



УДК 550.348:621.643

СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ ПОДЗЕМНОГО МАГИСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА

Якупов Р. Г., *Зарипов Д. М.*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Рассмотрено напряженно-деформированное положение подземного магистрального трубопровода под действием сейсмических волн землетрясения. Построены обобщенные функции сейсмических импульсов, решены уравнения движения трубопровода, используя преобразование Лапласа по времени, определены напряжения. Рассмотрен численный пример. Приведены графики изменения напряжений в зависимости от силы землетрясения в баллах.

1. Введение

Сейсмическая волна, или же сейсмический импульс, как видно из сейсмограмм, представляет собой кратковременные колебания длительностью 3–4 преобладающих периодов колебаний. В первой и конечной фазах регистрируются колебания с высокой частотой и малой амплитудой. Волна, идущая с больших глубин от очага землетрясения к поверхности земли, преломляется, отражается от слоев с криволинейными границами раздела сред с различными скоростями распространения волн, происходит интерференция волн. Поэтому с увеличением расстояния от очага волновая картина на поверхности земли меняется, усложняется. Форма импульса меняется также и в зависимости от свойств грунта в точке наблюдения, от коэффициента затухания и частоты колебаний. Наиболее интенсивные колебания записываются во второй фазе, главной фазе. Колебания происходят с большой амплитудой и сравнительно низкой частотой (рис. 1(а)). В рабо-

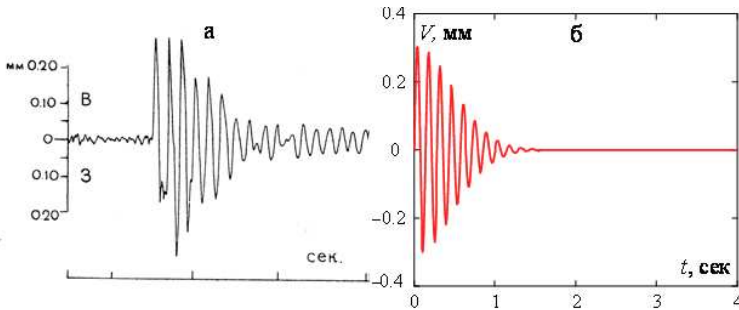


Рис. 1. а — сейсмограмма, б — аппроксимация

те [1] приведены 200 сейсмограмм, записанные при землетрясениях в разных районах страны. Каждая запись пронумерована.

Колебания с большой амплитудой и низкой частотой несут в себе максимальную долю энергии сейсмического импульса и действуют на сооружения сильнее, чем колебания первой и последней фаз [2]. Главную фазу сейсмических импульсов принято аппроксимировать выражениями:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \dot{V}te^{-\eta t} \sin \Omega t, \\ v_2(t) &= Ve^{-(\eta t)^2} \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (1)$$

и другими [3], где $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — смещение частиц грунта; \dot{V} , V — амплитуды скорости и смещения; η — коэффициент затухания; Ω — частота колебаний; t — время. Выбор выражений (1) основан на внешнем сходстве с главной фазой сейсмограмм (рис. 1(б)). Скорости и ускорения частиц грунта находим дифференцированием (1). Ускорения равны:

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1(t) &= -\dot{V}\Omega e^{-\eta t} \times \\ &\times \left\{ \left[\left(1 - \frac{\eta^2}{\Omega^2}\right) \Omega t + 2\frac{\eta}{\Omega} \right] \sin \Omega t - 2(1 - \eta t) \cos \Omega t \right\}, \\ \ddot{v}_2(t) &= -V\Omega^2 e^{-(\eta t)^2} \times \\ &\times \left\{ \left(1 + 2\frac{\eta^2}{\Omega^2} - 4\frac{\eta^2}{\Omega^2}(\eta t)^2\right) \sin \Omega t + 4\frac{\eta}{\Omega} \eta t \cos \Omega t \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Однако в руководствах по инженерной сейсмологии говорится о проявлениях землетрясения как о последовательных уда-

рах и толчках, следующих друг за другом через определенный промежуток времени [4]. Теория сейсмостойкости, основанная на предположении, что колебания почвы совершаются по гармоническому закону, игнорирует явление «ударов» и «толчков». Свидетельства очевидцев показывают, что даже при относительно слабом землетрясении наблюдаются факты смещения или опрокидывания отдельных твердых предметов [4].

Ниже гармонические функции (1) и (2) заменяем обобщенными функциями [5] и действие сейсмического импульса на магистральный трубопровод рассматриваем как последовательность ударов.

2. Обобщенные функции сейсмических волн

Поместим начало прямоугольной системы координат x, z на оси трубопровода в точке, находящейся перед сейсмическим импульсом, направив ось x вдоль его оси, ось z — перпендикулярно к поверхности земли, и совместим начало главной фазы сейсмических волн с началом осей координат. В моменты времени

$$t_* = \left(\frac{1}{4} + n\right) T_1 = \frac{2\pi}{\Omega\sqrt{1 - (\eta/\Omega)^2}} \left(\frac{1}{4} + n\right) \approx \approx \frac{2\pi}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n\right), \quad n = 0, 1, 2, 3\dots \quad (3)$$

функция $\sin \Omega t$ принимает наибольшие положительные значения, а $\cos \Omega t$ равен нулю. Поэтому в выражениях (2) слагаемые, содержащие $\cos \Omega t$, принимаем равными нулю, пренебрегаем также величиной η/Ω , как малой по сравнению с единицей. В результате получим:

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1(t) &= -\dot{V}\Omega^2 t e^{-\eta t} \sin \Omega t, \\ \ddot{v}_2(t) &= -V\Omega^2 e^{-(\eta t)^2} \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (4)$$

Затем в выражениях (1) и (4) функцию $\sin \Omega t$ заменяем ее значениями в моменты времени t_* , время t — временем t_* . Таким

образом получим обобщенные функции сейсмического импульса:

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= \frac{2\pi\dot{V}}{\Omega} \sum_{n=0}^{j-1} \left(\frac{1}{4} + n\right) \exp\left[-\frac{2\pi\eta}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n\right)\right], \\
 v_2(t) &= V \sum_{n=0}^{j-1} \exp\left[-\frac{2\pi\eta}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n\right)\right]^2, \\
 \ddot{v}_1(t) &= -2\pi\dot{V}\Omega \sum_{n=0}^{j-1} \left(\frac{1}{4} + n\right) \exp\left[-\frac{2\pi\eta}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n\right)\right], \\
 \ddot{v}_2(t) &= -V\Omega^2 \sum_{n=0}^{j-1} \exp\left[-\frac{2\pi\eta}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n\right)\right]^2,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $n = j - 1$, j — число ударов за время действия сейсмического импульса. Ударные силы смещаются вдоль трубопровода со скоростью продольной волны a_* , действуют через промежутки времени $T_1 \approx T = 2\pi/\Omega$, расстояние между ударными силами равно

$$x_0 = \frac{2\pi a_*}{\Omega\sqrt{1 - (\eta/\Omega)^2}} \approx \frac{2\pi a_*}{\Omega}. \tag{6}$$

Внешнюю силу на трубопровод определяем по формуле [6]

$$p(x, t) = K_1 D \sigma_z \operatorname{tg} \phi + m_1 \ddot{v}_i, \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

где $m_1 = \rho_2 D^2 [\operatorname{tg}(45 + \phi/2) - (45 + \phi/2)\pi/180] / 4$ — масса грунта в застойной зоне; ρ_2 — плотность грунта; D — диаметр трубы; ϕ — угол внутреннего трения; σ_z — нормальные напряжения в окружающей среде. С помощью соотношений

$$U(R, t) = -\frac{f'}{R} - \frac{f}{R^2}, \quad \sigma_z = \rho_2 a_*^2 (1 - 2K_1^2 \cos^2 \psi) \frac{f''}{R},$$

графические представления которых приведены в [6], находим зависимость между напряжением σ_z и вертикальным смещением v

$$\sigma_z = K_2 v(\xi, t). \tag{8}$$

Заметим, что $U(R, t)$ — смещение вдоль луча. Коэффициент K_2 зависит от параметров Ляме среды. Подставляя (5) и (8) в (7), получим выражения для силы толчка сейсмического импульса:

$$\begin{aligned} p_n(\xi_0) &= \frac{2\pi\dot{V}\Delta}{\Omega} \sum_{n=0}^{j-1} \left(\frac{1}{4} + n\right) \exp\left[-\frac{2\pi\eta}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n\right)\right], \\ p_n(\xi_0) &= V\Delta \sum_{n=0}^{j-1} \exp\left[-\frac{2\pi\eta}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n\right)\right]^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta = K_1 K_2 D \operatorname{tg} \phi + m_1 \Omega^2$.

Согласно первому выражению (9) первая и последующие ударные силы равны:

$$\begin{aligned} n = 0, \quad j = 1, \quad p_0(\xi_0) &= \frac{\pi\dot{V}\Delta}{2\Omega} \exp\left(-\frac{\pi\eta}{2\Omega}\right); \\ n = 1, \quad j = 2, \quad p_1(\xi_0) &= \frac{5\pi\dot{V}\Delta}{2\Omega} \exp\left(-\frac{5\pi\eta}{2\Omega}\right); \\ n = 2, \quad j = 3, \quad p_2(\xi_0) &= \frac{9\pi\dot{V}\Delta}{2\Omega} \exp\left(-\frac{9\pi\eta}{2\Omega}\right), \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

По второй формуле (9) ударные силы определяются аналогично.

3. Дифференциальные уравнения движения трубопровода и их решение

Магистральный трубопровод моделируем тонким стержнем. Используем безразмерные величины, обозначения:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{r}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{r}, \quad w = \frac{W}{r}, \quad c_1^2 = \frac{E}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{k'G}{\rho}, \\ r^2 &= \frac{J}{F}, \quad \gamma = \gamma_* \left(1 + \frac{m_2}{\rho F}\right), \quad \gamma_* = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

и уравнения движения стержня запишем в перемещениях с учетом деформации сдвига и инерции вращения [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= -\frac{r p(\xi, \tau)}{\rho F c_2^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} - \theta + \gamma_* \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В выражениях (10) и (11): r — радиус инерции; E , G , ρ — модули упругости, сдвига и плотность материала трубы; $k' = 1.1$ — коэффициент формы сечения; F , J — площадь поперечного сечения и осевой момент инерции; w , θ — прогиб и угол поворота сечения, обусловленный изгибающим моментом; τ — время; $m_2 = \rho_2 [D(h - 0.39D) + h^2 \operatorname{tg}(0.7\phi)]$ — масса грунта над трубой; h — расстояние от верха засыпки трубопровода до ее осевой линии;

$$p(\xi, \tau) = p_n(\xi_0) \delta(\xi - \tau/\beta) = \beta p_n(\xi_0) \delta(\tau - \beta\xi),$$

δ — дельта-функция Дирака; $\xi_0 = x_0/r$, $\beta = c_1/a_*$.

Уравнения (11) решаем, используя преобразование Лапласа по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2} - \frac{d\bar{\theta}}{d\xi} - \gamma s^2 &= k\gamma_* e^{-\beta s\xi}, \\ \frac{d\bar{w}}{dx} + \gamma_* \frac{d^2 \bar{\theta}}{d\xi^2} + (\gamma_* s^2 + 1)\bar{\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $k = -r\beta p_n(\xi_0)/EF$; \bar{w} , $\bar{\theta}$ — изображения прогиба w и угла поворота θ . Из первого уравнения (12) исключаем $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{w}}{d\xi^4} - (\gamma + 1)s^2 \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2} + \gamma s^2 \left(s^2 + \frac{1}{\gamma_*} \right) \bar{w} &= k f_2 e^{-\beta s\xi}, \\ \bar{\theta} = \frac{\gamma_*}{(\gamma_* s^2 + 1)} \left[\frac{d^3 \bar{w}}{d\xi^3} - \left(\gamma s^2 - \frac{1}{\gamma_*} \right) \frac{d\bar{w}}{d\xi} + k\beta\gamma_* s e^{-\beta s\xi} \right], & \quad (13) \\ f_2 = (\beta^2 - 1)\gamma_* s^2 - 1. & \end{aligned}$$

Решение системы (13) имеет вид

$$\bar{w} = A_1 e^{-\lambda_1 \xi} + A_2 e^{-\lambda_2 \xi} + \frac{k f_2 e^{-\beta s \xi}}{b_1 s^2 (s^2 + a_1^2)},$$

$$\bar{\theta} = (\lambda_1^2 - \gamma s^2) \frac{A_1}{-\lambda_1} e^{-\lambda_1 \xi} + (\lambda_2^2 - \gamma s^2) \frac{A_2}{-\lambda_2} e^{-\lambda_2 \xi} + \frac{k \beta e^{-\beta s \xi}}{b_1 s (s^2 + a_1^2)},$$

где $A_{1,2}$ — постоянные интегрирования; $b_1 = (\beta^2 - \gamma)(\beta^2 - 1)$; $a_1^2 = \gamma/(\gamma_* b_1)$; $\lambda_{1,2}$ — два (из четырех) корня характеристического уравнения

$$\lambda^4 - (\gamma + 1)s^2 \lambda^2 + \gamma s^2 \left(s^2 + \frac{1}{\gamma_*} \right) = 0,$$

удовлетворяющие условию затухания \bar{w} и $\bar{\theta}$ на бесконечности.

Сечение стержня $\xi = 0$ представляет подвижную заделку, углы поворота и сдвига равны нулю:

$$\xi = 0, \quad \bar{\theta} = 0, \quad \frac{d\bar{w}}{d\xi} - \bar{\theta} = 0. \quad (14)$$

Постоянные интегрирования определяем с помощью граничных условий (14). Изображение безразмерного изгибающего момента находим по формуле

$$\bar{m}(s, \tau) = \frac{Mr}{EJ} = \frac{d\bar{\theta}}{d\xi},$$

где M — размерный изгибающий момент.

Оригиналы прогиба и изгибающего момента определены с помощью формулы обращения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{\tau s} ds = \begin{cases} f(\tau), & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Подынтегральные функции имеют простые полюсы и точки ветвления. Вычисления проводились по формуле

$$I = \sum \operatorname{res}(s) - \sum_{\gamma_i} \int,$$

где $\text{res}(s)$ — вычет; γ_i — пути интегрирования по берегам разреза и по дугам окружности бесконечно малого радиуса. В случае действия единичной подвижной силы для изгибающего момента получено выражение [6]

$$m(s, \tau) = \sum_{i=1}^5 \text{res}(s_i), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_3 = \tau/\beta. \quad (15)$$

Развернутое выражение (15) представим в форме

$$m(s, \tau) = \frac{r\beta p(\xi_0)}{EF} \sum_{i=1}^3 R_i,$$

где

$$R_1 = \frac{\beta}{4\sqrt{2}a_1b_1} \left[\alpha_1(\sin \varepsilon_1 - \sin \varepsilon_2) + 2\alpha_2 e^{-a_1\alpha_1\xi/\sqrt{2}} \cos a_1\tau_2 \right],$$

$$R_2 = \frac{\beta(2\beta^2 - \gamma - 1)}{4\sqrt{2}(\gamma - 1)b_1\sqrt{a^2 + a_1^2}} \times \\ \times \left[\alpha_1(\sin \varepsilon_1 - \sin \varepsilon_2) - 2\alpha_2 e^{-a_1\alpha_1\xi/\sqrt{2}} \cos a_1\tau_2 \right],$$

$$R_3 = \frac{\beta^2}{a_1b_1} \sin [a_1(\tau_2 - \beta\xi)],$$

$$\varepsilon_{1,2} = a_1 \left(\tau_2 \pm \frac{\alpha_1\xi}{\sqrt{2}} \right), \quad \alpha_{1,2} = \left[(\gamma - 1) \sqrt{1 + \frac{a^2}{a_1^2}} \pm (\gamma + 1) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$a^2 = \frac{4\gamma}{\gamma_*(\gamma - 1)^2}, \quad \tau_2 = \tau - \tau_*, \quad \tau_* = \frac{\pi c_1}{2\Omega r}.$$

В случае действия нескольких сил, следующих друг за другом, используя принцип сложения действия сил, получим

$$m_I(\xi, \tau) = \frac{2\pi r\beta\dot{V}\Delta}{\Omega EF} \times \\ \times \sum_{n=0}^{j-1} \left(\frac{1}{4} + n \right) \exp \left[-\frac{2\pi\eta}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n \right) \right] \sum_{i=1}^3 R_i, \quad (16)$$

$$m_I(\xi, \tau) = \frac{r\beta V\Delta}{EF} \sum_{n=0}^{j-1} \exp \left[-\frac{2\pi\eta}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n \right) \right]^2 \sum_{i=1}^3 R_i.$$

4. Решение уравнения технической теории изгиба стержня

Используя безразмерные величины (10), уравнение движения запишем

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{rp(\xi, \tau)}{EF},$$

где $\gamma = 1 + (m_2/rho_2F)$. После преобразования Лапласа по времени:

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^4} + 4\lambda^4 \bar{w} = ke^{-\beta s \xi}. \quad (17)$$

Здесь $4\lambda^4 = \gamma s^2$, $k = r\beta p_n(\xi_0)/EF$.

Решение уравнения (17), удовлетворяющее условию затухания на бесконечности, имеет вид

$$\bar{w} = e^{-\lambda \xi} (A_1 \sin \lambda \xi + A_2 \cos \lambda \xi) + \frac{ke^{-\beta s \xi}}{s^2(\beta^4 s^2 + \gamma)}.$$

Постоянные интегрирования $A_{1,2}$ определяем с помощью граничных условий:

$$\xi = 0, \quad \frac{d\bar{w}}{d\xi} = \frac{d^3 \bar{w}}{d\xi^3} = 0.$$

Безразмерный изгибающий момент находим по формуле

$$\bar{m} = \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2}. \quad (18)$$

Обратное преобразование (18) проводим известным способом [7]:

$$m(\xi, \tau) = \frac{2\beta r p_n(\xi_0)}{\sqrt{\gamma} EF} \sin \left[\frac{\sqrt{\gamma}}{\beta^2} (\tau_2 - \beta \xi) \right]. \quad (19)$$

В случае действия сейсмического импульса (9) наибольший момент находим по формулам:

$$m_{II} = \frac{4\pi r \beta \dot{V} \Delta}{\sqrt{\gamma} \Omega EF} \sum_{n=0}^{j-1} \left(\frac{1}{4} + n \right) \exp \left[-\frac{2\pi \eta}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n \right) \right],$$

$$m_{II} = \frac{2r \beta V \Delta}{\sqrt{\gamma} EF} \sum_{n=0}^{j-1} \exp \left[-\frac{2\pi \eta}{\Omega} \left(\frac{1}{4} + n \right) \right]^2.$$

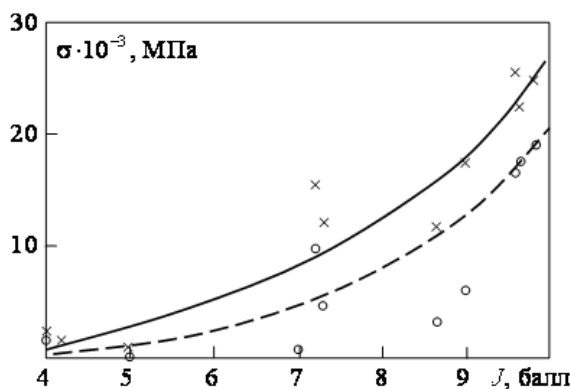
5. Расчет напряжений

Таблица 1

№	№ сейсмограммы по [1]	$\dot{V} \cdot 10^{-2}$, м/с	$V \cdot 10^{-3}$, мм	Балл, J	Ω , c^{-1}	η/Ω	j	m_I	m_{II}
1	156(III)	9	12	9	67	0.04	14	0.021	0.062
2	163(IV)	8	19	9.6	39	0.038	11	0.059	0.091
3	119(IV)	8.5	21	9.75	38	0.039	12	0.067	0.099
4	95(I)	8.3	20	9.7	30	0.05	10	0.061	0.079
5	тип II, с.86		0.9	5	21	0.043	3	0.00034	0.0027
6	тип II, с.86		11	8.75	27	0.056	3	0.0101	0.045
7	100(9)		0.31	1-4	44	0.034	7	0.00087	0.0046
8	8(3)		0.51	1-4	4.1	0.018	11	0.0056	0.0069
9	20(4)		3.8	7.25	4	0.038	6	0.0162	0.043
10	141(5)		3.75	7.2	32.5	0.034	7	0.035	0.054
11	31(1)		3.2	7	31.4	0	1	0.0014	

Определим напряжения в магистральном трубопроводе при землетрясениях, сейсмограммы которых приведены в [1]. В табл. 1 содержится номер записи сейсмограммы, максимальные амплитуды скорости и смещения, частоты колебаний главной фазы и балльность землетрясения по шкале [8] в зависимости от величины смещения маятника сейсмометра. В работе [8] отмечается также, что сейсмические колебания грунта облают рядом особенностей. В том числе, что частицы на поверхности грунта совершают пространственные колебания, причем составляющие вектора смещения по осям координат соизмеримы между собой. Поэтому принимаем, что в таблице приведены смещения и скорости в вертикальном направлении.

Отношения амплитуд различных максимальных фаз импульса зависят от η : чем меньше η , тем больше отношение амплитуды второго максимума к амплитуде первого максимума. Путем построения графиков $v_i(t)$ ($i = 1, 2$) по формулам (1) при

Рис. 2. o — σ_I , x — σ_{II}

различных значениях отношения η/Ω и визуального сравнения этих графиков с сейсмограммами, определена величина отношения η/Ω . Параметры сейсмограммы на рис. 1(а) приведены в строке № 7 табл. 1.

Исходные данные: трубопровод диаметром $D = 1$ м и толщиной стенки $h_0 = 0.01$ м проложен в песчаном грунте на глубине $h = 1.5$ м. Плотность грунта $\rho_2 = 1.53$ т/м³, принимаем $a_* = 660$ м/с, $b = 310$ м/с, угол $\phi = 30^\circ$, коэффициент $K_2 = 2.4 \cdot 10^3$ МПа/м. Модуль упругости, модуль сдвига и плотность материала трубы равны $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 0.8 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 8$ т/м³, $c_1 = 5 \cdot 10^3$ м/с, $c_2 = 3.3 \cdot 10^3$ м/с, $k' = 1.1$. Расчеты изгибающего момента проводились по формулам (16), (19) и они приведены в табл. 1, напряжения определены по формуле $\sigma = \sqrt{2}Em$.

На рис. 2 представлены напряжения в трубопроводе в зависимости от балльности землетрясения. Как видно, техническая теория изгиба балки дает завышенные значения напряжений. Кроме балльности землетрясения уровень напряжений также зависит от числа ударов и толчков. С увеличением числа ударов напряжения в трубопроводе возрастают (см. например, строки

5, 6 и 11 и строки 9, 10 и 11 табл. 1).

Из приведенных данных следует, что для данного трубопровода землетрясение силой 4 балла является предельным.

Список литературы

- [1] Рустанович Д. Н. Колебания поверхности земли в эпицентральных зонах сильных землетрясений М.: Наука, 1974. 97 с.
- [2] Кириллов Ф. А. К вопросу об исследованиях сейсмического эффекта взрывов в Институте физики земли АН СССР // Тр. Ин-та физики земли АН СССР. 1962. № 21 (188). С. 123–138.
- [3] Берзон И. С. Динамические характеристики сейсмических волн в реальных средах / Епинатьева А. М., Парийская Г. Н., Стародубцева С. П. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 511 с.
- [4] Назаров А. Г. Метод инженерного анализа сейсмических сил. Ереван.: Изд-во АН Арм. ССР, 1959. 286 с.
- [5] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. Обобщенные функции. М.: Наука. 1959. 438 с.
- [6] Якупов Р. Г., Зарипов Д. М. Воздействие сейсмических волн взрыва на магистральный трубопровод // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 3. С. 60–75.
- [7] Якупов Р. Г., Зарипов Д. М. Динамика магистрального трубопровода при действии сейсмической волны // Вестник УГАТУ Т. 15, № 3(43). 2011.
- [8] Медведев С. В. Инженерная сейсмология. М.: Госстройиздат, 1962. 284 с.