МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 534.1

Корректные по Тихонову задачи идентификации условий закрепления механических систем[1]

Ахтямов А.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа,
Башкирский государственный университет, Уфа

Рассматривается задача идентификации условий закрепления распределенных механических систем по трем собственным частотам их колебаний. На основе условия Плюккера, возникающего при восстановлении матрицы по ее минорам максимального порядка, построено множество корректности задачи и доказана ее корректность по А.Н. Тихонову. Для широкого класса задач найдено явное решение задачи идентификации матрицы краевых условий, выписанное в терминах характеристического определителя соответствующей спектральной задачи. Приведены пример решения конкретной задачи из механики, а также контрпример, показывающий, что двух собственных частот вообще говоря недостаточно для единственности идентификации краевых условий.

1. Введение

При решении задач диагностики состояния технических систем в прикладных исследованиях важную роль играет определение условий закрепления элементов и деталей конструкций и механизмов. Как показано в $[1, 2]$ проблема восстановления краевых условий, соответствующих виду закрепления, может быть сведена к задаче идентификации миноров максимального порядка матрицы краевых условий. Эта задача не является корректной по Адамару, так как любые числа не могут быть минорами матрицы (для того чтобы некоторые числа были минорами матрицы требуется выполнение так называемых условий Плюккера).

В настоящей статье решена задача отыскания вида и параметров закрепления одного из концов стержня, на другом конце которого реализуется свободное опирание. Ранее эта задача не решалась. В отличие от уже решенных задач идентификации краевых условий предлагаемый метод предоставляет не только алгоритм, но и дает явное решение задачи. Кроме того, изложение задачи проведено в общих обозначениях, годных для решения широкого круга задач. Оно годится и для идентификации условий закрепления обоих контуров кольцевой мембраны, и для идентификации одного из концов балки, и для идентификации закрепления круговой пластины, и для идентификации условий закрепления одного из концов трубопровода, и для идентификации условий закрепления других распределенных механических систем [2].

Общим для всех этих задач является то, что в них требуется найти матрицу краевых условий

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

с точностью до линейных преобразований строк [2], и то, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$, с помощью которого находятся собственные частоты, во всех этих случаях имеет следующий вид $[2, 3]$:

$$\begin{gathered}\Delta(\lambda) = M_{12} f_{12}(\lambda) + M_{13} f_{13}(\lambda) + \\ + M_{24} f_{24}(\lambda) + M_{34} f_{34}(\lambda),\end{gathered} \tag{2}$$

где через M_{ij} обозначены миноры, составленные из i-го и j-го столбцов матрицы A, а через $f_{ij}(\lambda)$ — функции от спектрального параметра λ, значения которых зависят от фундаментальной системы решений соответствующего дифференциального уравнения спектральной задачи и известных краевых условий.

Так, например, функции $f_{ij}(\lambda)$ в характеристическом определителе (2) для задачи об идентификации вида и параметров одного из концов единичного однородного стержня, другой конец которого заделан, имеют вид [2]:

$$f_{12}(\lambda) = 1 - \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и АН Республики Башкортостан (гранты 11-01-97002-р_поволжье_а и 11-01-12005-офи-м-2011).

$$f_{13}(\lambda) = -\sin\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda + \cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda,$$
$$f_{24}(\lambda) = -\sin\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda - \cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda,$$
$$f_{34}(\lambda) = 1 + \cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda.$$

Функции $f_{ij}(\lambda)$ для задачи идентификации условий закрепления на внешнем и внутреннем контурах кольцевой мембраны имеют вид [2]:

$$f_{12}(\lambda) = \lambda^2\big(J_1(\lambda a)Y_1(\lambda b) - J_1(\lambda b)Y_1(\lambda a)\big),$$
$$f_{13}(\lambda) = -\lambda\big(J_1(\lambda a)Y_0(\lambda b) - J_0(\lambda b)Y_1(\lambda a)\big),$$
$$f_{23}(\lambda) = -\lambda\big(J_0(\lambda a)Y_1(\lambda b) - J_1(\lambda b)Y_0(\lambda a)\big),$$
$$f_{34}(\lambda) = J_0(\lambda a)Y_0(\lambda b) - J_0(\lambda b)Y_0(\lambda a),$$

где a и b — соответственно внутренний и внешний радиусы контуров; J_i и Y_j — стандартные обозначения для цилиндрических функций.

Как правило, функции $f_{ij}(\lambda)$ в характеристическом определителе (2) являются целыми (это следует из аналитичности по параметру линейно независимых решений соответствующего дифференциального уравнения [3]).

Задачу идентификации краевых условий по собственным частотам для этих и других упомянутых выше механических систем, в терминах функции (2) можно сформулировать следующим образом: *коэффициенты a_{ij} матрицы A неизвестны; ранг матрицы A равен двум; известны корни λ_k характеристического определителя (2) и то, что все функции $f_{ij}(\lambda)$ являются целыми по параметру λ. Требуется идентифицировать матрицу A с точностью до линейных преобразований строк.*

Отыскание приближенного решения задачи разбивается на два этапа [2]. На первом этапе находят приближенные значения миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} матрицы A. На втором этапе по этим приближенным значениям находят саму матрицу A с точностью до линейных преобразований ее строк.

Известно, что произвольные числа M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} не могут быть минорами матрицы A. Для того чтобы они были минорами матрицы A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось так называемое условие Плюккера [4]:

$$M_{12}M_{34} - M_{13}M_{24} = 0. \tag{3}$$

Поэтому задача второго этапа — отыскание матрицы A с точностью до линейных преобразований строк по приближенным значениям миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} — некорректна по Адамару.

2. Условие Плюккера и множество корректности

Условия Плюккера возникают при отыскании рангового подпространства по своему направляющему бивектору (см. [4]). Их можно также интерпретировать в терминах проективной геометрии как условия, возникающие при отыскании проективной прямой по координатам Плюккера, а также в терминах грассмановой алгебры как плюккеровы условия простоты грассманового агрегата [5]. Однако нам представляется более правильным не прибегать к дополнительной терминологии. В настоящей статье предлагается другой подход к условиям Плюккера, как к условиям, возникающим при восстановлении (с точностью до линейных преобразований строк) матрицы по ее минорам максимального порядка. При этом, новым является запись искомой матрицы непосредственно с помощью миноров, а не через систему уравнений, как это делается обычно. Такой подход делает условие Плюккера более наглядным и позволяет предъявить явное решение задачи отыскания краевых условий.

Нетрудно доказать следующие теоремы:

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\mathrm{rank} A = 2$. *Чтобы матрицу*

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} \widetilde{a}_{11} & 0 & 0 & \widetilde{a}_{14} \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} & 0 \end{Vmatrix}$$

можно было получить из матрицы A с помощью линейного преобразования строк необходимо и достаточно, чтобы наборы миноров второго порядка этих матриц совпадали с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов:

$$(\widetilde{M}_{12}, \widetilde{M}_{13}, \widetilde{M}_{24}, \widetilde{M}_{34}) = C(M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}), \tag{4}$$

где $C \neq 0$.

Если $M_{12} \neq 0$, то матрица A с помощью линейного преобразования строк сводится к следующей матрице

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{M_{24}}{M_{12}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Обратим внимание, что в записи матрицы $\widetilde{A}$ не используется минор M_{34}. И его можно вычислить. Из представления (5) следует, что минор $\widetilde{M}_{12}$ матрицы $\widetilde{A}$ равен M_{12}. Тогда из теоремы 1 получаем, что $C = 1$ и

$$\widetilde{M}_{34} = M_{34} = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{M_{24}}{M_{12}} \\ M_{13} & 0 \end{vmatrix} = \frac{M_{24}M_{13}}{M_{12}}.$$

А это значит, что если $M_{12}M_{34} \neq M_{24}M_{13}$, то восстановить матрицу по данным минорам невозможно, так как таковой не существует.

Условие $M_{12} \neq 0$ не является существенным. К такому же неравенству придем, когда отличен от нуля другой минор второго порядка матрицы A.

Отсюда вытекает

Т е о р е м а 2 (условие Плюккера). *Для того чтобы набор чисел* M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} *являлся набором миноров матрицы (1) ранга 2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3), называемое условием Плюккера.*

Из доказанных теорем следует что, если выполняется условие Плюккера (3) и $M_{12} \neq 0$, то (5) представляет явное решение задачи восстановления матрицы A по ее минорам M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}. Аналогично можно выписать явные решения, когда выполняется условие Плюккера (3) и известно, что какой-либо другой из миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} отличен от нуля.

3. Корректность по А.Н. Тихонову поставленной задачи

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 являются собственными значениями соответствующей характеристическому определителю (2) краевой задачи. Подставив эти три значения в (2), получим систему трех уравнений для отыскания четырех миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} матрицы A:

$$\left.\begin{array}{l} M_{12}f_{12}^1 + M_{13}f_{13}^1 + M_{24}f_{24}^1 + M_{34}f_{34}^1 = 0, \\ M_{12}f_{12}^2 + M_{13}f_{13}^2 + M_{24}f_{24}^2 + M_{34}f_{34}^2 = 0, \\ M_{12}f_{12}^3 + M_{13}f_{13}^3 + M_{24}f_{24}^3 + M_{34}f_{34}^3 = 0, \end{array}\right\} \quad (6)$$

где через f_{ij}^k обозначены значения функций $f_{ij}(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

Известно [2], что если матрица

$$F = \left\| \begin{array}{cccc} f_{12}^1 & f_{13}^1 & f_{24}^1 & f_{34}^1 \\ f_{12}^2 & f_{13}^2 & f_{24}^2 & f_{34}^2 \\ f_{12}^3 & f_{13}^3 & f_{24}^3 & f_{34}^3 \end{array} \right\| \quad (7)$$

системы уравнений (6) имеет ранг 3, то из этой системы уравнений набор миноров M_{ij} матрицы A находится однозначно с точностью до ненулевого коэффициента, не зависящего от индексов. По которому и можно найти матрицу A с точностью до линейных преобразований ее строк. Эта задача является корректной по А.Н. Тихонову.

Действительно, для подхода А.Н. Тихонова к вопросу корректности характерно, что рассматривается некоторое множество $M \subset V$, существенно более узкое, чем все пространство V. Пусть образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т.е. $\Lambda = RM$.

Задача $Rv = z$ называется *корректной по А.Н. Тихонову* (условно корректной), если выполнены следующие условия [6]: 1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству M пространства V; 2) решение единственно на множестве M; 3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z, \widetilde{z} \in \Lambda = RM$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_Z < \delta$ выполнено неравенство $\|v - \widetilde{v}\|_V < \varepsilon$.

В нашем случае под оператором R можно понимать отображение, задаваемое системой уравнений (6), и переводящее набор четырех миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} в тройку значений λ_1, λ_2, λ_3.

Напомним, из теоремы 1 вытекает, что получение матрицы A с точностью линейных преобразований строк эквивалентно отысканию наборов четырех миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34} с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов. Таким образом, решением задачи является бесконечное множество миноров M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34}. Поэтому, чтобы говорить о единственности решения на множестве корректности, необходимо каким-либо способом факторизовать множество миноров. Введем для этого норму

$$\|\cdot\| = \max(|M_{12}|, |M_{13}|, |M_{24}|, |M_{34}|). \quad (8)$$

Будем называть *множеством корректности* M такой набор миноров $v = (M_{12}, M_{13}, M_{24}, M_{34})$, для которого выполнены два условия:

1) условие Плюккера (3);

2) условие принадлежности v единичной сфере:

$$\|v\| = \max(|M_{12}|, |M_{13}|, |M_{24}|, |M_{34}|) = 1.$$

Из определения вытекает, что M является компактом.

С помощью введенного множества корректности нетрудно показать корректность по А.Н. Тихонову задачи отыскания миноров матрицы A по значениям λ_1, λ_2, λ_3, для которых система уравнений (6) имеет ранг 3.

Пусть V — это пространство $\mathbb{R}^4$ элементов $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ с нормой $\|v\| = \max(|v_1|, |v_2|, |v_3|, |v_4|)$; Z — это пространство $\mathbb{R}^3$ элементов $z = (z_1, z_2, z_3)$ с нормой $\|z\| = \max(|z_1|, |z_2|, |z_3|)$, образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т.е. $\Lambda = RM$.

Тогда задача $Rv = z$ будет *корректной по А.Н. Тихонову*, так как все три условия определения выполнены (третье условие вытекает из непрерывной дифференцируемости $f_{ij}(\lambda)$ по λ; подробнее см. следующий пункт).

4. Метод отбрасывания четвертого минора

Наиболее известны два метода решения корректных по А.Н. Тихонову задач — метод квазирешения и метод подбора

По сути метод, применяемый в настоящей статье, — это метод подбора. При применении этого метода использована идея записи матрицы A в терминах матрицы F. В отличие от ранее решенных задач, такой подход позволяет найти не просто алгоритм решения, а предъявить явное решение задачи идентификации, которое годится для широкого класса задач.

Метод основан на том, что уравнения (6) являются уравнениями гиперплоскостей в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$. Если $\mathrm{rank} F = 3$, то система уравнений (6) определяет прямую в четырехмерном пространстве, проходящую через начало координат. Известно, что направляющий вектор данной прямой, можно найти по формуле: $\mathbf{a} = (F_{12}, -F_{13}, F_{24}, -F_{34})$, где F_{ij} — минор матрицы F, получаемый вычеркиванием столбца с элементами f_{ij}^k $(k = 1, 2, 3)$. Поэтому эту прямую можно определить следующим параметрическим уравнением:

$$\begin{gathered} M_{12} = F_{12} t, \quad M_{13} = -F_{13} t, \quad M_{24} = F_{24} t, \\ M_{34} = -F_{34} t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{9}$$

Но миноры матрицы A связаны соотношением Плюккера (3). А значит, от матрицы F следует требовать соотношения:

$$F_{12} F_{34} - F_{13} F_{24} = 0. \tag{10}$$

Если данное соотношение не выполняется, то найденные числа M_{ij} не являются минорами матрицы A.

Если априори известно, что искомая матрица A существует, все F_{ij} найдены точно и $F_{12} \neq 0$, то условия (10) выполнены, $M_{12} \neq 0$, а сама матрица A имеет вид (5). Если дополнительно известно, что F_{12} является наибольшим по модулю минором третьего порядка матрицы F, то из (9) получаем, что M_{12} является наибольшим по модулю минором матрицы A, а сама матрица A с точностью до линейных преобразований строк может быть записана следующим образом:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{F_{24}}{F_{12}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{F_{13}}{F_{12}} & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{11}$$

причем ее миноры лежат в множестве корректности M. Все условия корректности по А.Н. Тихонову выполнены, в том числе и третье. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\widetilde{z} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_3) \in \Lambda = RM$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_{\mathbb{R}^3} < \delta$ выполнено неравенство $\|(F_{12}, F_{13}, F_{24}, F_{34}) - (\widetilde{F}_{12}, \widetilde{F}_{13}, \widetilde{F}_{24}, \widetilde{F}_{34})\|_{\mathbb{R}^4} < \varepsilon$. Последнее вытекает из аналитичности (а значит, и непрерывности) функций $f_{ij}(\lambda)$ по параметру λ.

Если числа λ_1, λ_2, λ_3, а значит и F_{ij} даны приближенно, то равенство (10) может не выполняться и поэтому формально по минорам F_{ij} матрицу A построить невозможно. Однако в записи (11) для матрицы A не используется минор F_{34}, поэтому его значение нам фактически не нужно. Если F_{12} является наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F, то матрицу (11) можно считать приближенным решением задачи идентификации матрицы A. Причем, как следует из вышеизложенного, чем ближе числа λ_1, λ_2, λ_3 к точным, тем ближе к точным значениям и элементы матрицы A.

Аналогично выписываются явные приближенные решения матрицы A в случаях, если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является не F_{12}, а другой минор матрицы A.

Так, если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{13}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{F_{34}}{F_{13}} \\ 0 & -\dfrac{F_{12}}{F_{13}} & 1 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{12}$$

Если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{24}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{F_{12}}{F_{24}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{F_{34}}{F_{24}} & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{13}$$

Если же наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является минор F_{34}, то явным приближенным решением будет матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{F_{13}}{F_{34}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{F_{24}}{F_{34}} & 1 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{14}$$

Таким образом, верна следующая

Т е о р е м а 3. *Если λ_1, λ_2, λ_3 являются собственными значениями соответствующей уравнению (2) краевой задачи,* $\mathrm{rank} F = 3$, *то задача отыскания матрицы A по собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3 является корректной по А.Н. Тихонову, где множеством корректности решения этой задачи является компакт M, определенный выше. Решение задачи представляет собой одну из матриц (11)–(14) в зависимости от того, какой из миноров F_{ij} матрицы F является наибольшим по модулю.*

5. Идентификация закрепления стержня на левом конце, в случае когда на правом конце реализуется свободное опирание

Задача об изгибных колебаниях однородного стержня со свободной опорой на правом конце заменой $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$ сводится (см., например, [7], [8]) к следующей спектральной задаче:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \tag{15}$$

$$U_1(y) = a_{11}y'''(0) + a_{14}y(0) = 0, \tag{16}$$

$$U_2(y) = a_{22}y''(0) + a_{23}y'(0) = 0, \tag{17}$$

$$y(1) = 0, \quad y''(1) = 0, \tag{18}$$

где λ — спектральный параметр; $U_i(y,\lambda)$ $(i = 1,2)$ — линейные формы, характеризующие закрепление в точке $x = 0$ (заделка, свободное опирание, свободный край, плавающая заделка, упругое закрепление) и параметры упругого закрепления.

Характеристическим определителем задачи (15)–(18) при $\lambda \neq 0$ является функция (2), где

$$\begin{gathered} f_{12}(\lambda) = 2\lambda^7(\sin\lambda\operatorname{ch}\lambda - \cos\lambda\operatorname{sh}\lambda), \\ f_{13}(\lambda) = 4\lambda^6\cos\lambda\operatorname{ch}\lambda, \\ f_{24}(\lambda) = 4\lambda^4\sin\lambda\operatorname{sh}\lambda, \\ f_{34}(\lambda) = 2\lambda^3(\sin\lambda\operatorname{ch}\lambda - \cos\lambda\operatorname{sh}\lambda). \end{gathered} \tag{19}$$

П р и м е р. Пусть $\lambda_1 = 3,94318165$, $\lambda_2 = 7,07141876$, $\lambda_3 = 10,2111163$. Подставив эти значения в (19) и вычислив $f_{ij}^k = f_{ij}(\lambda_k)$, получим матрицу (7) и ее миноры:

$$\begin{gathered} F_{12} = -6026281887095148615,4; \\ F_{13} = -5955836459945,5; \\ F_{24} = 6025953477415493431,3; \\ F_{34} = -57567010136146305,4. \end{gathered}$$

Так как наибольшим по модулю минором является F_{12}, то в качестве явного решения для матрицы A выбираем (11):

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{F_{24}}{F_{12}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{F_{13}}{F_{12}} & 0 \end{array} \right\| \approx \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Это означает, что искомые краевые условия имеют вид: $y'''(0)+y(0) = 0$, $y''(0) = 0$, т.е. на левом конце стержня реализуется упругое опирание с относительным коэффициентом жесткости пружины равным 1.

К о н т р п р и м е р. Покажем, что в случае, если ранг матрицы F равен 2 или вместо трех собственных частот используются только две из них, то корректность по А.Н. Тихонову задачи идентификации краевых условий может нарушиться.

Пусть λ_1, λ_2 — два различных корня уравнения

$$\sin\lambda\operatorname{ch}\lambda - \cos\lambda\operatorname{sh}\lambda = 0.$$

Тогда $f_{12}(\lambda_i) = f_{34}(\lambda_i) = 0$, $i = 1,2$; $\operatorname{rank}F = 2$.

Получаем две матрицы A краевых условий:

$$A_1 = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad A_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Следовательно, если $\operatorname{rank}F = 2$, то единственности решения поставленной задачи на множестве корректности может и не быть. А значит, и корректности по А.Н. Тихонову в этом случае не будет.

6. Заключение

В работе исследована задача идентификации вида и параметров закрепления распределенной механической системы по трем собственным частотам. Найдены условия, при которых она корректна по А.Н. Тихонову. Предъявлено явное решение в терминах матрицы (7). Решение представляет собой одну из матриц (11)–(14) в зависимости от того, какой из миноров F_{ij} матрицы (7) является наибольшим по модулю.

Список литературы

[1] Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V. Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Problems in Science and Engineering. 2004. Vol. 12, №. 4. P. 393–408.

[2] Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.

[3] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

[4] Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979. 312 с.

[5] Фиников С.П. Теория пар конгруэнций. М.: Гостехиздат, 1956. 443 с.

[6] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.

[7] Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

[8] Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.