

## ОТРАЖЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ОТ НАДРЕЗА В СТЕРЖНЕ, ПОГРУЖЕННОМ В ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ<sup>1</sup>

*Ильгамов М. А., Хакимов А. Г.*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Исследуется отражение от поперечного надреза и прохождения продольной затухающей бегущей волны в стержне, погруженном в вязкую жидкость. Использована простейшая модель напряженно-деформированного состояния в зоне надреза. Получена зависимость решения от параметров надреза, характеристик затухания в материале стержня и окружающей жидкости. Решение обратной задачи позволяет определить координату надреза и параметр, содержащий его глубину и длину, по данным падающей и отраженной волн в месте наблюдения.

В протяженных объектах типа штанговых колонн нефтедобывающих скважин, магистральных трубопроводных систем не все участки могут быть доступны для визуального осмотра и приборного диагностирования [1]. Штанговая колонна соприкасается с водонефтяной смесью, а трубопровод может быть проложен в болотистой местности. В первом приближении влияние этой среды может быть описано моделью вязкой жидкости. При доступности визуального осмотра не во всех случаях представляется возможным определение зарождающихся повреждений конструкции. В связи с этим сочетание приборного диагностирования в доступном месте (точке наблюдения) и моделирования отраженных волн от удаленного повреждения протяженных

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-97008-р\_поволжье\_a)

объектов представляет определенный интерес. В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра частот изгибных колебаний [2] или продольных колебаний [3]. В [4] дается решение задач определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. Решению обратной задачи о продольных установившихся колебаниях в стержнях с повреждением посвящена работа [5]. В [6] рассматривается отражение продольной бегущей волны в стержне с повреждением без учета затухания волн.

## 1. Постановка задачи

Предполагается, что из удаленной точки стержня круглого поперечного сечения радиусом  $R$  слева направо распространяется продольная волна смещения, амплитуда и частота которой в точке наблюдения  $O$  с координатой  $x = 0$  равны  $U$  и  $\omega$ . В точке с координатой  $x_c$  имеется надрез длиной  $l$  (рис. 1). Предполагается, что стержень находится в вязкой несжимаемой жидкости. Длина надреза  $l$  значительно меньше длины волны  $L$ . Требуется определить отраженную и проходящую волны по известным параметрам надреза, а также расположение надреза и его размеры по отраженной волне в точке наблюдения или по отраженной и проходящей волнам.

Между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  принимается следующая зависимость

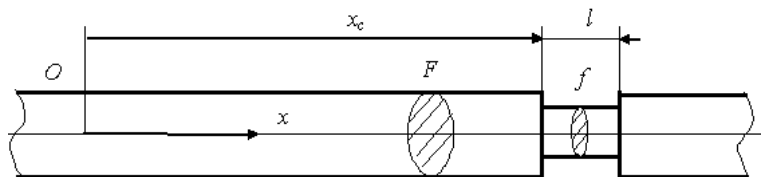


Рис. 1

$$\sigma = E \left( \varepsilon + \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $E, \mu$  — модуль упругости и коэффициент внутреннего трения;  $u$  — перемещение;  $t$  — время.

Поведение жидкости определяется условием на поверхности соприкосновения

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (r = R). \quad (2)$$

Скорости жидкости в продольном направлении  $v_x$  и радиальном направлении  $v_r$  подчиняются условию несжимаемости [6]

$$\frac{\partial(rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

Касательное напряжение равно

$$\tau = \mu_l \left( \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right), \quad (4)$$

где  $\mu_l$  — динамический коэффициент вязкости жидкости. Ввиду малости  $v_r$  по сравнению с  $v_x$  и их производных вторые члены в (3), (4) далее опускаются. Тогда

$$v_x = Vr^{-1}, \quad \tau = \mu_l Vr^{-2}.$$

Константа  $V = R\partial u/\partial t$  определяется по условию (2). На поверхность стержня действует напряжение в продольном направлении

$$\tau = -\frac{\mu_l}{R} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5)$$

Из уравнения движения

$$\pi R^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \pi R^2 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\pi R\tau$$

и соотношения (5) получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu a^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + b \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad b = \frac{2\mu l}{R^2 \rho}, \quad T = \pi R^2 E \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right),$$

где  $\rho$ ,  $a$ ,  $T$  — плотность, скорость звука и усилие натяжения в стержне;  $b$  — коэффициент влияния жидкости на продольное движение стержня.

В пределах надреза с короткой длиной  $l$  и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние. Однако здесь для простоты принимается одноосное растяжение–сжатие, сохраняется соотношение  $\sigma(\varepsilon)$  в виде (1), а также не учитываются инерционные силы в пределах надреза. Обозначая функции при  $(x_c - l/2)$  и  $(x_c + l/2)$  индексами «-» и «+», запишем условия стыкования решений при  $x = x_c$ . Исходя из (6), условию  $T_- = T_+$  можно придать вид

$$\frac{\partial u_-}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_-}{\partial x \partial t} = \frac{\partial u_+}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_+}{\partial x \partial t} \quad (x = x_c). \quad (7)$$

В пределах надреза усилие

$$\tilde{T} = f\tilde{\sigma} = fE \left( \tilde{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} \right)$$

равно тому же усилию  $T_-$  (или  $T_+$ ). Так как средняя деформация в пределах надреза равна  $\tilde{\varepsilon} \approx (u_+ - u_-)/l$ , то из равенства  $\tilde{T} = T_-$  следует

$$u_+ - u_- + \mu \frac{\partial}{\partial t}(u_+ - u_-) = \frac{mL}{\pi} \left( \frac{\partial u_-}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_-}{\partial x \partial t} \right), \quad (8)$$

$$m = \frac{\pi l F}{L f} \quad (x = x_c).$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют его координата  $x_c$  и безразмерный параметр  $m$ . В

прямой задаче параметр  $m$  или отношения площадей  $F/f$  и длин  $l/L$  задаются. В обратной задаче необходимо определение значения  $x_c$  и этого параметра  $m$ . Сами величины  $l$  и  $f$  при этом не определяются, если не поставлено дополнительное условие.

Продольное перемещение элементов стержня без надреза задается в виде затухающей бегущей волны

$$u = Ue^{-\beta x} \sin(\omega t - \alpha x), \quad (9)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — определяются из уравнений, вытекающих из (6):

$$\begin{aligned} \omega^2 + a^2\beta^2 - a^2\alpha^2 - 2\mu a^2\alpha\beta\omega &= 0, \\ a^2(2\alpha\beta + \mu\omega\beta^2 - \mu\omega\alpha^2) - b\omega &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение 10) имеет вид:

$$\alpha = \frac{\omega(b + \mu\omega^2)}{2a(1 + \mu^2\omega^2)z_i}, \quad \beta = \frac{z_i}{a}, \quad (11)$$

где  $z_i$  — корни уравнения

$$\begin{aligned} 4(1 + \mu^2\omega^2)^2 z^4 + 4\omega^2(-\mu b + \mu^2\omega^2 - \mu^3 b\omega^2 + 1)z^2 - \\ - \omega^2(b^2 + 2\mu b\omega^2 + \mu^2\omega^4) = 0, \end{aligned}$$

которые равны

$$z_i = \pm \sqrt{\pm \frac{\omega \left( \sqrt{\mu^2 b^2 \omega^2 + \omega^2 + b^2 + \mu^2 \omega^4} + \mu b - 1 \right)}{2(1 + \mu^2 \omega^2)}}.$$

Если пренебречь величинами порядка  $(\mu\omega)^2$  и  $b$  по сравнению с единицей, то из (11) следует:

$$\alpha = \frac{\omega}{a}, \quad \beta = \frac{1}{2a}(\mu\omega^2 + b), \quad L = \frac{2\pi a}{\omega}. \quad (12)$$

## 2. Прямая задача

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$\tau = \omega t, \quad \xi = \frac{2\pi x}{L}, \quad \xi_c = \frac{2\pi x_c}{L}, \quad n = \frac{\beta L}{2\pi}, \quad u_i = \frac{u}{U},$$

представим (9) в виде

$$u_i = e^{-n\xi} \sin(\tau - \xi), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c. \quad (13)$$

Решение уравнения 6) для области распространения отраженной волны имеет вид

$$u_r = e^{-n(\xi_c - \xi)} [A_r \cos(\tau + \xi) + B_r \sin(\tau + \xi)], \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \quad (14)$$

а для области распространения проходящей через надрез волны —

$$u_t = e^{-n\xi} [A_t \cos(\tau - \xi) + B_t \sin(\tau - \xi)], \quad \xi_c \leq \xi \leq \infty. \quad (15)$$

Так как при  $\xi = \xi_c$  имеются равенства  $u_- = u + u_r$ ,  $u_+ = u_t$ , то из условий (7)–(8) следует:

$$\begin{aligned} A_r &= \eta m e^{-n\xi_c} [\cos 2\xi_c - (m + n) \sin 2\xi_c], \\ B_r &= \eta m e^{-n\xi_c} [(m + n) \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c], \\ A_t &= -\eta m, \quad B_t = \eta(mn + 1), \quad \eta = \frac{1}{1 + 2mn + m^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь не приведены члены, содержащие  $n^2$ , так как  $n = \mu\omega/2$ . Решения (14), (15) можно представить также в виде:

$$\begin{aligned} u_r &= k_r e^{-n(\xi_c - \xi)} \sin[(\tau + \xi) - \varphi_r], \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \\ u_t &= k_t e^{-n(\xi - \xi_c)} \sin[(\tau - \xi) - \varphi_t], \quad \xi_c \leq \xi \leq \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

где коэффициенты отражения  $k_r$  и прохождения  $k_t$ , а также соответствующие фазы равны:

$$\begin{aligned} k_r &= \sqrt{\eta} m e^{-n\xi_c}, \quad k_t = \sqrt{\eta} e^{-n\xi_c}, \\ \operatorname{tg} \varphi_r &= \frac{(m + n) \sin 2\xi_c - \cos 2\xi_c}{(m + n) \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c}, \quad \operatorname{tg} \varphi_t = \frac{m}{1 + mn}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из 18) видно, что сдвиг фазы  $\varphi_t$  между падающей и проходящей волной зависит только от параметра надреза  $m$  и коэффициента затухания  $n$ . Коэффициенты отражения  $k_r$  и прохождения  $k_t$ , а также сдвиг фазы  $\varphi_r$  зависят также от положения надреза  $\xi_c$ . При  $m \rightarrow 0$  коэффициент отражения  $k_r \rightarrow 0$ , а коэффициент прохождения  $k_t \rightarrow \exp(-n\xi_c)$ . При обрыве стержня  $m \rightarrow \infty$  и коэффициенты  $k_r = \exp(-n\xi_c)$ ,  $k_t = 0$ .

Суммарное перемещение  $u_s$  элемента стержня в точке наблюдения ( $\xi = 0$ ), выраженное через амплитуду  $C$  и фазу  $\delta$  суммарной волны, имеет вид:

$$u_s = u_i + u_r = C \sin(\tau - \delta), \quad C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \text{tg } \delta = -C_1/C_2, \quad (19)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} C_1 &= \eta m e^{-2n\xi_c} [\cos 2\xi_c - (m+n) \sin 2\xi_c], \\ C_2 &= 1 + \eta m e^{-2n\xi_c} [(m+n) \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c]. \end{aligned} \quad (20)$$

На рис. 2 приводятся зависимости перемещения элемента стержня в отраженной волне от  $\tau$  для коэффициента затухания  $n = 0.1$  при  $\xi = 0$  для различных значений  $\xi_c$  [по формуле  $u_r = k_r \exp(-n\xi_c) \sin(\tau - \varphi_r)$ ]. Видно, что отраженные волны зависят от параметра  $m$  и координаты надреза. Чем больше  $m$ , тем больше величина сигнала в отраженной волне. Зависимости сдвига фазы в отраженной волне от параметра  $m$  и различных значений  $\xi_c$  при  $n = 0.1$  приводятся на рис. 3. С ростом параметра  $m$  происходит увеличение сдвига фазы. Видна периодическая зависимость сдвига фазы в отраженной волне от положения надреза  $\xi_c$ .

На рис. 4 приводятся зависимости коэффициентов  $k_r$  и  $k_t$  от параметров  $m$  и  $n$  для координаты надреза  $\xi_c = 0.5$ . С ростом параметра  $m$  происходит увеличение коэффициента отражения  $k_r$  и уменьшение коэффициента прохождения  $k_t$ .

### 3. Обратная задача

Могут быть использованы различные способы определения параметров надреза в стержне в зависимости от измеряемых ха-

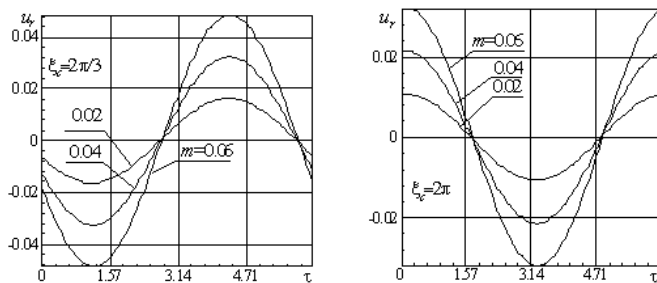


Рис. 2

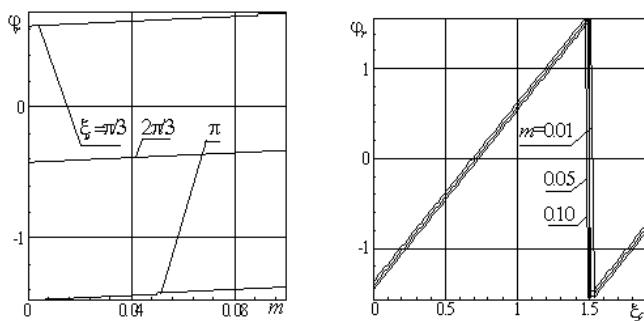


Рис. 3

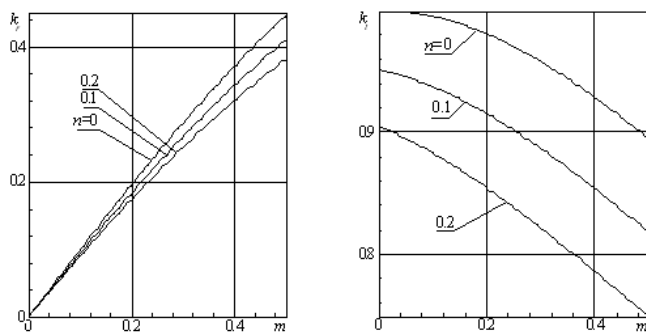


Рис. 4



рактических волн с помощью приборных средств.

1) *Выделение отраженных волн, использование данных измерений перемещения в два момента времени.* Выделение отраженных волн может быть достигнуто, например, сравнением данных замеров в точке  $\xi = 0$  в стержне с надрезом и в таком же стержне без надреза. Можно также использовать сравнение данных в одном и том же стержне по истечении некоторого времени, достаточного для развития наметившегося повреждения. Могут быть и другие способы выделения отраженных волн. Если обозначить через  $(u_r)_1$  и  $(u_r)_2$  замеренные значения перемещения в точке  $\xi = 0$  в моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в пределах полупериода колебания, причем, для простоты принять  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = \pi/2$ , то из (14) и (16) следует система уравнений:

$$\begin{aligned} (u_r)_1 e^{2n\xi_c} &= \eta m [\cos 2\xi_c - (m+n) \sin 2\xi_c], \\ (u_r)_2 e^{2n\xi_c} &= \eta m [(m+n) \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c]. \end{aligned} \quad (21)$$

Параметры  $m$  и  $\xi_c$  определяются из (21) при заданных значениях  $(u_r)_1$ ,  $(u_r)_2$  и  $n$ . Система (21) может быть решена численно.

2) *Выделение отраженных волн, использование данных измерений амплитуды и фазы волны.* При обозначениях последних через  $(u_r)_{\max}$  и  $(\varphi_r)$ , из (17), (18) следует

$$(u_r)_{\max} = \sqrt{\eta} m e^{-2n\xi_c}, \quad \text{tg}(\varphi_r) = \frac{(m+n) \sin 2\xi_c - \cos 2\xi_c}{(m+n) \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c}. \quad (22)$$

3) *Измерение суммарной волны в два момента времени.* Обозначая в (13), (14), (16) через  $(u_s)_1$  и  $(u_s)_2$  максимальные значения перемещения в точке  $\xi = 0$  в суммарной волне в моменты времени  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = \pi/2$ , приходим к системе:

$$\begin{aligned} (u_s)_1 e^{2n\xi_c} &= \eta m [\cos 2\xi_c - (m+n) \sin 2\xi_c], \\ [(u_s)_2 - 1] e^{2n\xi_c} &= \eta m [(m+n) \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c]. \end{aligned} \quad (23)$$

4) *Измерение амплитуды ( $C$ ) и фазы ( $\delta$ ) суммарной волны.* При этом из (19) следуют уравнения:

$$(C) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \text{tg}(\delta) = -C_1/C_2, \quad (24)$$

где  $C_1(m, \xi_c)$  и  $C_2(m, \xi_c)$  даны в (20).

5) *Измерение фаз.* Если известны сдвиги фаз в отраженной и проходящей волнах ( $\varphi_r$ ) и ( $\varphi_t$ ), то могут быть использованы формулы (18).

6) *Измерение коэффициентов отражения  $k_r$  и прохождения  $k_t$ .* Из соотношений (18) следует, что по известным коэффициентам отражения  $k_r$  и прохождения  $k_t$  можно определить параметр  $m$  и положение надреза  $\xi_c$ :

$$m = \frac{k_r}{k_t}, \quad \xi_c = -\frac{1}{2n} \ln(k_r^2 + 2nk_r k_t + k_t^2), \quad (n \neq 0). \quad (25)$$

На рис. 5 приводятся зависимости параметра  $m$  от коэффициента прохождения  $k_t$  для различных значений коэффициента затухания  $n$  и зависимости координаты надреза  $\xi_c$  от коэффициента прохождения  $k_t$  для различных значений коэффициента отражения  $k_r$  при  $n = 0.1$ . Видно, что с ростом коэффициента прохождения  $k_t$  происходит уменьшение параметра  $m$  и координаты надреза  $\xi_c$ .

Возможно использование и других измерений параметров падающей, отраженной от надреза и проходящей волн.

Требования о повышенной точности измерений с помощью приборных средств и регуляризации в обратной задаче являются обычными [3]. Они здесь не рассматриваются.

#### 4. Случай малых значений $m$ и $n$

При малых значениях безразмерных величин, характеризующих размеры надреза и степень затухания волн, можно оставить в соотношениях только первые степени  $m$  и  $n$  по сравнению с единицей. При этом (14), (15) имеют вид:

$$\begin{aligned} u_r &= m(1 - 2n\xi_c + n\xi) \cos(\tau + \xi - 2\xi_c), & -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \\ u_t &= (1 - n\xi) [-m \cos(\tau - \xi) + \sin(\tau - \xi)], & \xi_c \leq \xi \leq \infty, \end{aligned} \quad (26)$$

а выражение (17):

$$\begin{aligned} u_r &= m(1 - 2n\xi_c + n\xi) \sin[(\tau + \xi) - \varphi_r], & -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \\ u_t &= (1 - n\xi) \sin[(\tau - \xi) - \varphi_t], & \xi_c \leq \xi \leq \infty, \end{aligned} \quad (27)$$

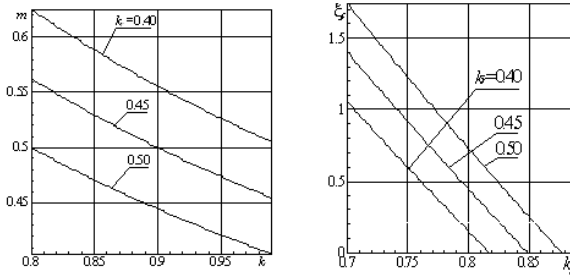


Рис. 5

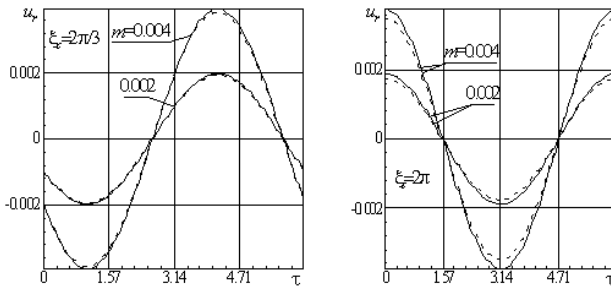


Рис. 6

причем в (18) выражение для  $\varphi_r$  не меняется, а для  $\varphi_t$  справедливо приближение  $\operatorname{tg} \varphi_t = m$ . В рассматриваемом приближении амплитуда отраженной волны, отнесенная к величине падающей волны, имеет порядок  $m$ , а амплитуда проходящей волны отличается от падающей на величину  $m$ . Соответственно упрощаются формулы (19), (20) для перемещения в суммарной волне в точке наблюдения ( $\xi = 0$ ). Очевидное упрощение происходит в (21)–(24).

На рис. 6 приводятся зависимости перемещения элемента стержня в отраженной волне от  $\tau$  для коэффициента затухания  $n = 0.01$  при  $\xi = 0$  для различных значений  $\xi_c$ . Зависимости по точным формулам (14)–(16) показаны сплошными линиями, а по формулам (26) — пунктирными линиями.

При возбуждении продольных волн в стальном стержне ( $a = 5000$  м/с) с частотой  $\omega/2\pi = 50$  Гц (и соответствующей длиной волны  $L = 2\pi a/\omega = 100$  м), в котором имеется надрез размерами  $l = 10^{-3}$  м и  $f = F/3$ , параметр  $m = 10^{-4}$ . Таким образом, в случае длинных волн, малых отношений  $l/L$  и неглубоких надрезов величина  $m$  существенно меньше единицы. Выше было сказано также о малом параметре  $n$  (для определенности можно положить  $n \sim m$ ). Принимая, кроме того, что надрез находится на расстояниях, не сильно превышающих длину волны, для приближенного анализа выражения (14)–(20) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} u_r &= m \cos(\tau + \xi - 2\xi_c), & -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \\ u_t &= \sin(\tau - \xi), & \xi_c \leq \xi \leq \infty, \\ u_r &= m \sin(\tau + \xi - \varphi_r), & -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \\ u_t &= \sin(\tau - \xi - \varphi_t), & \xi_c \leq \xi \leq \infty, \\ \operatorname{tg} \varphi_r &= -\operatorname{ctg} 2\xi_c, \operatorname{tg} \varphi_t = m, \\ C_1 &= m \cos 2\xi_c, C_2 = 1 + m \sin 2\xi_c. \end{aligned} \quad (28)$$

На рис. 7 приводятся зависимости сдвига фаз в отраженной волне от параметра  $m$  и координаты надреза  $\xi_c$  для коэффициента затухания  $n = 0.1$  по точным формулам (14)–(16) сплошными линиями и по формулам (28) пунктирными линиями.

В таком приближении отраженная волна пропорциональна параметру  $m$ , а проходящая волна «не замечает» наличие надреза. Параметры надреза могут быть выражены явно через измеряемые величины. Например, из (21) следует

$$\operatorname{tg} 2\xi_c = (u_r)_2 / (u_r)_1, \quad m = \sqrt{(u_r)_1^2 + (u_r)_2^2}. \quad (29)$$

Для коэффициента затухания  $n = 0.01$  при  $\xi = 0$  для различных значений  $(u_r)_2$  на рис. 8 приведены зависимости координаты надреза  $\xi_c$  и параметра  $m$  от  $(u_r)_1$  по точным формулам (14), (16) сплошными линиями, по приближенным формулам (29) — штриховыми линиями. Для малых значений  $n$  видно удовлетворительное совпадение результатов по приближенным и точным форму-

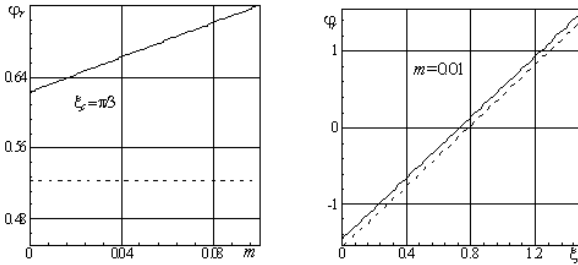


Рис. 7

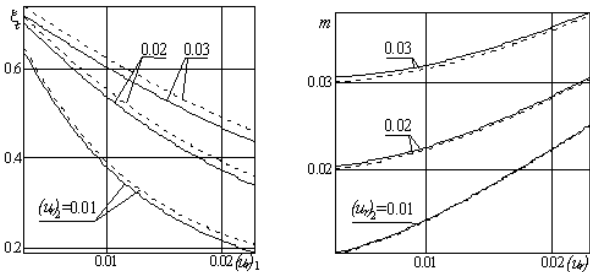


Рис. 8

лам. Например, для  $n = 0.0001$ ,  $\xi_c = 5\pi/4 = 3.927$ ,  $m = 0.0001$  в прямой задаче по точным формулам (14), (16) или из выражений (21) определяются  $(u_r)_1 = 0.316 \cdot 10^{-8}$  и  $(u_r)_2 = 0.9992 \cdot 10^{-4}$ . Решение обратной задачи с использованием этих значений  $(u_r)_1$  и  $(u_r)_2$  в формулах (29) дает  $\xi_c = 3.927$ ,  $m = 0.999 \cdot 10^{-4}$ . Аналогично, для  $n = 0.01$ ,  $\xi_c = \pi = 3.1415$ ,  $m = 0.01$  находятся  $(u_r)_1 = 0.009388$  и  $(u_r)_2 = 0.0001864$  по точным формулам, по которым с помощью приближенных формул (29) определяются  $\xi_c = 3.1514$ ,  $m = 0.00939$ .

Анализ отраженных и суммарных волн позволяет сделать вывод о том, что амплитуда и сдвиг фазы зависят от величины и положения надреза на стержне. Чем больше параметр  $m$ , тем больше угол сдвига фазы в отраженной волне при одном и том же  $\xi_c$ . Получена линейная зависимость коэффициента отра-

жения от параметра надреза. Полученная методика может быть применена для разработки системы диагностирования повреждений длинных стержневых систем.

### Список литературы

- [1] Сидоров Б. В., Мартынов С. А. Рекомендуемая технология диагностики подземных трубопроводов // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. С. 18–19.
- [2] Ваньков Ю. В., Казаков Р. Б., Яковлева Э. Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов // Электронный журнал «Техническая акустика», <http://ejta.org> 2005, 5.
- [3] Ильгамов М. А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды института механики УНЦ РАН. Вып. 5. Уфа: «Гилем». 2007. С. 201–211.
- [4] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
- [5] Ватульян А. О., Солуянов Н. О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.
- [6] Ильгамов М. А., Хакимов А. Г. Отражение продольной бегущей волны в стержне с повреждением // Контроль. Диагностика. 2009. № 7. С. 43–48.