

Исследование влияния диффузии газа на динамику пузырька в акустическом поле¹

Волкова Е.В.^{*,**}, Насибуллаева Э.Ш.^{*,**}, Ахатов И.Ш.^{**,***}

^{*}Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа,

^{**}Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем», БашГУ, Уфа,

^{***}Department of Mechanical Engineering, North Dakota State University, Fargo, USA

Решается задача диффузии газа между сферически-симметричным газовым пузырьком и жидкостью в изотропном акустическом поле. Задача решается как для одиночного пузырька, так и для пузырька в монодисперсном кластере. Разработан численный метод решения диффузионной задачи. Для осциллирующей части диффузионной задачи проведены численные эксперименты для различных амплитуд внешнего давления. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных по аппроксимационной теории, и с помощью численного метода, представленного в данной работе. Исследовано насколько сильно влияет учет изменения массы при расчете динамики пузырька. Для обширного параметрического исследования проводится распараллеливание алгоритма и оценка эффективности распараллеливания.

1. Введение

Акустическая кавитация — это образование в жидкости полостей, заполненных газом, паром или их смесью (так называемых, кавитационных пузырьков) благодаря прохождению акустической волны большой интенсивности через жидкость. Исследование роста или растворения пузырьков, подвергающихся воздействию сильного акустического поля за счет диффузии газа является важной задачей во многих химических и физических процессах.

Другим интересным явлением является сонолюминесценция одиночного пузырька [1, 2]. Из экспериментов по сонолюминесценции одиночного пузырька было получено, что пузырек может колебаться непрерывно несколько дней без изменения своего размера.

Различные факторы могут влиять на образование устойчивых кавитационных пузырьков: направленная диффузия, частота звукового поля, тип жидкости, поверхностное натяжение, количество растворенного газа в жидкости, вязкость и т.п. В данной работе внимание сфокусировано в основном на влиянии направленной диффузии на динамику одиночного пузырька или пузырька в кластере при воздействии сильным акустическим полем.

Изучению динамики как одиночного пузырька,

так и пузырька в кластере посвящена обширная литература. Но до настоящего времени при исследовании диффузионной задачи, как правило, использовались аппроксимационные модели, которые не могут дать полного представления о данном процессе (см., например, [3–5]). Кроме того, во всех этих работах не бралось во внимание влияние изменения массы пузырька, обусловленное диффузией, на динамику самого пузырька.

Основной целью данной работы является исследование того, как сильно влияет изменение массы газа в пузырьке на динамику пузырька, совершающего сферически-симметричные радиальные колебания под действием акустического поля. Для этого авторами данной статьи были разработаны численный метод и математическая модель, которая позволяет решать диффузионную задачу для сферического пузырька в изотропном акустическом поле для пузырьков, совершающих сильно нелинейные колебания.

Следует отметить, что прямые расчеты требуют относительно небольших шагов по времени для обеспечения вычислительной устойчивости и детального решения динамики пузырька, а это требует большого количества машинного времени для вычисления многих периодов колебаний. Кроме того, параметрические исследования требуют большого числа расчетов. Это накладывает определенные требования к численным методам, которые должны быть надежными и достаточно быстрыми.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Министерства образования и науки РФ (11.G34.31.0040) и РФФИ (гранты №№ 11-08-00823, 11-01-97007).

Мы уделили внимание данным вопросам, в частности, при распараллеливании и оценке эффективности работы разработанного программного обеспечения.

2. Постановка задачи

2.1. Основные уравнения

В работе рассматривается сферически-симметричный газовый пузырек в изотропном поле давления. Моделирование задачи основывается на следующих допущениях: теплообмен в жидкости отсутствует; изменение размеров пузырька за период колебания происходит только за счет диффузии; разница между скоростью жидкости на поверхности и скоростью изменения радиуса пузырька считается незначительной для уравнения Келлера–Миксиса.

В невозмущенном начальном состоянии, которое будет обозначаться нижним индексом «0», выражения для давления p_g , плотности ρ_g и массы m_g газа имеют следующий вид:

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \rho_{g0} = \frac{p_{g0}}{R_g T_0}, \quad m_{g0} = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \rho_{g0},$$

где a — радиус пузырька; ρ_g — плотность газа; p_g — давление газа в пузырьке; m_g — масса газа в пузырьке; σ — поверхностное натяжение; R_g — универсальная газовая постоянная; T — температура окружающей жидкости.

Пузырек колеблется под действием акустического поля, изменяющегося по закону синуса: $p_a(t) = p_0 - \Delta P \sin \omega t$, где p_a — давление в жидкости вдали от пузырька; ΔP — амплитуда звукового давления; ω — круговая частота. Предполагается, что длина волны звукового давления во много раз превышает размеры пузырька $\omega a \ll C$, где C — скорость звука в жидкости.

Скорость переноса массы через подвижную границу пузырька определяется через градиент концентрации газа c по следующей формуле

$$\dot{m}_g = 4\pi a^2 \rho_l D \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=a},$$

где ρ_l — плотность жидкости; D — коэффициент диффузии; r — сферическая координата. Полагая поведение пузырька политропным, получим следующую формулу для давления газа p_g в пузырьке:

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left(\frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)^\gamma = \left(\frac{m_g}{m_{g0}} \right)^\gamma \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma}.$$

Здесь γ — показатель адиабаты.

При квазиизотермических условиях масса газа меняется очень медленно. В этом случае справедливо

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left(\frac{m_g}{m_{g0}} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma}.$$

Динамика одиночного пузырька описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением Келлера–Миксиса [6]

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{a}}{C} \right) a \ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{\dot{a}}{3C} \right) = \\ & = \left(1 + \frac{\dot{a}}{C} \right) \frac{P - p_a}{\rho_l} + \frac{a}{\rho_l C} \frac{d}{dt} [P - p_a], \end{aligned} \quad (1)$$

в котором

$$P = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} \right) \left(\frac{m_g}{m_{g0}} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma} - \frac{2\sigma}{a} - \frac{4\mu}{a} \dot{a},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; μ — коэффициент кинематической вязкости жидкости. Начальные условия для уравнения (1):

$$a(0) = a_0, \quad \dot{a}(0) = 0.$$

Динамика пузырька в монодисперсном кластере и динамика самого кластера описываются следующей системой уравнений [7]:

$$\begin{aligned} & a \ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 = \frac{P - p_c}{\rho_l}, \\ & R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{p_c - p_a}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l C} \frac{d}{dt} [p_c - p_a], \\ & N a^2 \dot{a} = R^2 \dot{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $p_c = p_c(t)$ — давление жидкости в кластере; $R = R(t)$ — радиус кластера; N — число пузырьков.

Уравнение диффузии растворенного в жидкости газа в сферических координатах имеет следующий вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{a^2 \dot{a}}{r^2} \frac{\partial c}{\partial r} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad (3)$$

где c — массовая концентрация газа, растворенного в жидкости; $\frac{a^2 \dot{a}}{r^2}$ — радиальное поле скоростей. Поле скорости в жидкости зависит от времени, пространственно неоднородно и возникает в области с подвижной границей. Граничное условие на поверхности пузырька вычисляется по закону Генри:

$$c|_{r=a} = c_a = H \cdot p_{g0} \cdot \left(\frac{m_g}{m_{g0}} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma},$$

где H — константа Генри. Предполагается, что пузырек образовался в жидкости, которая изначально имела однородную концентрацию газа c_∞ . Исходя из этого, начальное и граничное условия вдали от стенок пузырька будут иметь следующий вид

$$c|_{r,t=0} = c_\infty = H \cdot p_{g0}.$$

Из уравнения диффузии (3) необходимо вычислить поток массы из пузырька в жидкость:

$$j = -\rho_l D \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=a}.$$

Аналогично работе [3] для устранения вычислительных проблем, связанных с подвижной границей, граница зафиксирована с помощью переменной Лагранжа $\zeta = r^3 - a^3$.

Обозначая $\tilde{c} = c - c_\infty$, $\tilde{c}_a = c_a - c_\infty$ и вводя новую переменную для обозначения времени

$$\tau(t) = 9D \int_0^t a^4(t') dt', \quad \tau(0) = 0,$$

уравнение диффузии (2) переписется в виде

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(1 + \frac{\zeta}{a^3} \right)^{4/3} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \zeta} \right], \quad (4)$$

где a и \tilde{c}_a рассматриваются как функции времени τ . Начальные и граничные условия уравнения (4) имеют следующий вид:

$$\tilde{c}|_{\zeta=\infty} = 0, \quad \tilde{c}|_{\zeta=0} = \tilde{c}_a, \quad \tilde{c}|_{\tau=0} = 0.$$

2.2. Разделение задачи

Граничное условие, зависящее от времени в (4), создает трудную для вычисления ситуацию. При больших числах Пекле поле концентрации будет характеризоваться осциллирующим поведением ближе к границе пузырька. Это происходит из-за граничного условия Генри. Дальше от стенок пузырька будет наблюдаться медленное изменение концентрации. Таким образом, для поля концентрации будет адекватным разбиение задачи на две согласно [3]. Первая задача соответствует осциллирующей части граничного условия. Вторая, гладкая, соответствует постоянной части. Это постоянное граничное условие не берется произвольно, а вытекает из решения осциллирующей задачи.

Для разделения задачи на две необходимо ввести следующее осреднение по периоду

$$\langle f(\zeta, t) \rangle_\tau = \frac{\int_0^T f(\zeta, t) a^4(t) dt}{\int_0^T a^4(t) dt}$$

для одного периода акустической волны T .

Используя это осреднение, граничное условие

у стенки пузырька можно записать в виде

$$\tilde{c}|_{\zeta=0} = H \cdot p_{g0} \left\langle \left(\frac{m_g}{m_{g0}} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma} \right\rangle - c_\infty + H \times \\ \times p_{g0} \left[\left(\frac{m_g}{m_{g0}} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma} - \left\langle \left(\frac{m_g}{m_{g0}} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma} \right\rangle_\tau \right].$$

Тогда осциллирующая задача запишется в следующем виде

$$\frac{\partial \tilde{c}_{osc}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(1 + \frac{\zeta}{a^3} \right)^{4/3} \frac{\partial \tilde{c}_{osc}}{\partial \zeta} \right]$$

со следующими граничными и начальными условиями

$$\tilde{c}_{osc}|_{\zeta=0} = H \cdot p_{g0} \cdot \left[\left(\frac{p_g}{p_{g0}} \right) - \left\langle \left(\frac{p_g}{p_{g0}} \right) \right\rangle_\tau \right], \\ \tilde{c}_{osc}|_{\tau=0} = \tilde{c}_{osc}|_{\zeta=\infty} = 0.$$

А гладкая задача будет иметь следующий вид

$$\frac{\partial \tilde{c}_{sm}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(1 + \frac{\zeta}{a^3} \right)^{4/3} \frac{\partial \tilde{c}_{sm}}{\partial \zeta} \right]$$

с граничными и начальными условиями

$$\tilde{c}_{sm}|_{\zeta=0} = H \cdot p_{g0} \cdot \left\langle \left(\frac{p_g}{p_{g0}} \right) \right\rangle_\tau - c_\infty \\ \tilde{c}_{sm}|_{\tau=0} = \tilde{c}_{sm}|_{\zeta=\infty} = 0.$$

Сумма осциллирующего и гладкого решений будет решением для полной задачи, т.е.

$$\tilde{c}(\zeta, \tau) = \tilde{c}_{osc}(\zeta, \tau) + \tilde{c}_{sm}(\zeta, \tau).$$

В дальнейшем в данной работе будет рассматриваться только решение осциллирующей задачи.

3. Численная реализация

Численное исследование уравнения Келлера–Миксиса для одиночного пузырька (1) и системы уравнений для пузырькового кластера (2) осуществлялось с помощью метода Дормана–Принца восьмого порядка точности [8]. Также для проверки решения использовалась встроенная процедура Matlab ode45 для решения ОДУ методом Рунге–Кутты 4–5 порядка точности. Вычисления усложнились после того, как был произведен расчет переноса массы газа, растворенного в жидкости, через подвижную стенку пузырька.

Решение задачи должно исчезать экспоненциально при приближении к бесконечности, таким образом, граница может быть установлена для некоторой конечной величины $\zeta = \zeta_c$.

После всех преобразований уравнение диффузии (4) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\kappa(\zeta, \tau) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right],$$

$$u|_{\zeta=\zeta_c} = 0, \quad u|_{\zeta=0} = u_a, \quad u|_{\tau=0} = 0$$

и решается по схеме Кранка–Николсона. Здесь $u = \bar{c}$ является функцией от времени τ , и

$$\kappa(\zeta, \tau) = \left(1 + \frac{\zeta}{a^3} \right)^{4/3}.$$

Обозначим шаг по времени h_τ и пространству h_ζ . Если ввести следующие значения:

$$\begin{aligned} \tau_n &= nh_\tau, \quad n = 0, 1, \dots, \\ \zeta_m &= mh_\zeta, \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ u_m^n &= u(\zeta_m, \tau_n), \\ \kappa_m^n &= \kappa(\zeta_m, \tau_n), \\ f_m^n &= f(\zeta_m, \tau_n), \end{aligned}$$

и заменить исходные уравнения дискретным аналогом, то получим

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{h_\tau} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\kappa^{n+1}(\zeta) \frac{\partial u^{n+1}}{\partial \zeta} \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\kappa^n(\zeta) \frac{\partial u^n}{\partial \zeta} \right] \right\}. \end{aligned}$$

После того, как все неизвестные собраны в левой части, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^{(n+1)} &= [\kappa^{n+1}(\zeta_{m+1/2})(u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}) - \\ &- \kappa^{n+1}(\zeta_{m-1/2})(u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1})], \\ A^{(n)} &= [\kappa^n(\zeta_{m+1/2})(u_{m+1}^n - u_m^n) - \\ &- \kappa^n(\zeta_{m-1/2})(u_m^n - u_{m-1}^n)]. \end{aligned}$$

Тогда получим следующее дискретное уравнение

$$u_m^{n+1} - \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2} A^{(n+1)} = u_m^n + \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2} A^{(n)},$$

которое может быть записано в следующем виде

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2} B_{n+1} \right) X^{n+1} &= \\ = \left(I + \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2} B_n \right) X^n + \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2} (F^{n+1} + F^n), \end{aligned} \quad (5)$$

где B_n — симметричная трехдиагональная матрица, состоящая из коэффициентов κ , размером $(M-1) \times (M-1)$. Вектор решений X^n и силовой вектор F^n имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X^n &= (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{M-1}^n)^T, \\ F^n &= (\kappa_{-1/2}^n u_a, 0, \dots, 0)^T. \end{aligned}$$

Для решения системы (5) использовался метод прогонки.

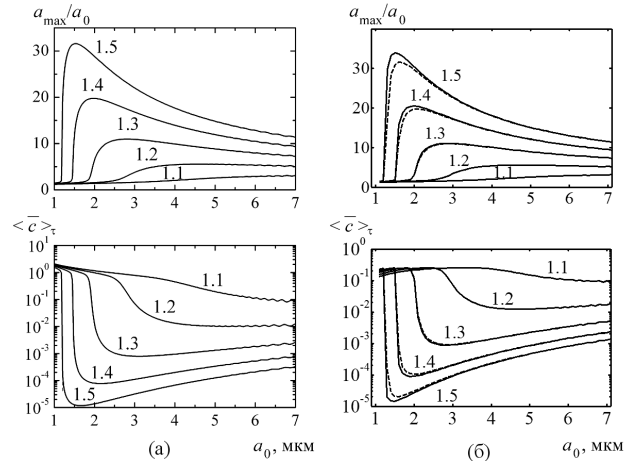


Рис. 1. Нормированный радиус одиночного газового пузырька a_{\max}/a_0 (сверху); осредненная концентрация газа около стенки пузырька $\langle \bar{c} \rangle_\tau$ (внизу) в зависимости от начального радиуса пузырька a_0 для различных амплитуд давления $\Delta P = 1.1 \div 1.5 \cdot 10^5$ Па. Результаты получены (а) в работе [4] и (б) в настоящей работе (сплошные линии — для кривых с учетом изменения массы газа на 20-м периоде колебания пузырька; штриховые линии — для кривых без учета изменения массы газа)

4. Результаты численного моделирования

Для проверки правильности вычислений в задаче о динамике одиночного газового пузырька авторами данной работы использовалась работа [3], поэтому результаты получены для пузырьков газа в воде при температуре 20°C и при следующих значениях параметров: $\gamma = 1.4$, $\sigma = 0.0725$ Н/м, $p_0 = 10^5$ Па, $C = 1500$ м/с, частота $\omega = 2\pi \cdot 20$ кГц. Получено хорошее соответствие с данными, опубликованными в работе [3], а также при сравнении результатов вычислений со встроенной процедурой Matlab для решения систем ОДУ. Для вычисления динамики пузырька в кластере использовались также следующие параметры: $R_0 = 10^{-3}$ м, $N = 10^4$.

На рис. 1 представлено сравнение результатов расчетов в случае одиночного газового пузырька с аналогичными результатами, полученными в работе [4], где применялась аппроксимационная теория для колебаний пузырька с большой амплитудой и для больших чисел Пекле. Верхние графики показывают нормированный радиус пузырька a_{\max}/a_0 , а нижние — кривые осредненной концентрации газа около стенки пузырька $\langle \bar{c} \rangle_\tau$ для различных амплитуд управляющего давления $\Delta P = 1.1 \div 1.5 \cdot 10^5$ Па. Рис. 1(б) позволяет сравнить решения, полученные

с помощью представленного в данной работе численного метода, с результатами работы [4], полученными по аппроксимационной модели, которая была предложена в работе [3] (рис. 1(а)). Видно, что характер кривых для осредненной газовой концентрации, полученных в настоящей работе, отличается от кривых, полученных в [4], особенно для малых начальных размеров пузырька. Действительно, на нижнем графике рис. 1(б) осредненная концентрация растет при малых a_0 , в то время как для подобных кривых на рис. 1(а) она уменьшается. Кроме того значения осредненной концентрации в первом и во втором случае отличаются на один порядок.

Кроме того на рис. 1(б) показано как учет изменения массы за счет диффузии в уравнении (1) влияет на динамику системы. Результаты представлены для 20-го периода колебания пузырька: сплошная линия — с учетом массы, штриховая — без учета массы. Видно, что уже для $\Delta P = 1.4 \cdot 10^5$ Па в окрестности максимума для максимального радиуса пузырька (минимума — для осредненной газовой концентрации) влияние массы становится заметным, причем, чем выше ΔP , тем больше масса влияет на характер кривых. При дальнейших расчетах учет массы начнет сказываться и для меньших значений амплитуд давления.

На рис. 2 представлено аналогичное рис. 1 сравнение результатов для пузырька в монодисперсном кластере, при этом расчеты по аппроксимационной модели брались из работы [5]. Выводы, представленные выше для одиночного пузырька, можно сделать и для случая пузырька в кластере, с той разницей, что поскольку максимальный отклик радиуса пузырька в кластере ниже, чем у одиночного пузырька, то масса начинает «проявляться» при расчете значительно большего числа периодов колебаний пузырька. На рис. 2(б) результаты показаны для 90-го периода колебания.

5. Оптимизация и распараллеливание

Параметрическое исследование задачи требует обработки большого числа различных параметров системы, меняющихся в различных диапазонах значений. Это приводит к десяткам и даже сотням запусков программы с определенными параметрами, так что приобретают значение алгоритмы оптимизации и распараллеливания. Были определены и оптимизированы наиболее «медленные» места в коде, что привело к ускорению последовательной работы программы в 60 раз. Так как моделирование динамики пузырька для различных параметров может быть выполнено отдельно, код легко распараллеливается по независимым циклам.

На рис. 3 показано время работы программы

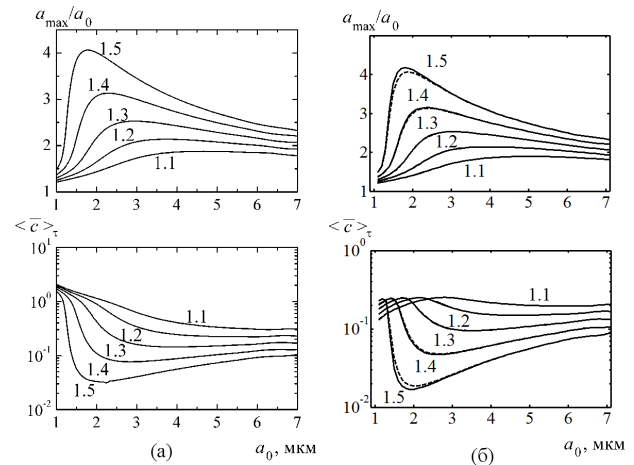


Рис. 2. Нормированный радиус газового пузырька в монодисперсном кластере a_{\max}/a_0 (сверху); осредненная концентрация газа около стенки пузырька $\langle \bar{c} \rangle_t$ (внизу) в зависимости от начального радиуса пузырька a_0 для различных амплитуд давления $\Delta P = 1.1 \div 1.5 \cdot 10^5$ Па. Результаты получены (а) в работе [5] и (б) в настоящей работе (сплошные линии — для кривых с учетом изменения массы газа на 90-м периоде колебания пузырька; штриховые линии — для кривых без учета изменения массы газа)

в зависимости от числа точек по пространству на различном числе ядер. Как и ожидалось, программа показывает хорошую масштабируемость по мере увеличения количества рабочих потоков. Производительность измерялась на системе с 12 ядрами Intel Xeon 5660 2.8 GHz.

6. Заключение

В данной работе решается задача диффузии газа между сферически-симметричным газовым пузырьком и жидкостью в изотропном акустическом поле. Задача решается как для одиночного пузырька, так и для пузырька в монодисперсном кластере. Разработан численный метод решения диффузионной задачи, проведены численные эксперименты для различных амплитуд акустического поля для осциллирующей части диффузионной задачи. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных по аппроксимационной теории, и с помощью численного метода, представленного в данной работе. Исследовано как сильно влияет учет изменения массы при расчете динамики пузырька.

Показано, что аппроксимационные теории хорошо описывают случаи малой амплитуды управляющего давления и пузырьков относительно больших размеров. В случае пузырьков малых началь-

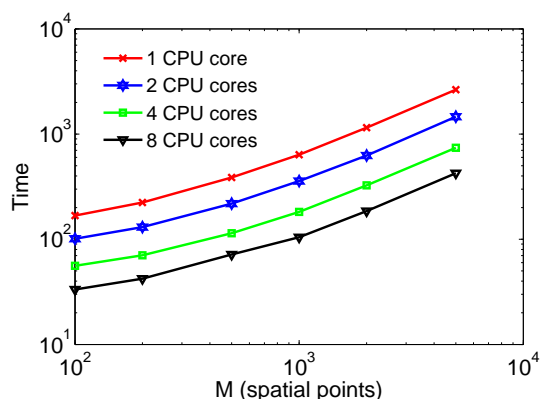


Рис. 3. Время выполнения программы в зависимости от числа точек на 8, 4, 2 и 1 ядрах CPU

ных радиусов и/или колебаний пузырьков при высоких амплитудах акустического поля численное решение может существенно отличаться от асимптотических решений. В таких случаях необходимо решать полную диффузионную задачу. Для этого может быть полезен метод, разработанный в данной работе.

Кроме того было установлено, что изменение массы пузырька за счет диффузии может существенным образом сказываться на давлении газа в пузырьке, следовательно, это изменение должно быть учтено при исследовании динамики пузырька. Показано, что изменение массы в пузырьке, который находится в кластере, начинает влиять на его динамику через значительно больший промежуток времени, чем на динамику одиночного пузырька того же радиуса при той же амплитуде акустического поля.

Последовательный код программы оптимизирован, получено ускорение в 60 раз. Проведена па-

раллелизация алгоритма на CPU с использованием многоядерного процессора Intel Xeon 5660, 2.8 GHz.

Авторы выражают благодарность за помощь при постановке задачи и ценные замечания Гумерову Н.А.

Список литературы

- [1] Barber B.P., Putterman S.J. Observation of synchronous picosecond sonoluminescence // *Nature* (London). 1991. Vol. 352. P. 318–320.
- [2] Gaitan D.F., Crum C.C., Church C.C., Roy R.A. Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable, cavitation bubble // *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. Vol. 91. P. 3166–3183.
- [3] Fyrrillas M.M., Szeri A.J. Dissolution or growth of soluble spherical bubble // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 277. P. 381–407.
- [4] Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.-D., Parlitz U., Lauterborn W. The Role of Surface Tension in Stable Single-Bubble Sonoluminescence // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 2. P. 227–230.
- [5] Насибуллаева Э.Ш., Ахатов И.Ш. Исследование диффузионной устойчивости пузырьков в кластере // *ПМТФ*. 2007. Т. 48, № 4. С. 40–48.
- [6] Keller J.B., Miksis M. Bubble oscillations of large amplitude // *J. Acoust. Soc. Am.* 1980. Vol. 68, № 2. P. 628–633.
- [7] Насибуллаева Э.Ш., Ахатов И.Ш. Динамика пузырькового кластера в акустическом поле // *Акуст. ж.* 2005. Т. 51, № 6. С. 709–717.
- [8] Хайрер Э., Нчрсет С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.