



# НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В СТЕРЖНЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ НА ТОРЦЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Якушов Р. Г.

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Рассмотрены напряжения и деформации полубесконечного стержня, находящегося в упругой среде, при действии на торце динамической нагрузки. С использованием преобразования Лапласа по времени решена система двух дифференциальных уравнений движения теории балок Тимошенко. Полученные интегралы определены численно. Приведены графики изменения прогиба и изгибающего момента по продольной координате.

## 1. Постановка задачи

Волновые процессы в полубесконечном изолированном стержне, на торце которого приложены динамические нагрузки, рассмотрены в работах [1, 2]. В данной работе проанализированы напряжения и деформации в полубесконечном стержне, находящемся в упругой среде, при внезапном приложении на торце динамических сил и кинематических факторов. Стержень является моделью магистрального трубопровода, находящегося в грунте. Грунт, окружающий трубопровод, моделируем основанием Винклера и принимаем, что сила сопротивления грунта пропорциональна прогибу

$$p_* = \alpha W,$$

где  $\alpha$  — коэффициент основания;  $W$  — прогиб стержня. Коэффициент  $\alpha$  для грунтов находим по формуле [3]

$$\alpha = 0,12E_* (b/l_0)^{1/2} / (1 - \mu_*^2).$$

Здесь  $E_*$ ,  $\mu_*$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона грунта;  $b$  и  $l_0$  — ширина поперечного сечения и единичная длина стержня. В случае стержня круглого поперечного сечения  $b = d$  ( $d$  — диаметр стержня).

Поместим начало координат в начале стержня, направив ось  $x$  вдоль его оси, оси  $y$  и  $z$  — по горизонтали и вертикали соответственно. Используем безразмерные величины

$$\xi = x/r, \quad w = W/r, \quad \tau = c_1 t/r, \quad m = Mr/EJ_u, \quad r^2 = J_u/F$$

и уравнения движения записываем с учетом деформации сдвига и инерции вращения в перемещениях [4]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \zeta w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} - \theta + \gamma \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\gamma = c_1^2/c_2^2$ ;  $\zeta = r^2\alpha/\rho F c_2^2$ ;  $\theta$  — угол поворота, вызванный изгибающим моментом;  $\tau$  — время;  $c_1^2 = E/\rho$ ;  $c_2^2 = k'G/\rho$ ;  $c_1$ ,  $c_2$  — скорости распространения продольной и поперечной волн;  $E$ ,  $G$  и  $\rho$  — модуль упругости, модуль сдвига и плотность материала стержня;  $F$ ,  $J_u$  — площадь и осевой момент инерции поперечного сечения;  $k'$  — коэффициент формы поперечного сечения стержня (для прямоугольного сечения  $k' = 1,2$ , для круглого сечения  $k' = 1,1$ ).

## 2. Метод решения

К системе (1) применим преобразование Лапласа по времени:

$$\int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = F(s), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{\tau s} ds = \begin{cases} f(\tau) & \text{при } \tau > 0, \\ 0 & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

В результате система (1) принимает вид:

$$\frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2} - \frac{d\bar{\theta}}{d\xi} - (\gamma s^2 + \zeta) \bar{w} = 0, \quad \frac{d\bar{w}}{d\xi} + \gamma \frac{d^2 \bar{\theta}}{d\xi^2} - (\gamma s^2 + 1) \bar{\theta} = 0. \quad (2)$$

где  $s$  — параметр преобразования.

Исключив  $\bar{\theta}$  из системы (2), находим:

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\xi^4} - (\gamma s^2 + s^2 + \zeta) \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2} + (\gamma s^2 + 1) \left( s^2 + \frac{\zeta}{\gamma} \right) \bar{w} = 0, \quad (3)$$

$$\bar{\theta} = \frac{\gamma}{(\gamma s^2 + 1)} \left[ \frac{d^3 \bar{w}}{d\xi^3} - \left( \gamma s^2 + \zeta - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{d\bar{w}}{d\xi} \right].$$

Решение системы (3) имеет вид:

$$\bar{w} = A_1 e^{-\lambda_1 \xi} + A_2 e^{-\lambda_2 \xi};$$

$$\bar{\theta} = (\lambda_1^2 - \gamma s^2 - \zeta) A_1 e^{-\lambda_1 \xi} / (-\lambda_1) + (\lambda_2^2 - \gamma s^2 - \zeta) A_2 e^{-\lambda_2 \xi} / (-\lambda_2),$$

где  $A_1, A_2$  — постоянные интегрирования первого уравнения (3);  $\lambda_{1,2}$  — два (из четырех) корня характеристического уравнения

$$\lambda^4 - [(\gamma + 1)s^2 + \zeta] \lambda^2 + (\gamma s^2 + \zeta) \left( s^2 + \frac{1}{\gamma} \right) = 0,$$

удовлетворяющие условию затухания  $\bar{w}$  и  $\bar{\theta}$  на бесконечности. Представим их в виде

$$\lambda_{1,2}^2 = [(\gamma + 1)s^2 + \zeta] / 2 \pm (f/a),$$

где  $f = \sqrt{(s^2 - a_1^2)(s^2 - a_2^2)}$ ,  $a = 2/(\gamma - 1)$ ,  $a_{1,2}^2 = a \times \left[ (a - \zeta) \pm a(1 - (\gamma - 1)\zeta/\gamma)^{\frac{1}{2}} \right] / 2$ . Ниже постоянные  $A_{1,2}$  определяем при различных вариантах закрепления начального сечения стержня и действия динамических силовых и кинематических факторов.

*Вариант 1.* К начальному сечению стержня мгновенно прикладывается изгибающий момент и затем остается постоянным

$$M(t) = M_0 H(t),$$

где  $H(t)$  — функция Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

прогиб равен нулю.

*Вариант 2.* К начальному сечению стержня мгновенно прикладывается поперечная сила, затем остается постоянной,  $Q = Q_0 H(t)$ , угол поворота от изгиба равен нулю.

*Вариант 3.* Торцевое сечение перемещается в вертикальном направлении со скоростью  $V_0$  до момента времени  $t_0$ , затем перемещение остается постоянным:

$$W = V_0 t, \quad 0 \leq t \leq t_0;$$

$$W = V_0 t_0, \quad t \geq t_0,$$

изгибающий момент равен нулю.

*Вариант 4.* Угол поворота торцевого сечения линейно возрастает до времени  $t_0$ , затем остается постоянным:

$$\theta = \Omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq t_0;$$

$$\theta = \Omega_0 t_0, \quad t \geq t_0,$$

угол сдвига равен нулю.

Поперечная сила, изгибающий момент и угол сдвига определяются по формулам:

$$Q = k'GF(\partial W/\partial x - \theta); \quad M = EJ_u(\partial\theta/\partial x); \quad \beta_* = (\partial\theta/\partial x) - \theta.$$

Математическая форма записи приведенных граничных условий, выраженные через оригиналы и изображения перемещений, содержится в табл. 1, где использованы обозначения:  $q_0 = Q_0/k'GF$ ;  $m_0 = M_0r/EJ_u$ ;  $v_0 = V_0/c_1$ ;  $\omega_0 = \Omega_0r/c_1$ ;  $\theta'$  — производное  $\theta$  по  $\xi$ .

Приводим выражения постоянных интегрирования, изображений прогиба и изгибающего момента.

Таблица 1

Варианты	Граничные условия	
	Оригинал	Изображение
1	$\theta' = m_0 H(\tau)$ $w = 0$	$\theta' = m_0/s$ $\bar{w} = 0$
2	$\beta_* = q_0 H(\tau)$ $\theta = 0$	$\beta_* = q_0/s$ $\bar{\theta} = 0$
3	$w = v_0 \tau$ $\theta' = 0$	$\bar{\theta} = \frac{w_0}{s^2} [1 - e^{-\tau_0 s}]$ $\bar{\theta}' = 0$
4	$\theta = \omega_0 \tau$ $\beta_* = 0$	$\bar{w} = \frac{v_0}{s^2} [1 - e^{-\tau_0 s}]$ $\bar{\beta}_* = 0$

Вариант 1.

$$\begin{aligned} A_1 &= m_0 a / 2fs; & A_2 &= -m_0 a / 2fs; \\ \bar{w} &= m_0 a \left( e^{-\lambda_1 \xi} - e^{-\lambda_2 \xi} \right) / 2fs; \\ \bar{m} &= m_0 \left( \Delta_1 e^{-\lambda_1 \xi} - \Delta_2 e^{-\lambda_2 \xi} \right) / 2s. \end{aligned} \quad (4)$$

Вариант 2.

$$\begin{aligned} A_1 &= -q_0 \lambda_1 \Delta_2 / 2s (\gamma s^2 + \zeta); & A_2 &= -q_0 \lambda_2 \Delta_1 / 2s (\gamma s^2 + \zeta); \\ \bar{w} &= -q_0 \left( \lambda_1 \Delta_2 e^{-\lambda_1 \xi} - \lambda_2 \Delta_1 e^{-\lambda_2 \xi} \right) / 2s (\gamma s^2 + \zeta); \\ \bar{m} &= q_0 a \left( \lambda_1 e^{-\lambda_1 \xi} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 \xi} \right) / 2\gamma fs. \end{aligned} \quad (5)$$

Вариант 3.

$$\begin{aligned} A_1 &= v_0 D \Delta_2 / 2s; & A_2 &= v_0 D \Delta_1 / 2s; \\ \bar{w} &= v_0 D \left( \Delta_2 e^{-\lambda_1 \xi} - \Delta_1 e^{-\lambda_2 \xi} \right) / 2s; \\ \bar{m} &= -v_0 a D (\gamma s^2 + \zeta) \left( e^{-\lambda_1 \xi} - e^{-\lambda_2 \xi} \right) / 2\gamma fs. \end{aligned}$$

Вариант 4.

$$\begin{aligned} A_1 &= -w_0 a \lambda_1 D / 2fs; & A_2 &= w_0 a \lambda_2 D / 2fs; \\ \bar{w} &= -w_0 a D \left( \lambda_1 e^{-\lambda_1 \xi} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 \xi} \right) / 2fs; \\ \bar{m} &= -w_0 D \left( \lambda_1 \Delta_1 e^{-\lambda_1 \xi} + \lambda_2 \Delta_2 e^{-\lambda_2 \xi} \right) / 2s, \end{aligned}$$

где  $D = (1 - e^{-\lambda_1 \xi}) / s$ ,  $\Delta_{1,2} = 1 \pm a [(\gamma - 1)s^2 + \zeta] / 2f$ .

Для перехода к вещественным интегралам выражения (4) и (5) представим в виде:

$$\bar{w} = m_0 a (I_2 - I_1) / 4\pi i; \quad \bar{m} = m_0 (I'_3 + I''_3 + I'_4 - I''_4) / 4\pi i, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_L^L \left( e^{\tau s - \lambda_2 \xi} / fs \right) ds; & I_2 &= \int \left( e^{\tau s - \lambda_1 \xi} / fs \right) ds; \\ I'_3 &= \int_L^L \left( e^{\tau s - \lambda_2 \xi} / s \right) ds; & I''_3 &= \int_L^L \left( \phi e^{\tau s - \lambda_2 \xi} / 2fs \right) ds; \\ I'_4 &= \int_L^L \left( e^{\tau s - \lambda_1 \xi} / s \right) ds; & I''_4 &= \int_L^L \left( \phi e^{\tau s - \lambda_1 \xi} / 2fs \right) ds; \end{aligned}$$

$L$  — контур Бромвича;  $\phi = a [(\gamma - 1)s^2 + \zeta]$ .

Во втором варианте граничных условий:

$$\bar{w} = -q_0 (I'_5 + I''_5 + I'_6 + I'_6) / 4\pi i; \quad \bar{m} = q_0 a (I_8 - I_7) / 4\pi i \gamma, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} I'_5 &= \int \left( \lambda_2 e^{\tau s - \lambda_2 \xi} / s (\gamma s^2 + \zeta) \right) ds; \\ I''_5 &= \int_L^L \left( \lambda_2 \phi e^{\tau s - \lambda_2 \xi} / 2 f s (\gamma s^2 + \zeta) \right) ds; \\ I'_6 &= \int \left( \lambda_1 e^{\tau s - \lambda_1 \xi} / s (\gamma s^2 + \zeta) \right) ds; \\ I''_6 &= \int_L^L \left( \lambda_1 \phi e^{\tau s - \lambda_1 \xi} / 2 f s (\gamma s^2 + \zeta) \right) ds; \\ I_7 &= \int_L \left( \lambda_2 e^{\tau s - \lambda_2 \xi} / f s \right) ds; \quad I_8 = \int_L \left( \lambda_1 \phi e^{\tau s - \lambda_1 \xi} / f s \right) ds. \end{aligned}$$

Особые точки подынтегральных выражений в (6) и (7) и номера фигур, где изображены контуры интегрирования, приведены в табл. 2,  $a_3 = (\zeta/\gamma)^{1/2}$ ,  $a_4 = (1/\gamma)^{1/2}$ . Контур для интегрирования  $I'_3$  и  $I'_5$  показан на рис. 1(а) штриховой линией и представляет разрез вдоль мнимой оси от  $s = \pm ia_3$  до  $s = \pm ia_4$  и далее до полукруга большого радиуса. На рис. 1 через 1–9, I–IX обозначены противоположные берега пути интегрирования.

Таблица 2

Интегралы	$I_1, I'_3, I''_5, I_7$	$I_2, I''_4, I''_6, I_8$	$I'_3, I'_5$
Точки ветвл. $s$	$\pm a_1, \pm ia_2$ $\pm a_1, \pm ia_2$	$\pm a_1, \pm ia_2$	$\pm ia_3, \pm ia_4$
№ рисунка	рис. 1(а)	рис. 1(б)	рис. 1(а)
Полос $s = 0$	Все подынтегральные функции		
Полос $s = \pm ia_3$	Подынтегр. функции в интегралах $I'_5, I''_5, I'_6, I''_6$		

Вычисления проводились по формуле

$$I = \sum \operatorname{res}(s) - \sum_{\gamma_i} \int,$$

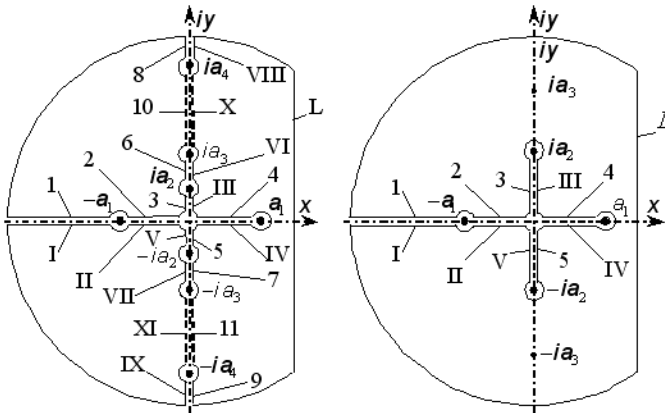


Рис. 1. Контур интегрирования: а — для интегралов  $I_1, I_3, I_5, I_7$ , б — для интегралов  $I_2, I_4''$

где  $\gamma_i$  ( $i > 1$ ) — пути, проходимые в положительном направлении по берегам разреза и по дуге окружности с бесконечно малым радиусом. При стремлении радиуса малой окружности к нулю путь интегрирования и соответственно интеграл стремятся к нулю.

Подынтегральные выражения в (6) и (7) при  $s \rightarrow \infty$  стремятся к нулю,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  стремятся к постоянным величинам:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\lambda_2/s) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (\lambda_1/s) = \sqrt{\gamma}.$$

Из приведенного следует, что волны распространяются вдоль стержня двумя скоростями  $c_1$  и  $c_2$  и область возмущения разбивается фронтами волн на две части. Координаты фронтов волн в каждый момент времени  $\tau$  определяются величинами  $\xi_1 = \tau$  и  $\xi_2 = \tau/\sqrt{\gamma}$ . Область  $0 \leq \xi \leq \xi_1$  охвачена волной изгиба, параметры волны определяются интегралами  $I_1, I_3, I_5$  и  $I_7$ , которые не равны нулю при  $\xi < \xi_1$  и равны нулю при  $\xi > \xi_1$ . В области  $0 \leq \xi \leq \xi_2$  распространяются волны изгиба и сдвига, параметры волны сдвига определяются интегралами  $I_2, I_4, I_6$  и  $I_8$ .

Комплексные выражения в подынтегральных функциях (6) и (7) определены в работе [5] с учетом ограничений на их аргументы в зависимости от пути интегрирования. Здесь они приведены в табл. 3, где использованы следующие обозначения:

Таблица 3

Путь интегрирования	Комплексные величины				Интервал изменения $x, y$
	$s$	$s^2$	$f$	$\lambda_{1,2}$	
1/I	$-x$	$x^2$	$-f_1^*$	$\sqrt{R_1 \mp R_2}$	$-\infty \leq x \leq -a_1$
2/II	$-x$	$x^2$	$\pm i f_2^*$	$\eta_1 \mp i \eta_2$	$-a_1 \leq x \leq 0$
4/IV	$x$	$x^2$	$\pm i f_2^*$	$\eta_2 \mp i \eta_1$	$0 \leq x \leq a_1$
3/III	$iy$	$-y^2$	$i f_3^*$	$\eta_3 \pm i \eta_4$	$0 \leq x \leq a_2$
5/V	$-iy$	$-y^2$	$-i f_3^*$	$\eta_3 \mp i \eta_4$	$-a_2 \leq y \leq 0$
6,VI/7,VII	$\pm iy$	$-y^2$	$-f_4^*$	$\lambda_1 = i \eta_5$ $\lambda_2 = \eta_6$	$y \geq a_2 /$ $y \leq -a_2$

$$f_1^* = \sqrt{(x^2 - a_1^2)(x^2 + a_2^2)}; \quad f_2^* = \sqrt{(a_1^2 - x^2)(a_2^2 + x^2)};$$

$$f_3^* = \sqrt{(a_1^2 + y^2)(a_2^2 - y^2)}; \quad f_4^* = \sqrt{(y^2 + a_2^2)(y^2 - a_2^2)};$$

$$\eta_{1,2} = \sqrt{(R \mp R_1)/2}; \quad R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2};$$

$$R_1 = [(\gamma + 1)x^2 + \zeta] / 2; \quad R_2 = (\gamma - 1)\sqrt{(a_1^2 - x^2)(a_2^2 + x^2)}/2.$$

Интегралы по пути 1 + I и по всем берегам разреза вдоль мнимой оси взаимно уничтожаются. После вычислений находим:

*Вариант 1.*

$$w(\xi, \tau) = -\frac{m_0}{\zeta\nu} e^{-\alpha_1 \xi} \sin \beta_1 \xi + \frac{m_0 a}{2\pi} \int_0^{a_1} \frac{T_0}{x f_2^*} dx; \quad \xi_2 \leq \xi \leq \xi_1;$$

$$-m(\xi, \tau) = \frac{m_0}{2} e^{-\alpha_1 \xi} (\cos \beta_1 \xi + \frac{1}{\nu} \sin \beta_1 \xi) -$$

$$\frac{m_0 a}{4\pi} \int_0^{a_1} \frac{[(\gamma - 1)x^2 + \zeta] T_0}{x f_2^* dx};$$

$$w(\xi, \tau) = -\frac{2m_0}{\zeta\nu} e^{-\alpha_1 \xi} \sin \beta_1 \xi; \quad 0 \leq \xi \leq \xi_2;$$

$$m(\xi, \tau) = m_0 e^{-\alpha_1 \xi} \left( \cos \beta_1 \xi + \frac{1}{\nu} \sin \beta_1 \xi \right). \quad (9)$$



Вариант 2.

$$w(\xi, \tau) = -\frac{q_0 e^{-\alpha_1 \xi}}{2\zeta} \left[ \left( \alpha_1 + \frac{\beta_1}{\nu} \right) \cos \beta_1 \xi + \left( \beta_1 - \frac{\alpha_1}{\nu} \right) \sin \beta_1 \xi \right] - \frac{q_0 a}{4\pi} \int_0^{a_1} \frac{[(\gamma - 1)x^2 + \zeta](\Phi_1 - \Phi_2)}{x f_2^*(\gamma x^2 + \zeta)} dx; \quad (10)$$

$$m(\xi, \tau) = \frac{q_0 e^{-\alpha_1 \xi}}{\gamma \zeta \nu} (\beta_1 \cos \beta_1 \xi - \alpha_1 \sin \beta_1 \xi) + \frac{q_0 a}{2\pi \gamma} \int_0^{a_1} \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)}{x f_2^*} dx. \quad \xi_2 \leq \xi \leq \xi_1;$$

$$w(\xi, \tau) = -\frac{q_0}{\zeta} e^{-\alpha_1 \xi} \left[ \left( \alpha_1 + \frac{\beta_1}{\nu} \right) \cos \beta_1 \xi + \left( \beta_1 - \frac{\alpha_1}{\nu} \right) \sin \beta_1 \xi \right]; \quad 0 \leq \xi \leq \xi_2; \quad (11)$$

$$m(\xi, \tau) = \frac{2q_0 e^{-\alpha_1 \xi}}{\gamma \zeta \nu} (\beta_1 \cos \beta_1 \xi - \alpha_1 \sin \beta_1 \xi),$$

где

$$T_0 = e^{-(\tau x + \eta_1 \xi)} \cos \eta_2 \xi - e^{\tau x - \eta_2 \xi} \cos \eta_1 \xi;$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( a_3 + \frac{\zeta}{2} \right)}; \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( a_3 - \frac{\zeta}{2} \right)}; \quad \nu = \sqrt{\frac{4}{\gamma \zeta} - 1};$$

$$\Phi_1 = e^{-(\tau x + \eta_1 \xi)} (\eta_1 \cos \eta_2 \xi + \eta_2 \sin \eta_2 \xi);$$

$$\Phi_2 = e^{\tau x - \eta_2 \xi} (\eta_2 \cos \eta_1 \xi + \eta_1 \sin \eta_1 \xi).$$

### 3. Численный пример

Считаем, что сечение балки прямоугольное  $b = h = 0,1$  м,  $F = b \times h$ ,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho = 8$  т/м<sup>3</sup>,  $c_1 = 5 \cdot 10^3$  м/с,  $c_2 = 2,84$  м/с,  $\zeta = 1,35 \cdot 10^{-2}$ ,  $\gamma = 3,1$ ,  $a = 0,95$ ,  $a_1 = 0,94$ ,  $a_2 = 0,051$ ,  $a_3 = 0,072$ . Расчеты проводились по формулам (8)–(11).

Подынтегральные функции в интегралах (8) и (10) являются осциллирующими и в точках  $x = 0$ ,  $x = a_1$  имеют бесконечный разрыв. Поэтому при интегрировании по  $x$  обеспечивалось

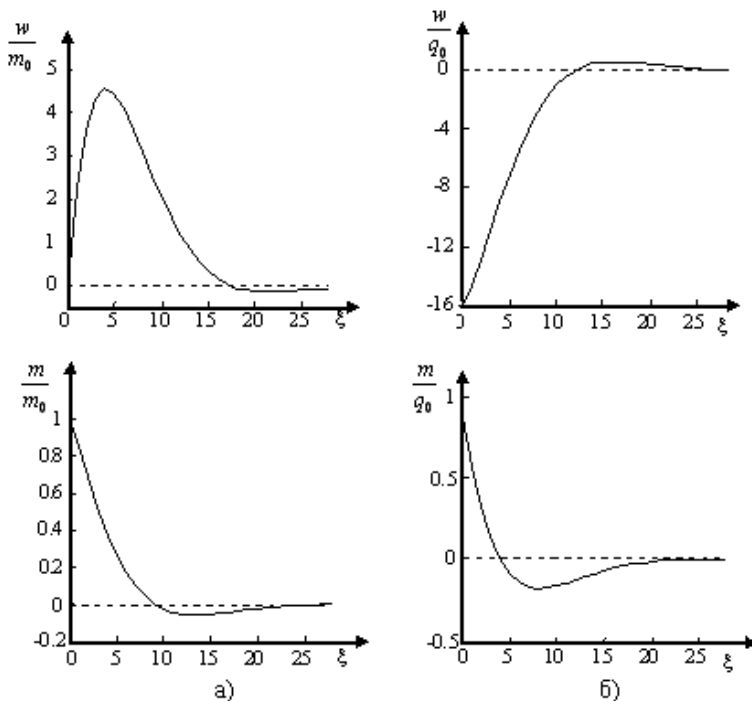


Рис. 2. Графики прогиба и изгибающего момента: а — вариант 1; б — вариант 2

не менее 10 шагов в пределах длины полуволны, нижний предел принимался равным  $\delta$ , а верхний предел — в виде  $a_1(1 - \delta)$ , где  $\delta = 10^{-15}$ . Таким образом определены главные значения несобственных интегралов. Вычисления проводились по методу трапеций.

По результатам расчетов построены графики  $w(\xi)$  и  $m(\xi)$  (рис. 2). Из приведенных данных следует, что при нагружении стержня моментом и поперечной силой, приложенных на торце, стержень совершает аperiodическое затухающее движение, деформации и напряжения возникают в области, не превышающей  $\xi = 20$ . Волновые движения в стержне не возникают.

#### 4. Заключение

Прогибы и напряжения в стержне можно определить по аналитическим выражениям (9) и (10).

#### Список литературы

- [1] Boley В. А., Chao С. С. Some Solutions of the Timoshenko Beam Equations // Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 77. 1955. P. 579–586.
- [2] Plass Н. J. Some Solutions of the Timoshenko Beam Equations of Short Pulse – Type Loadings // Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 80. 1958. P. 379–385.
- [3] Айнбиндер А. Б., Камерштейн А. Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1982. 342 с.
- [4] Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1985. 444 с.
- [5] Якупов Р. Г. Волны напряжения в стержне при действии подвижной нагрузки // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 2. С. 112–122.