; \\ \beta = 0 & X_{\infty} = h(t,x)\dfrac{\partial}{\partial u}, \end{array}$$

где $h(x,t)$ — произвольное решение уравнения (13) с $f(u) = 1$.

Таким образом, преобразования эквивалентности 1-го рода для уравнений дробного порядка являются прямым обобщением классических преобразований эквивалентности на уравнения этого типа.

Существенно больший интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения представляют случаи, когда в качестве произвольного элемента выступает некоторый элемент оператора дробного дифференцирования. В результате такого преобразования при сохранении общей структуры уравнения происходит преобразование типа оператора дробного дифференцирования, как это было показано в разделе 2. Такие преобразования будем называть *преобразованиями эквивалентности 2-го рода*.

Например, для уравнения

$${}_cD_x^{\alpha}y = f(y)$$

преобразования (7) и (8) являются преобразованиями эквивалентности 2-го рода.

Отметим, что преобразование самого общего вида $\bar{x} = \varphi(x,y,a)$, $\bar{y} = \psi(x,y,a)$ могут оказаться допустимыми, если считать функцию g в определении (6) функцией $g(x, y(x))$. Такое преобразование эквивалентности должно будет сохранять только алгебраическую структуру уравнения, образующуюся при рассмотрении всех производных дробного порядка в качестве произвольных элементов. Поэтому на практике класс преобразований эквивалентности 2-го рода всегда должен быть ограничен и оговорен.

5. Построение решений с помощью метода инвариантных подпространств

Метод инвариантных подпространств, развитый в работах В.А. Галактионова и С.Р. Свирщевского (см. [9] и приведенные там источники), позволяет построить решения нелинейных уравнений эволюционного типа:

$$Du_t = F[u], \tag{14}$$

где $F[u] \equiv F(u, u_x, u_{xx}, ...)$ — нелинейный дифференциальный оператор. Решения при этом ищутся в виде линейной комбинации некоторых базисных функций

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t) f_i(x). \tag{15}$$

Согласно [9], линейное подпространство

$$W_n = \langle f_1(x), \ldots\ldots f_n(x)\rangle \tag{16}$$

является *инвариантным* относительно оператора $F[u]$, если $F[y] \in W_n$ для $y \in W_n$, т.е.

$$F[C_1f_1 + \ldots + C_nf_n] = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(C_1, \ldots, C_n) f_i.$$

Инвариантные подпространства и их свойства для большого числа конкретных функций $F[u]$ приведены в [9].

Если задано некоторое инвариантное подпространство (16) уравнения (14), то все частные решения вида (15) удовлетворяют системе обыкновенных уравнений

$$\begin{cases} Du_1(t) = \Phi_1(u_1, \ldots, u_n), \\ \ldots \\ Du_n(t) = \Phi_n(u_1, \ldots, u_n). \end{cases} \tag{17}$$

Как правило, для систем вида (17) методы группового анализа не дают конструктивных алгоритмов для построения их решений. Вместе с тем, обобщение метода на дифференциальные уравнения дробного порядка вида

$$D_t^{\alpha}u_t = F[u]$$

приводит к системам вида (17) с дробной производной в левой части уравнений. Такие системы, в отличие от систем с производными первого порядка, при принятых ограничениях имеют допускаемые алгебры Ли конечной размерности (в силу ограниченности класса преобразований, сохраняющего форму оператора дробного дифференцирования), которые могут быть использованы для построения их решений.

В качестве простого примера рассмотрим уравнение

$$D_t^{\alpha}u = uu_x. \tag{18}$$

Оператор $F[u] = uu_x$ имеет инвариантное подпространство $\{1, x\}$ и его решение имеет вид

$$u = C_1(t) + xC_2(t).$$

Здесь C_1, C_2 должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} D^\alpha C_1 = C_1 C_2, \\ D^\alpha C_2 = C_2^2, \end{cases}$$

которая допускает три оператора

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha C_2 \frac{\partial}{\partial C_2}, \quad X_2 = C_1 \frac{\partial}{\partial C_1}, \quad X_3 = C_2 \frac{\partial}{\partial C_1}.$$

Используя операторы X_1, X_2, получаем

$$C_1(t) = ct^{-\alpha}, C_2(t) = t^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)/\Gamma(1-2\alpha),$$

и

$$u = ct^{-\alpha} + xt^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)/\Gamma(1-2\alpha).$$

Уравнение аномальной диффузии с коэффициентом $k(u) = u$ и правой частью

$$F[u] = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

имеет ровно два различных 2-мерных инвариантных подпространства, которые дают следующее решение:

$$u = C_1(t) f_1(x) + C_2(t) f_2(x):$$

1. $f_1(x) = 1, f_2(x) = x^2:$

$$F[C_1 + C_2 x^2] = 6C_2^2 x^2 + 2C_1 C_2;$$

2. $f_1(x) = \sqrt{x}, f_2(x) = x^2:$

$$F[C_1\sqrt{x} + C_2 x^2] = 6C_2^2 x^2 + \frac{15}{4} C_1 C_2 \sqrt{x}.$$

1. $f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x^2$: система

$$\begin{cases} D^\alpha C_1 = 2C_1 C_2, \\ D^\alpha C_2 = 6C_2^2 \end{cases}$$

допускает два оператора:

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha C_2 \frac{\partial}{\partial C_2}, \quad X_2 = C_1 \frac{\partial}{\partial C_1},$$

которые приводят к решению

$$C_1 = ct^\beta, \quad C_2 = kt^{-\alpha},$$

где

$$k = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{6\Gamma(1-2\alpha)}, \quad \beta: \quad \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} = \frac{k}{3}.$$

2. $f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = x^2$: система

$$\begin{cases} D^\alpha C_1 = \dfrac{15}{4} C_1 C_2, \\ D^\alpha C_2 = 6C_2^2 \end{cases}$$

допускает два оператора

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha C_2 \frac{\partial}{\partial C_2}, \quad X_2 = C_1 \frac{\partial}{\partial C_1},$$

которые дают решение

$$C_1 = ct^\beta, \quad C_2 = kt^{-\alpha},$$

где

$$k = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{6\Gamma(1-2\alpha)}, \quad \beta: \quad \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} = \frac{5k}{8}.$$

Список литературы

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[2] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

[3] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamic approach // Phys. Rep. 2000. V. 339, Pp. 1–77.

[4] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. 512 с.

[5] Buckwar E, Luchko Yu. Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 227. Pp. 81–97.

[6] Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю. Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3 (21). С. 125–135.

[7] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations // Physica Scripta. 2009. T 136. 014016.

[8] Group-Invariant Solutions of Fractional Differential Equations. Nonlinear Science and Complexity, Springer. 2011. P. 51–59.

[9] Galaktionov V., Svirshchevskii S. Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2009. 498 p.

[10] CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations / N.H. Ibragimov (ed.). CRC Press, Boca Raton, V. 1. 1994. 430 p.