УДК 534.113

Отражение изгибной волны от точечной массы, прикрепленной к стержню

Хакимов А. Г.

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Исследуется отражение от точечной массы и прохождение изгибной бегущей волны в стержне. Получена зависимость решения от координаты груза и его величины. Решение обратной задачи позволяет определить координату точечной массы и ее величину по данным отраженной и проходящих волн в точках наблюдения.

1. Введение

В протяженных объектах типа магистральных трубопроводных систем не все участки могут быть доступны для визуального осмотра и приборного диагностирования [1]. В связи с этим сочетание приборного диагностирования в доступном месте (точке наблюдения) и моделирования отраженных волн от удаленного повреждения протяженных объектов представляет определенный интерес. В [2] рассматривается отражение продольной бегущей волны в стержне с повреждением без учета затухания волн.

2. Постановка задачи

Предполагается, что из удаленной точки стержня круглого поперечного сечения радиусом R слева направо распространяется изгибная волна смещения, амплитуда и частота которой в точке наблюдения O с координатой $x = 0$ равны W и ω. Принято, что затухающая часть волны равна нулю. В точке с координа-

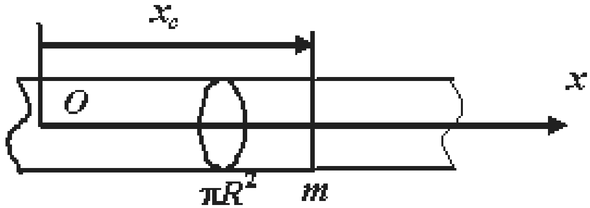


Рис. 1. Расчетная схема

той x_c прикреплен груз массой m (рис. 1). Требуется определить отраженную и проходящую волны по известной массе груза и ее координате, а также расположение груза и его массу по отраженной волне в точке наблюдения.

Уравнение изгибных колебаний балки имеет вид

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где E, ρ, J, F — модуль упругости, плотность, момент инерции и площадь поперечного сечения балки; w — прогиб балки; t — время.

Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$w = e^{i\omega t}\left(Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + Ce^{i\alpha x} + De^{-i\alpha x}\right),$$
$$\alpha^2 = \omega\sqrt{\frac{\rho F}{EJ}}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{L},$$

где A, B, C, D — постоянные интегрирования; i — мнимая единица; α, ω — волновое число и круговая частота; L — длина волны. Ограниченное решение, удовлетворяющее условию отсутствия отраженных волн ($A = C = 0$), записывается

$$w = Be^{-\alpha x + i\omega t} + De^{i(\omega t - \alpha x)}, \tag{2}$$

где первое слагаемое описывает затухающие по координате x колебания, а второе — бегущую волну. В падающей волне затухающие колебания отсутствуют.

Обозначая функции при $x = x_c$ слева и справа индексами «$-$» и «$+$», записываются условия стыкования решений (условия равенства перемещений, углов поворота θ, изгибающих моментов, перерезывающих сил):

$$w_+ = w_-, \ \ \theta_+ = \theta_-, \ \ M_+ = M_-, \ \ Q_+ = Q_- - m\frac{\partial^2 w_-}{\partial t^2}, \qquad (3)$$

где m — точечная масса; M, Q — изгибающий момент и перерезывающая сила, которые определяются по формулам:

$$M = EJ\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad Q = -EJ\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}. \qquad (4)$$

Условия (3) с учетом (4) записываются в виде:

$$\begin{gathered} w_+ = w_-, \quad \frac{\partial w_+}{\partial x} = \frac{\partial w_-}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 w_+}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_-}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 w_+}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_-}{\partial x^3} + \frac{m\omega^2}{EJ}w_-. \end{gathered} \qquad (5)$$

Предполагается, что затухающие колебания отсутствуют в начале координат. Поэтому поперечное перемещение в стержне задается в виде незатухающей бегущей изгибной волны

$$w = W\sin(\omega t - \alpha x). \qquad (6)$$

3. Прямая задача

Пользуясь в дальнейшем обозначениями:

$$\tau = \omega t, \quad \xi = \frac{2\pi x}{L}, \quad \xi_c = \frac{2\pi x_c}{L}, \quad \beta = \frac{m\omega^2 L^3}{8\pi^3 EJ}, \quad w = \frac{w}{W},$$

представим (5) в виде:

$$\begin{gathered} w_+ = w_-, \quad \frac{\partial w_+}{\partial \xi} = \frac{\partial w_-}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 w_+}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w_-}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^3 w_+}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 w_-}{\partial \xi^3} + \beta w_-. \end{gathered} \qquad (7)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели присоединенного груза фигурируют его координата ξ_c и параметр β. Для стержня круглого сечения величина

$$\beta = \frac{m\omega^2 L^3}{2\pi^3 E R^4}.$$

Представим (6) в виде:

$$w_i = \sin(\tau - \xi), \quad -\infty \le \xi \le \xi_c. \tag{8}$$

Решение (2) имеет вид:

$$\begin{gathered} w_r = A_r \cos(\tau + \xi) + B_r \sin(\tau + \xi) + \\ + e^{-(\xi_c - \xi)}(C_r \cos\tau + D_r \sin\tau), \quad -\infty \le \xi \le \xi_c, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} w_{i1} = A_{i1} \cos(\tau - \xi) + B_{i1} \sin(\tau - \xi) + \\ e^{-(\xi - \xi_c)}(C_{i1} \cos\tau + D_{i1} \sin\tau), \quad \xi_c < \xi \le \infty. \end{gathered} \tag{10}$$

Так как при $\xi \le \xi_c$ выполняются равенства $w_1 = w_i + w_r$, а при $\xi > \xi_c$ — равенства $w_2 = w_{i1}$, из условий (6) с учетом соотношений (8)–(10) следует система уравнений, решение которой записывается:

$$\begin{gathered} A_{i1}\eta = -\beta(\beta + 4), \quad B_{i1}\eta = -(\beta + 4)^2, \\ C_{i1}\eta = \beta(4\sin\xi_c + \beta\cos\xi_c + \beta\sin\xi_c), \\ D_{i1}\eta = \beta(-4\cos\xi_c - \beta\cos\xi_c + \beta\sin\xi_c), \\ A_r\eta = \beta(-4\cos 2\xi_c - \beta\cos 2\xi_c + \beta\sin 2\xi_c), \\ B_r\eta = \beta(-\beta\cos 2\xi_c - 4\sin 2\xi_c - \beta\sin 2\xi_c), \\ C_r = C_{i1}, \quad D_r = D_{i1}, \quad \eta = 2(\beta^2 + 4\beta + 8). \end{gathered} \tag{11}$$

При $\beta = 0$ выражения (11) упрощаются. Волна, не отражаясь, проходит далее. Решения (9), (10) можно представить также в виде:

$$
\begin{gathered}
w_r = k_r \sin\left((\tau+\xi) - \phi_r\right) + k_{r1} e^{-(\xi_c - \xi)} \sin(\tau - \phi_{r1}), \\
-\infty \le \xi \le \xi_c, \\
w_{i1} = k_{i1} \sin\left((\tau-\xi) - \phi_{i1}\right) + k_{i2} e^{-(\xi - \xi_c)} \sin(\tau - \phi_{i2}), \\
\xi_c < \xi \le \infty,
\end{gathered} \tag{12}
$$

где k_r, k_{r1} и k_{i1}, k_{i2} — коэффициенты отражения и прохождения; ϕ_r, ϕ_{r1} и ϕ_{i1}, ϕ_{i2} — соответствующие фазы:

$$
\begin{gathered}
k_r = \sqrt{A_r^2 + B_r^2}, \quad k_{r1} = \sqrt{C_r^2 + D_r^2}, \\
k_{i1} = \sqrt{A_{i1}^2 + B_{i1}^2}, \quad k_{i2} = \sqrt{C_{i1}^2 + D_{i1}^2}, \\
\phi_r = \arctan(-A_r/B_r), \quad \phi_{r1} = \arctan(-C_r/D_r), \\
\phi_{i1} = \arctan(-A_{i1}/B_{i1}), \quad \phi_{i2} = \arctan(-C_{i1}/D_{i1}).
\end{gathered} \tag{13}
$$

Перемещение w_r элемента стержня в точке наблюдения ($\xi = 0$), выраженное через амплитуду C* и фазу δ^* волны, имеет вид:

$$
\begin{gathered}
w_r = A_r \cos\tau + B_r \sin\tau + e^{-\xi_c}(C_r \cos\tau + D_r \sin\tau) = \\
= C \sin(\tau - \delta), \quad C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \tan\delta = -C_1/C_2,
\end{gathered} \tag{14}
$$

где обозначено

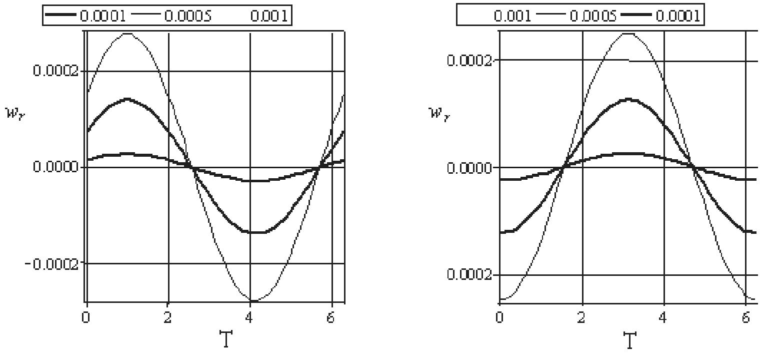
$$
C_1 = A_r + C_r e^{-\xi_c}, \quad C_2 = B_r + D_r e^{-\xi_c}. \tag{15}
$$

Суммарное перемещение w_s элемента стержня в точке наблюдения ($\xi = 0$), выраженное через амплитуду C и фазу δ волны:

$$
\begin{gathered}
w_s = w_i + w_r = \sin\tau + A_r \cos\tau + B_r \sin\tau + \\
+ e^{-\xi_c}(C_r \cos\tau + D_r \sin\tau) = C^* \sin(\tau - \delta^*), \\
C^* = \sqrt{C_1^2 + C_2^{*2}}, \quad \tan\delta = -C_1/C_2^*,
\end{gathered} \tag{16}
$$

где

$$
C_2^* = 1 + B_r + D_r e^{-\xi_c}.
$$



а) б)

Рис. 2. Перемещения стержня в отраженной волне для положений груза $\xi_c = 2\pi/3$ (а), $\xi_c = 2\pi$ (б) при различных β

На рис. 2 даются зависимости перемещения элемента стержня в отраженной волне от безразмерного времени τ для двух значений положения груза: $\xi_c = 2\pi/3$ (фрагмент а), $\xi_c = 2\pi$ (фрагмент б), $\xi = 0$ и различных β, вычисленных по формуле (9). Видно, что отраженные волны зависят от параметра β и координаты груза ξ_c. Чем больше масса груза β, тем больше величина сигнала в отраженной волне.

Зависимости сдвига фазы в отраженной волне от положения груза ξ_c и различных значений параметра β представлены на рис. 3(а), а от параметра β и различных значений ξ_c даются на рис. 3(б). Анализ показывает, что сдвиг фазы в отраженной волне зависит от положения груза ξ_c, параметра β. Таким образом, сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения координаты присоединенной массы и величины массы.

Рис. 4 содержит зависимости коэффициента отражения C от параметра β при различных ξ_c (фрагмент а) и от координаты ξ_c для различных β (фрагмент б). С ростом параметра β происходит увеличение коэффициента отражения C.

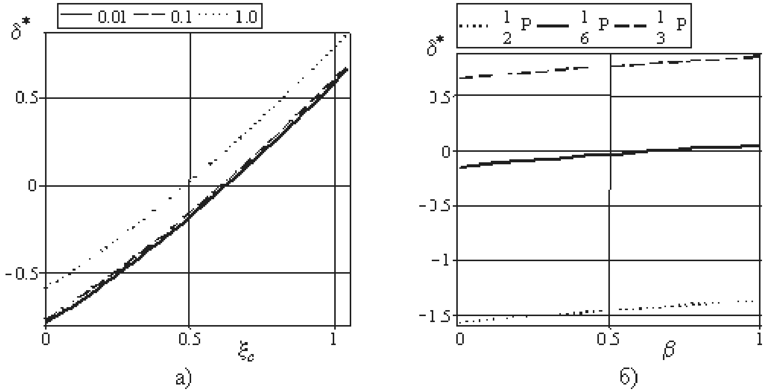


Рис. 3. Зависимости сдвига фазы в отраженной волне от положения груза ξ_c (а) при значениях параметра β и от параметра β (б) при различных значениях ξ_c

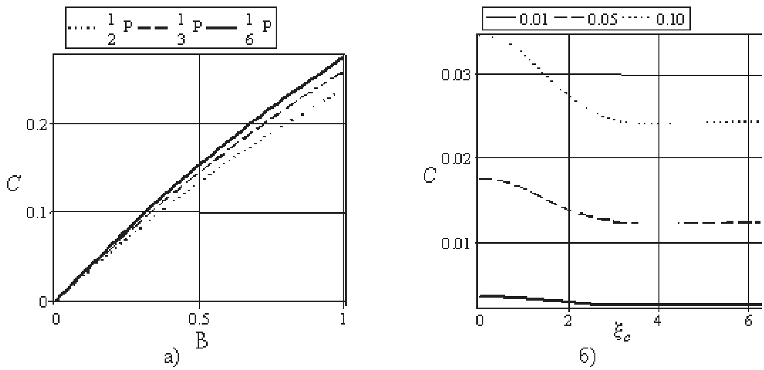


Рис. 4. Зависимости коэффициента отражения C от параметра β при различных значениях ξ_c (а) и от координаты ξ_c при различных значениях β (б)

4. Обратная задача

Могут быть использованы различные способы [3] определения координаты груза и его массы в зависимости от измеряемых характеристик волны с помощью приборных средств. Рассмотрим только один способ: выделение отраженной волны и использование данных измерений перемещений в два момента времени. Выделение отраженных волн может быть достигнуто, например, сравнением данных замеров в точке $\xi = 0$ стержня с грузом и в таком же стержне без груза. Могут быть и другие способы выделения отраженных волн. Если обозначить через $(w_r)_1$ и $(w_r)_2$ замеренные значения перемещения в отраженной волне в точке $\xi = 0$ в моменты времени τ_1 и τ_2 в пределах полупериода колебания, причем для простоты принять $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \pi/2$, то из (9) последует система уравнений:

$$(w_r)_1 = A_r + C_r e^{-\xi_c}, \quad (w_r)_2 = B_r + D_r e^{-\xi_c}. \tag{17}$$

Например, решение прямой задачи для $\xi_c = 2\pi/5$, $\beta = 0,001$ дает, что $(w_r)_1 = 0.0002698989202$, $(w_r)_2 = -0.0001688239284$.

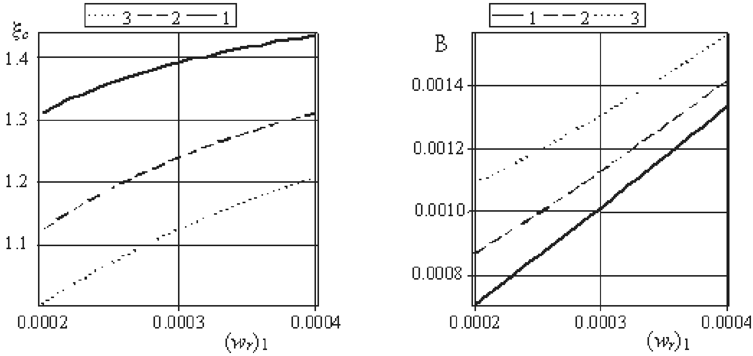
Параметры ξ_c, β определяются из (17) при заданных значениях $(w_r)_1$, $(w_r)_2$. Система (17) может быть решена численно. Например, для $(w_r)_1 = 0.0002$, $(w_r)_2 = -0.0001$ решение системы уравнений дает, что $\xi_c = 1.311509405$; $\beta = 0.0007086956474$.

На рис. 5 приводятся зависимости координаты груза ξ_c и его массы β от $(w_r)_1$ для различных значений $(w_r)_2$. Вычисления показывают, что по двум замеренным значениям $(w_r)_1$, $(w_r)_2$ определяются координата груза и его масса.

Возможно использование и других измерений параметров падающей, отраженной от груза и проходящей волн.

Анализ отраженных волн в стержне позволяет сделать вывод о том, что амплитуда и сдвиг фазы зависят от координаты груза ξ_c и его массы β. Таким образом, сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения координаты груза ξ_c и его массы β.

Полученная методика может использоваться при разработке системы диагностирования длинных стержневых систем.



а) б)

Рис. 5. Зависимости координаты груза ξ_c (а), параметра β (б) от $(w_r)_1$ для различных значений $(w_r)_2$: -0.0001 (кривая 1); -0.0002 (2); -0.0003 (3)

Список литературы

[1] Сидоров Б. В., Мартынов С. А. Рекомендуемая технология диагностики подземных трубопроводов // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. С. 18–19.

[2] Ильгамов М. А., Хакимов А. Г. Отражение продольной бегущей волны в стержне с повреждением // Контроль. Диагностика. 2009. № 7. С. 43–48.

[3] Ильгамов М. А., Хакимов А. Г. Отражение продольной волны от надреза в стержне, погруженном в вязкую жидкость // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3, № 3. С. 58–67.