МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ 2012

УДК 532.5.031

Определение потенциала скорости жидкости со слабонесферическими пузырьками, находящимися на одной прямой [1]

Аганин А.А., Давлетшин А.И.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань

Исследуется работоспособность метода отражений и метода разложения по сферическим функциям при определении потенциала скорости жидкости с двумя и более слабонесферическими пузырьками. Центры пузырьков находятся на одной прямой, которая является осью симметрии задачи.

1. Введение

Интерес к изучению динамики газовых пузырьков в жидкости связан с широким использованием жидкостей в различных отраслях народного хозяйства: энергетике, химии, медицине и др. При больших концентрациях пузырьков значительную роль начинает играть их взаимодействие.

При изучении взаимодействия пузырьков в жидкости аналитико-численными методами возникает подзадача определения потенциала скорости жидкости. Обычно потенциал ищется в предположении, что пузырьки расположены относительно далеко друг от друга [1, 2]. В результате этого задача определения потенциала значительно упрощается. Исключение составляет лишь самый простой случай взаимодействия двух сферических пузырьков. Для этого случая имеется точное решение [3,4], полученное методом отражений [5]. Оно справедливо при любых расстояниях между пузырьками, в том числе и при их касании (во всей области жидкости за исключением точки касания пузырьков). Сравнительно недавно в работе [6] была предложена математическая модель взаимодействия произвольного количества произвольно близко расположенных в одну линию слабонесферических пузырьков. Она основана на представлении потенциала скорости жидкости в виде ряда по сферическим функциям. Нетрудно заметить, что сходимость рядов по сферическим функциям по мере сближения пузырьков ухудшается. Поэтому реальная область применимости модели [6] по минимальному расстоянию между взаимодействующими пузырьками ограничена возможностями современных компьютеров.

Настоящая работа посвящена исследованию работоспособности двух методов определения потенциала скорости (метода отражений [3, 4] и метода разложения по сферическим функциям [6, 7]) в задачах взаимодействия в жидкости двух и более слабонесферических пузырьков, расположенных на одной прямой. Для этого метод отражений обобщается на случай произвольного количества слабонесферических пузырьков, поверхности которых находятся в фазе перехода через сферу.

2. Математическая модель

2.1. Постановка задачи

В жидкости имеется K пузырьков с центрами на оси z, которая является осью симметрии задачи. Пузырьки могут радиально пульсировать, перемещаться в пространстве вдоль оси симметрии и испытывать малые осесимметричные деформации.

Потенциал скорости жидкости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Phi = 0$$

и граничному условию на поверхности каждого пузырька

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \nabla\Phi \cdot \nabla F_i = 0, \qquad (1)$$

где $i = 1, 2, ..., K$; $F_i = 0$ — уравнение поверхности i-го пузырька; t —время.

В рассматриваемом в настоящей работе случае малых осесимметричных деформаций уравнение поверхности i-го пузырька можно записать в следующем виде

[1] Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке РФФИ.

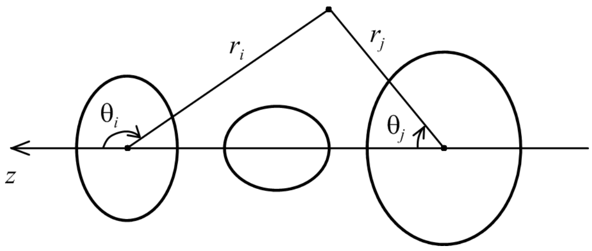

Рис. 1. Системы отсчета, применяемые при определении потенциала методом разложения по сферическим функциям

$$F(r_i,\theta_i,t) = r_i - R_i(t) - \sum_{n=2}^{N} a_{ni}(t)\,P_{ni} = 0, \qquad (2)$$

где r_i, θ_i — радиальная и широтная координаты сферической системы отсчета с началом в центре i-го пузырька (рис. 1); R_i — радиус пузырька; N — число гармоник, используемых в представлении поверхности пузырька; $P_{ni} = P_n(\cos\theta_i)$ — полином Лежандра степени n; a_{ni} — амплитуда отклонения поверхности i-го пузырька от сферической формы $r_i = R_i$ в виде поверхностной гармоники P_{ni}. Относительную амплитуду отклонения $\varepsilon_{ni} = a_{ni}/R_i$ будем называть также искажением сферической формы пузырька. В настоящей работе искажения сферической формы пузырьков ε_{ni} предполагаются малыми настолько, что степенями ε^2 и выше по сравнению с 1 можно пренебречь ($\varepsilon^2 \ll 1$), где $\varepsilon = \max\limits_{n,i}|\varepsilon_{ni}|$.

2.2. Определение потенциала методом разложения по сферическим функциям

В методе разложения по сферическим функциям [6, 7] потенциал скорости жидкости Φ в сферической системе координат i-го пузырька (рис. 1) представляется в следующем виде

$$\Phi(r_i,\theta_i,t) = \sum_{\gamma=0}^{\infty}\left[\frac{B_{\gamma i}(t)}{r_i^{\gamma+1}} + \bar{B}_{\gamma i}(t)\,r_i^{\gamma}\right]P_{\gamma i}, \qquad (3)$$

где

$$\bar{B}_{\gamma i} = \sum_{j=1,j\neq i}^{K}\sum_{\varsigma=0}^{\infty}\frac{C_{\varsigma\gamma}B_{\varsigma j}}{s_{ij}d_{ij}^{\varsigma+\gamma+1}},$$

$C_{\varsigma\gamma} = (-1)^{\gamma}(\gamma+\varsigma)!/(\gamma!\,\varsigma!)$, $d_{ij} = z_i - z_j$, z_i — координата центра i-го пузырька, $s_{ij} = 1$ при $z_i > z_j$, $s_{ij} = -1$ при $z_i < z_j$, $i,j = 1,2,...,K$ $(i \neq j)$.

Подстановкой выражения поверхности пузырьков (2) и выражения потенциала (3) в граничные условия (1) получается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов потенциала $B_{\gamma i}$, которую с учетом того, что $\varepsilon^2 \ll 1$, можно записать в следующем виде

$$\begin{gathered}\frac{B_{\gamma i}}{R_i^{\gamma+2}}\left[(\gamma+1)\,\delta_\varrho^\gamma - \bar{\Theta}_{m\gamma\varrho}^{\gamma+1,\gamma+2}\varepsilon_{mi}\right] \\ -\bar{B}_{\gamma i}R_i^{\gamma-1}\left(\gamma\delta_\varrho^\gamma + \bar{\Theta}_{m\gamma\varrho}^{\gamma,\gamma-1}\varepsilon_{mi}\right) = \\ = -\dot{R}_i\left(\delta_\varrho^0 + \delta_\varrho^m\varepsilon_{mi}\right) - \\ -\dot{z}_i\left(\delta_\varrho^1 - \beta_{1m\varrho}\varepsilon_{mi}\right) - \delta_\varrho^m R_i\dot{\varepsilon}_{mi},\end{gathered} \qquad (4)$$

где точка сверху означает дифференцирование по времени; $\varrho = 0,1,\ldots$; δ_ϱ^γ — символ Кронекера; $\bar{\Theta}_{\gamma\varsigma\varrho}^{n,m} = nm\alpha_{\gamma\varsigma\varrho} - \beta_{\gamma\varsigma\varrho}$; $\beta_{\gamma\varsigma\varrho} = 0.5\left[\gamma(\gamma+1) + \varsigma(\varsigma+1) - \varrho(\varrho+1)\right]\alpha_{\gamma\varsigma\varrho}$; $\alpha_{\gamma\varsigma\varrho} = \dfrac{2\varrho+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} P_{\gamma i}P_{\varsigma i}P_{\varrho i}\,d\cos\theta_i$.

Решение системы (4) ищется в виде суммы $B_{\gamma i} = B_{\gamma i}^{(0)} + B_{\gamma i}^{(1)}$, где $B_{\gamma i}^{(0)}$ и $B_{\gamma i}^{(1)}$ — нулевое и первое приближения относительно малого параметра ε. В силу того, что для любой пары пузырьков $\delta = \max\limits_{i,j}\left[(R_i + R_j)/d_{ij}\right] < 1$, решения $B_{\gamma i}^{(0)}$ и $B_{\gamma i}^{(1)}$ довольно легко находятся методом последовательных приближений. Его применение приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered}\bar{B}_{\varrho i}^{(0,0)} = \bar{B}_{\varrho i}^{(1,0)} = 0,\ \varrho \geq 0;\ B_{\varrho i}^{(0,0)} = 0,\ \varrho \geq 2; \\ \bar{B}_{\varrho i}^{(0,k)} = B_{\varrho i}^{(0,k)} = \bar{B}_{\varrho i}^{(1,k)} = 0,\ \varrho \geq k+1; \\ B_{\varrho i}^{(1,0)} = 0,\ \varrho \geq N+2;\ B_{\varrho i}^{(1,k)} = 0,\ \varrho \geq N+k+1; \\ B_{0i}^{(0,0)} = -R_i^2\dot{R}_i;\ B_{1i}^{(0,0)} = -R_i^3\dot{z}_i/2; \\ B_{\varrho i}^{(1,0)} = -R_i^{\varrho+2}\sum_{m=2}^{N}\Big(\delta_\varrho^m R_i\dot{\varepsilon}_{mi} + 3\delta_\varrho^m\dot{R}_i\varepsilon_{mi} + \\ +1.5\bar{\Theta}_{1m\varrho}^{1,2}\dot{z}_i\varepsilon_{mi}\Big)/(\varrho+1),\ 0 \leq \varrho \leq N+1; \\ \bar{B}_{\varrho i}^{(0,k)} = \sum_{j=1,j\neq i}^{K}\sum_{\gamma=0}^{k-1}\frac{C_{\gamma\varrho}B_{\gamma j}^{(0,k-1)}}{s_{ij}d_{ij}^{\gamma+\varrho+1}},\ 0 \leq \varrho \leq k; \\ B_{\varrho i}^{(0,k)} = \frac{\varrho R_i^{2\varrho+1}}{\varrho+1}\bar{B}_{\varrho i}^{(0,k)} - \\ -\delta_\varrho^0 R_i^2\dot{R}_i - \frac{\delta_\varrho^1 R_i^3\dot{z}_i}{2},\ 0 \leq \varrho \leq k; \\ \bar{B}_{\varrho i}^{(1,k)} = \sum_{j=1,j\neq i}^{K}\sum_{\gamma=0}^{N+k-1}\frac{C_{\gamma\varrho}B_{\gamma j}^{(1,k-1)}}{s_{ij}d_{ij}^{\gamma+\varrho+1}},\ 0 \leq \varrho \leq k; \\ B_{\varrho i}^{(1,k)} = \frac{R_i^{\varrho+2}}{\varrho+1}\Bigg\{\varrho R_i^{\varrho-1}\bar{B}_{\varrho i}^{(1,k)} - \sum_{m=2}^{N}\Bigg[\delta_\varrho^m\dot{a}_{mi} - \\ -\dot{z}_i\varepsilon_{mi}\beta_{1m\varrho} - \sum_{\gamma=0}^{k}\Bigg(\frac{\bar{\Theta}_{m\gamma\varrho}^{\gamma+1,\gamma+2}B_{\gamma i}^{(0,k)}}{R_i^{\gamma+2}} + \\ +\bar{\Theta}_{m\gamma\varrho}^{\gamma,\gamma-1}\bar{B}_{\gamma i}^{(0,k)}R_i^{\gamma-1}\Bigg)\varepsilon_{mi}\Bigg]\Bigg\},\ 0 \leq \varrho \leq N+k;\end{gathered} \qquad (5)$$

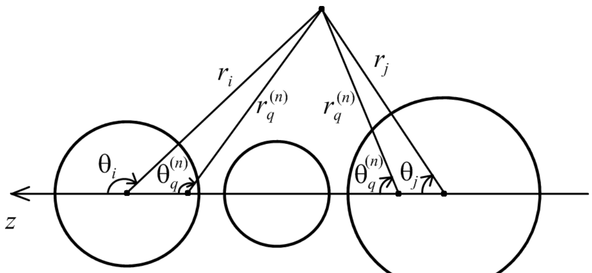

Рис. 2. Системы отсчета, применяемые при определении потенциала методом отражений

где $k = 1, 2, \ldots$, первый верхний индекс в скобках означает номер приближения по параметру ε, а второй индекс — по параметру δ.

2.3. Определение потенциала методом отражений

При использовании метода отражений потенциал определяется с помощью теоремы Вейса [8]. Данная теорема справедлива для сферических пузырьков. Однако ее можно использовать и в частном случае слабонесферических пузырьков: когда их поверхности находятся в фазе перехода через сферу ($\varepsilon_{ni} = 0$, $\dot{\varepsilon}_{ni} \neq 0$, $n = 2, 3, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, K$).

При использовании метода отражений потенциал ищется в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^{K} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_i^{(k)}. \tag{6}$$

Нулевое приближение потенциала определяется из решения задачи для одиночного слабонесферического пузырька, поверхность которого находится в сферической фазе

$$\Phi_i^{(0)} = \frac{A_0^{(0)}}{r_0^{(0)}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{A_1^{(0)} P_1^{(0)}}{r_1^{(0)n+1}},$$

где

$$A_0^{(0)} = -R_i^2 \dot{R}_i, A_1^{(0)} = -\frac{\delta_n^1 R_i^3 \dot{z}_i}{2} - \sum_{m=2}^{N} \frac{\delta_n^m R_i^{n+3} \dot{\varepsilon}_{mi}}{n+1}.$$

Последующие приближения определяются с помощью вышеупомянутой теоремы [8] в следующем виде

$$\Phi_i^{(k)} = \sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq i}}^{K} \sum_{\substack{j_{k-1}=1 \\ j_{k-1} \neq j_k}}^{K} \ldots \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq j_2}}^{K} \left(\int\limits_0^{R_{j_2}^2/d_{j_2 j_1}} \frac{A_0^{(k)} P_0^{(k)}}{r_0^{(k)2}} dc + \right.$$

$$\left. + \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{n_1} \ldots \sum_{n_{k+1}=1}^{n_k} \frac{A_1^{(k)} P_1^{(k)}}{r_1^{(k)n_{k+1}+1}} \right), \tag{7}$$

где $P_0^{(k)} = P_1\left(\cos\theta_0^{(k)}\right)$, $P_1^{(k)} = P_{n_{k+1}}\left(\cos\theta_1^{(k)}\right)$, $r_q^{(k)}$, $\theta_q^{(k)}$ — радиальная и широтная координаты сферической системы с отсчетом $r_q^{(k)}$ от точки $z_q^{(k)}$ (рис. 2), $z_q^{(k)} = z_i - c_q^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $q = 0, 1$. Параметры с индексом $q = 0$ соответствуют радиальным пульсациям пузырьков, а с индексом $q = 1$ — их пространственным перемещениям.

Коэффициенты $A_q^{(m)}$ находятся из следующих рекуррентных соотношений

$$A_0^{(0)} = -R_{j_1}^2 \dot{R}_{j_1}, A_0^{(1)} = -\frac{A_0^{(0)} c}{s_{j_2 j_1} R_{j_2}},$$
$$A_0^{(m)} = -\frac{A_0^{(m-1)} c_0^{(m)3}}{s_{j_{m+1} j_m} R_{j_{m+1}}^3},$$

$$A_1^{(0)} = -\frac{\delta_{n_1}^1 R_{j_1}^3 \dot{z}_{j_1}}{2} - \frac{\delta_{n_1}^m R_{j_1}^{n_1+3} \dot{\varepsilon}_{m j_1}}{n_1+1}, \tag{8}$$

$$A_1^{(1)} = \frac{(-1)^{n_2} n_2! a_{n_2} A_1^{(0)} c_1^{(1)n_1+n_2+1}}{s_{j_2 j_1} n_1! R_{j_2}^{2n_1+1}},$$

$$A_1^{(m)} = \frac{(-1)^{n_{m+1}} n_{m+1}! a_{n_{m+1}} A_1^{(m-1)} c_1^{(m)n_m+n_{m+1}+1}}{s_{j_{m+1} j_m} n_m! R_{j_{m+1}}^{2n_m+1}},$$

где $m = 2, 3, \ldots, k$, $j_{k+1} = i$, $c_0^{(1)} = c, c_1^{(1)} = \dfrac{R_{j_2}^2}{d_{j_2 j_1}}$, $c_q^{(m)} = \dfrac{R_{j_{m+1}}^2}{d_{j_{m+1} j_m} + c_q^{(m-1)}}$, $a_1 = \dfrac{(n_m+1)!}{2}$, $a_n = \dfrac{(n_m+n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} - \sum\limits_{l=1}^{n-1} \dfrac{a_l}{(n-l)!}$, $q = 0, 1$, $n = 2, 3, \ldots, n_m$.

2.4. Взаимосвязь между выражениями двух методов

Коэффициенты, полученные двумя методами, можно связать следующими соотношениями

$$B_{0i} = A_0^{(0)},$$

$$B_{ni} = A_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq i}}^{K} \sum_{\substack{j_{k-1}=1 \\ j_{k-1} \neq j_k}}^{K} \ldots \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq j_2}}^{K} \left(D_{n1} I^{(k)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{n_1} \ldots \sum_{n_{k+1}=1}^{n_k} D_{n n_{k+1}} A_1^{(k)} c_1^{(k)n-n_{k+1}} \right),$$

$$\bar{B}_{0i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} \left[\frac{A_0^{(0)}}{s_{ij} d_{ij}} + \sum_{n_1=1}^{N} \frac{A_1^{(0)}}{s_{ij} d_{ij}^{n_1+1}} - \right.$$

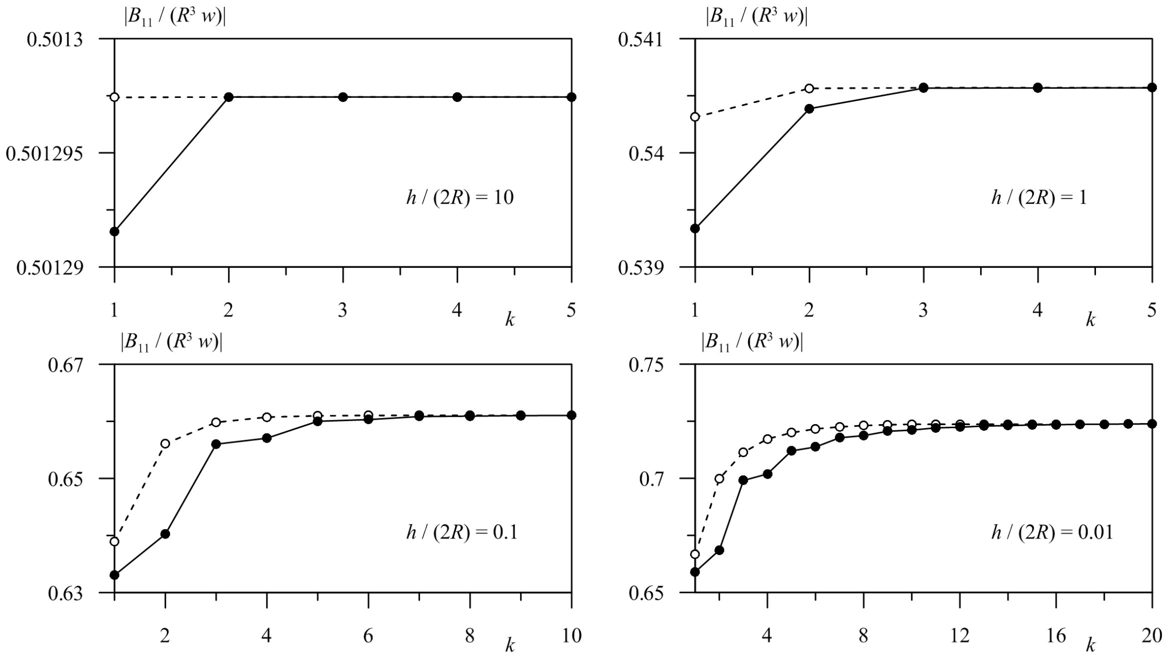

Рис. 3. Зависимости параметра $\left|B_{11}/(R^3w)\right|$ от числа итераций k, рассчитанные методом разложения по сферическим функциям (закрашенные кружочки, соединенные сплошными линиями) и методом отражений (незакрашенные кружочки, соединенные штриховыми линиями) при разных расстояниях между пузырьками

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{j_k=1\\ j_k\neq j}}^{K}\cdots\sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\neq j_2}}^{K}\frac{1}{R_i}\left(I^{(k+1)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n_1=1}^{N}\sum_{n_2=1}^{n_1}\cdots\sum_{n_{k+2}=1}^{n_{k+1}}\frac{A_1^{(k+1)}}{n_{k+2}c_1^{(k+1)n_{k+2}}}\right)\Bigg],$$
$$\bar{B}_{ni}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{K}\left[\frac{C_{0n}A_0^{(0)}}{s_{ij}d_{ij}^{n+1}}+\sum_{n_1=1}^{N}\frac{C_{n_1n}A_1^{(0)}}{s_{ij}d_{ij}^{n_1+n+1}}+\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{j_k=1\\ j_k\neq j}}^{K}\cdots\sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\neq j_2}}^{K}\frac{n+1}{nR_i^{2n+1}}\left(D_{n1}I^{(k+1)}+\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{n_1=1}^{N}\sum_{n_2=1}^{n_1}\cdots\sum_{n_{k+2}=1}^{n_{k+1}}D_{nn_{k+2}}A_1^{(k+1)}c_1^{(k+1)n-n_{k+2}}\right)\right],$$

где $D_{nm}=(-1)^{n+m}n!/\left[m!(n-m)!\right]$, $I^{(k)}=\int\limits_0^{R_{j_2}^2/d_{j_2j_1}}A_0^{(k)}c_0^{(k)\gamma-1}dc.$

3. Результаты расчетов

Для демонстрации работоспособности рассматриваемых методов нахождения потенциала используется задача о движении идеальной несжимаемой жидкости при наличии в ней трех одинаковых слабонесферических пузырьков радиуса R ($R_1=R_2=R_3=R$), центры которых расположены на одной прямой (расстояние между соседними пузырьками одинаково). Предполагается, что поверхности пузырьков находятся в фазе перехода через сферу ($\varepsilon_{n1}=\varepsilon_{n2}=\varepsilon_{n3}=0$, $n\geq 2$), а скорости искажений по первым четырем гармоникам равны 0.1 c^{-1} ($\dot\varepsilon_{n1}=\dot\varepsilon_{n2}=\dot\varepsilon_{n3}=0.1$ c^{-1}, $2\leq n\leq 5$, $\dot\varepsilon_{n1}=\dot\varepsilon_{n2}=\dot\varepsilon_{n3}=0$, $n\geq 6$). Все пузырьки расширяются с одинаковой скоростью u ($\dot R_1=\dot R_2=\dot R_3=u$). Крайние пузырьки двигаются к центральному со скоростью w ($\dot z_1=-w$, $\dot z_3=w$), а центральный пузырек считается неподвижным ($\dot z_2=0$).

На рис. 3 приводятся зависимости безразмерного параметра $\left|B_{11}/(R^3w)\right|$ от номера итерации k. Расчеты выполнены при $u=w$ и $h/(2R)=\{10,1,0.1,0.01\}$, где h — расстояние между поверхностями соседних пузырьков. Закрашенные кружочки, соединенные для удобства восприятия сплошной линией, получены с использованием метода разложения по сферическим функциям (3)-(5), а незакрашенные кружочки, соединенные штриховой линией, — методом отражений (6)–(8).

Из рис. 3 следует, что по мере увеличения числа итераций k во всех четырех рассмотренных случаях оба метода дают сходимость к одному и тому же результату. По мере уменьшения расстояния между пузырьками сходимость методов ухудшается.

4. Заключение

Исследована работоспособность двух методов расчета потенциала скорости жидкости при наличии в ней нескольких пузырьков (пузырьки расположены на одной прямой): метода отражений [3, 4] и метода разложения по сферическим функциям [6, 7]. Метод отражений обобщен на случай произвольного количества слабонесферических пузырьков, поверхности которых находятся в сферической фазе.

Показано, что по мере увеличения числа итераций приближения методов отражений и разложения по сферическим функциям сходятся к одному и тому же результату.

Список литературы

[1] Doinikov A.A. Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // Phys. Rev. E. 2001. V. 64, № 2. 026301(6).

[2] Ilinskii Y.A., Hamilton M.F., Zabolotskaya E.A. Bubble interaction dynamics in Lagrangian and Hamiltonian mechanics // JASA. 2007. V. 121, №. 2. P. 786–795.

[3] Воинов О.В. О движении двух сфер в идеальной жидкости // ПММ. 1969. Т. 33, № 4. С. 659–667.

[4] Воинов О.В. Движение идеальной жидкости около двух сфер с радиальными скоростями на поверхности // Вестник Московского университета. 1969. №. 5. С. 83–88.

[5] Hicks W.M. On the motion of two spheres in a fluid // Philosoph. Trans. Roy. Soc. of London. 1880. V. 171. P. 455–492.

[6] Давлетшин А.И. Математическое моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань. 2010.

[7] Аганин А.А., Давлетшин А.И. Взаимодействие двух сферических газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. 2011. № 3(25). С. 6–13.

[8] Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. Москва: Мир, 1964. 660 с.