



ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПУЗЫРЬКА ПРИ ЕГО СВЕРХСЖАТИИ¹

Нигматулин Р. И. , Ильгамов М. А.** , Аганин А. А.****

*Институт океанологии РАН, Москва

**Институт механики УНЦ РАН, Уфа

***Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

Аннотация. Рассматривается отклонение от сферической формы пузырька при его сверхсжатии в жидкости. Основное внимание направлено на установление закона распределения начальной несферичности пузырька по сферическим гармоникам. Наиболее вероятным является распределение с убыванием амплитуды гармоник по мере роста их номера. Такое распределение подтверждает анализ эволюции возмущений сферичности пузырька при его коллапсе вблизи твердой стенки и при слиянии двух одинаковых пузырьков. Обсуждаются также влияние искажения сферичности пузырька при сжатии на деформацию возникающей в его полости ударной волны и зависимость эволюции несферичности пузырька от нелинейного взаимодействия между искажениями в виде разных гармоник.

1. Введение

Прошло около 15 лет, как по инициативе Р. И. Нигматулина было начато теоретическое изучение сверхсжатия кавитационных пузырьков при акустическом воздействии на жидкость. Исследовались многие аспекты суперсжатия. Данное сообщение посвящено лишь одному из них, а именно, устойчивости сферической формы пузырька при колебаниях давления в жидкости.

¹Работа выполнена в рамках приоритетных программ Президиума РАН № 20, 22 и при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00215)

Приводятся некоторые последние результаты.

Устойчивость — перегруженный термин. Поэтому сразу оговоримся, что ниже устойчивость сферической формы пузырька понимается в смысле А. М. Ляпунова [1]: если при сколь угодно малых возмущениях величина какой-нибудь характеристики системы со временем всё более и более отличается от ее значения в невозмущенном движении (в рассматриваемом случае — в чисто радиальном), то движение системы по отношению к этой характеристике называется неустойчивым. В противном случае движение устойчиво.

При рассмотрении устойчивости сферической формы пузырька такой характеристикой является безразмерная амплитуда

$$|\varepsilon_i| = |a_i|R^{-1},$$

представляющая собой отношение амплитуды размерного отклонения $a_i(t)$ формы поверхности пузырька

$$r = R(t) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t)Y_i(\theta)$$

от сферической в виде i -той сферической поверхностной гармоники $Y_i(\theta)$ к текущему радиусу пузырька $R(t)$ (здесь r — радиальная координата, отсчитываемая от центра пузырька; t — время; θ — широтный угол сферической системы отсчета). Величина амплитуды относительного отклонения $\varepsilon_i(t)$ и определяет степень искажения сферичности пузырька в каждый момент времени.

Механизмы развития возмущений сферичности пузырька в процессе его колебаний на длительном промежутке времени при акустическом воздействии на жидкость и в ходе однократного расширения–сжатия пузырька различны. Далее рассматривается только последний случай, причем для простоты давление внутри пузырька принимается равным нулю. Такое допущение является приемлемым для расширения и сжатия парового

пузырька (за исключением заключительной стадии схлопывания), так как в обычных условиях давление насыщенного пара на несколько порядков меньше амплитуды его акустических колебаний в жидкости.

2. Эволюция несферичности пузырька

Процесс расширения пузырька будет устойчивым, даже если a_i будет возрастать пропорционально радиусу R . Однако на самом деле величина a_i остается близкой к постоянной на большей части стадии расширения (несколько возрастает для высоких мод). Поэтому по характеристике ε_i сферическая форма пузырька при расширении является абсолютно устойчивой, т.е. никаким разумным перебором значений входных данных нельзя добиться увеличения $|\varepsilon_i|$ со временем.

На стадии сжатия амплитуда искажения $|\varepsilon_i|$ меняется по закону

$$|\varepsilon_i| \approx |\varepsilon_{mi}| \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{-1/2} \left|f_i \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)\right|, \quad t_c \approx \beta R_m \left(\frac{\rho}{p_\infty}\right)^{1/2}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{mi} = \varepsilon_i(R_m)$; R_m — радиус пузырька в начале сжатия; ρ — плотность жидкости; p_∞ — давление жидкости на удалении от пузырька; t_c — момент коллапса пузырька (момент конца сжатия); f_i — функция, осциллирующая с переменным периодом, причем $|f_i| \sim 1$. Число $\beta \approx 1$ (найденное Рэлеем значение β равно 0.915; согласно [2, 3] оно равно 0.863).

С учетом соотношения

$$1 - \frac{t}{t_c} \approx \left(\frac{R}{R_m}\right)^{5/2}$$

изменение $|\varepsilon_i|$ можно также выразить через текущий радиус

$$|\varepsilon_i| \approx |\varepsilon_{mi}| \left(\frac{R_m}{R}\right)^{5/4} f_i \left(\frac{R_m}{R}\right). \quad (2)$$

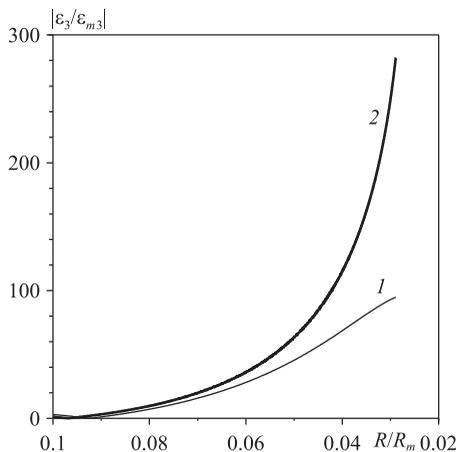


Рис. 1. Эволюция амплитуды несферичности пузырька в виде третьей гармоники ($i = 3$) в конце стадии сжатия. Кривая 1 — приближенное решение (2), кривая 2 — численное решение [3]

Формулы (1), (2) показывают, что при сжатии амплитуда возмущений сферичности пузырька возрастает. Таким образом, сферическая форма пузырька при сжатии неустойчива.

Неустойчивость сферичности пузырька при сжатии в случае возмущения по гармонике $i = 3$ иллюстрирует рис. 1. Кривая 1 соответствует приближенному решению (2), кривая 2 — численному решению задачи с описанием радиального движения по модели Р. И. Нигматулина [3]. Видно, что несферичность пузырька бурно нарастает в самом конце сжатия (при $R/R_m < 0.1$). Различие между кривыми объясняется, в основном, влиянием пара в пузырьке, что при выводе (2) не учитывается.

Неустойчивость движения системы не обязательно означает возникновение в ней катастрофических изменений, ее разрушение. Во-первых, нелинейные свойства системы могут значительно ограничивать рост возмущений. Во-вторых, могут быть какие-то физические ограничители возмущений, проявляющиеся при значительных изменениях. В-третьих, нарастание амплиту-

ды возмущений может быть ограничено в силу конечности развития процесса во времени. Временные рамки процесса могут быть связаны с самой постановкой задачи. Так, в рассматриваемом случае процесс сжатия пузырька ограничен временем достижения радиусом пузырька своего минимального значения (радиуса коллапса). В результате процесс сжатия заканчивается при конечных значениях амплитуды несферичности, которая определяется уровнем вносимых извне возмущений в начале сжатия (при $R = R_m$). В связи с этим возникает два вопроса: как отражается искажение формы пузырька в конце сжатия на внутрипузырьковые процессы и каковы уровни возмущений по гармоникам в начале сжатия.

3. Несферичность пузырька и ударные волны в его полости

На рис. 2–4 приведено развитие процесса сжатия эллипсоидального пузырька (т.е. пузырька с начальной несферичностью в виде полинома Лежандра степени $i = 2$) [4] в его финальной стадии в условиях экспериментов по акустической кавитации дейтерированного ацетона (температура жидкого дейтерированного ацетона $T = 273.15$ К, давление $p = 15.2$ бар и т.д.) [5] при $R_m = 500$ мкм, $\varepsilon_{m2} = -0.0033$. На рис. 2 изображены радиальные распределения давления и температуры внутри пузырька и в окружающей жидкости в двух сечениях $\theta = 0$ (кривые 1) и $\theta = \pi/2$ (кривые 2). Видно, что в ходе сжатия интенсивность ударной волны довольно быстро возрастает. При этом в момент t_3 максимальные значения температуры на фронте ударной волны на разных лучах различаются уже более чем в 3 раза, а максимальные значения давления в волне сжатия за ее фронтом — примерно в 6 раз.

Из рис. 2 следует, что в процессе сжатия эллипсоидального пузырька давление и температура в его полости могут быть сравнимыми с тем, что достигается при сжатии чисто сферического пузырька. Отметим, что при сравнении сферического и

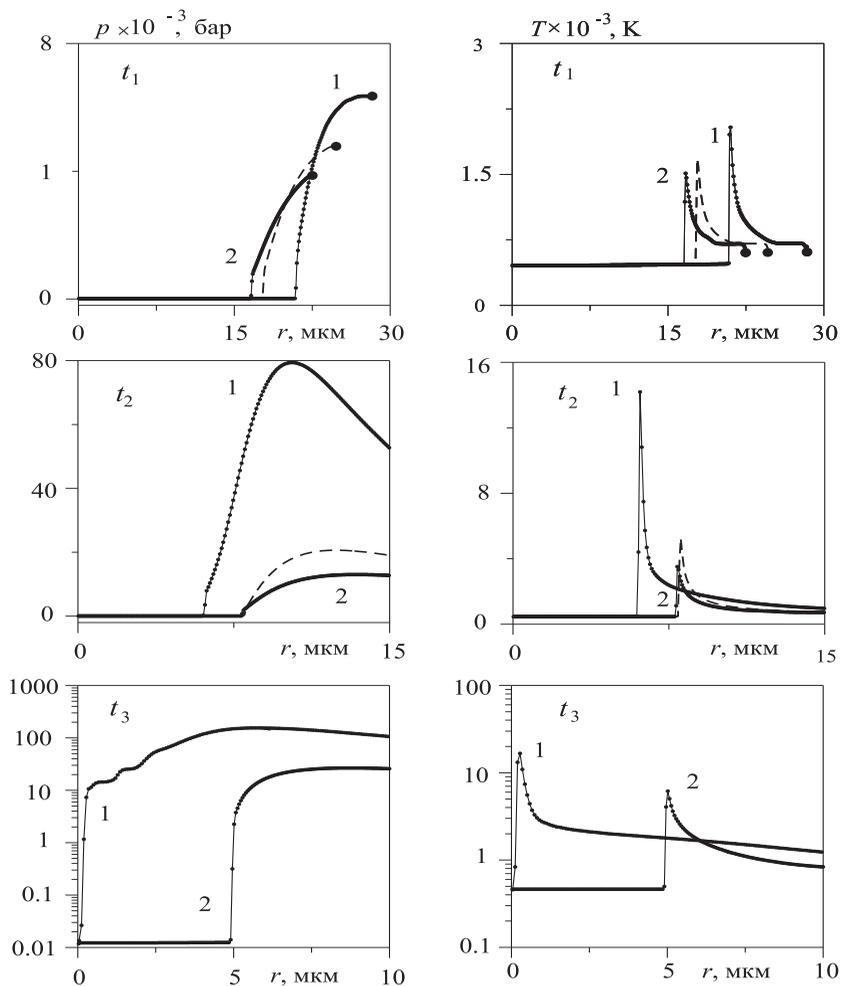


Рис. 2. Радиальные распределения давления p и температуры T внутри пузырька для трех последовательных моментов времени финальной стадии сжатия t_{1-3} в сечениях $\theta = 0$ (кривые 1) и $\theta = \pi/2$ (кривые 2). Пунктирные кривые — случай сжатия чисто сферического пузырька

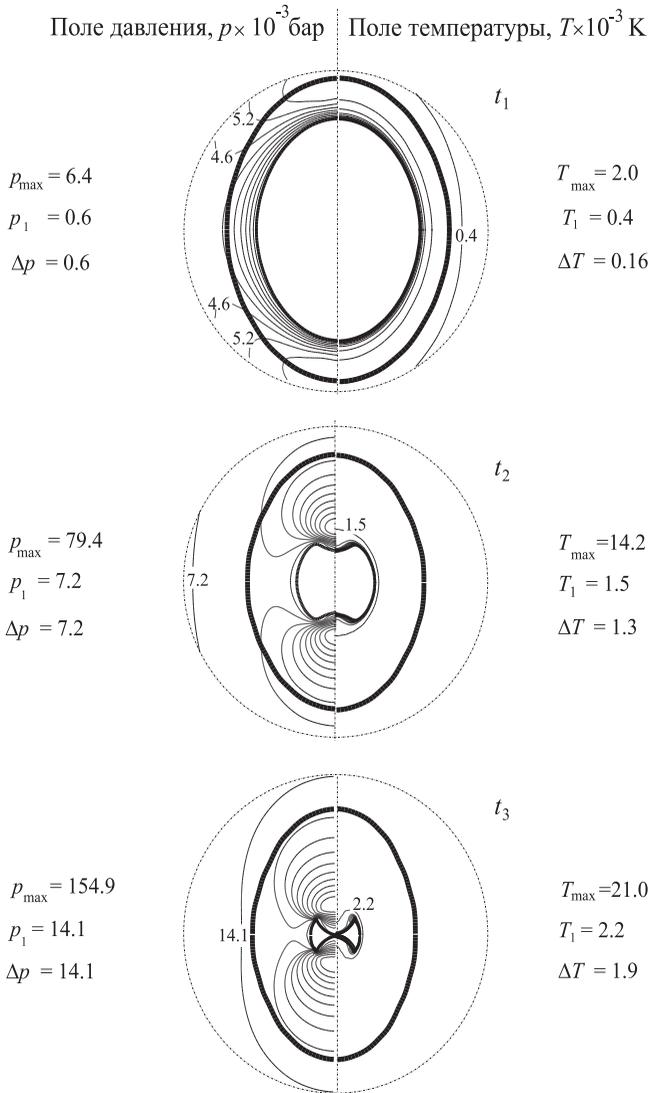


Рис. 3. Изолинии давления и температуры в пузырьке и небольшой его окрестности ($r \leq 30$ мкм) в три представленных на рис. 2 момента времени t_{1-3} финальной стадии сжатия (внешняя жирная линия — поверхность пузырька, внутренняя — поверхность ударной волны)

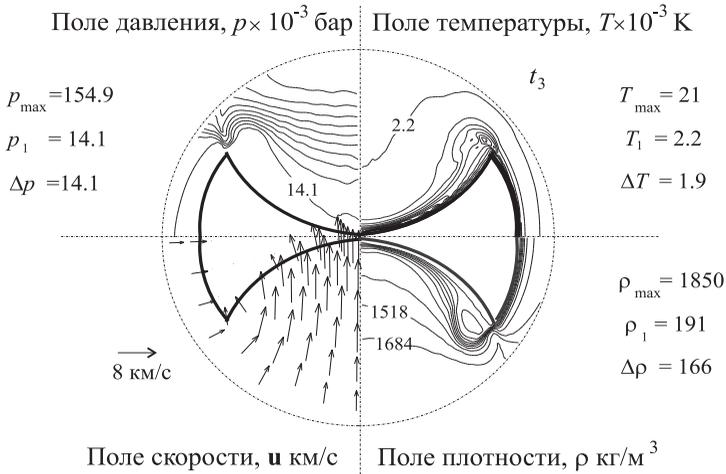


Рис. 4. Изолинии давления, температуры, плотности и векторы скорости среды в пузырьке в момент t_3 в небольшой окрестности его центра $r \leq 6$ мкм

несферического сжатия на рис. 2 и последующих рисунках соответствие моментов времени устанавливается путем совмещения радиуса фронта ударной волны в сферическом случае с радиусом сферической составляющей R_{sh} в представлении фронта ударной волны в виде суммы сферических поверхностных гармоник в несферическом случае. В процессе сжатия форма пузырька изменяется от приплюснутого по оси симметрии эллипсоида в начале сжатия до вытянутого в его конце.

На рис. 5 приведены изолинии давления и температуры в те же, что и на рис. 4, моменты времени. (Для каждой функции изображено 10 линий уровня с равномерным распределением между ее максимальным и минимальным значениями).

Видно, что по мере приближения к центру пузырька ударная волна довольно сильно деформируется. Сначала (момент t_1) ее форма подобна форме поверхности пузырька (вытянутому по оси симметрии эллипсоиду). Затем (момент t_2) у нее сверху (и снизу) появляется вмятина. В ходе дальнейшего сжатия форма

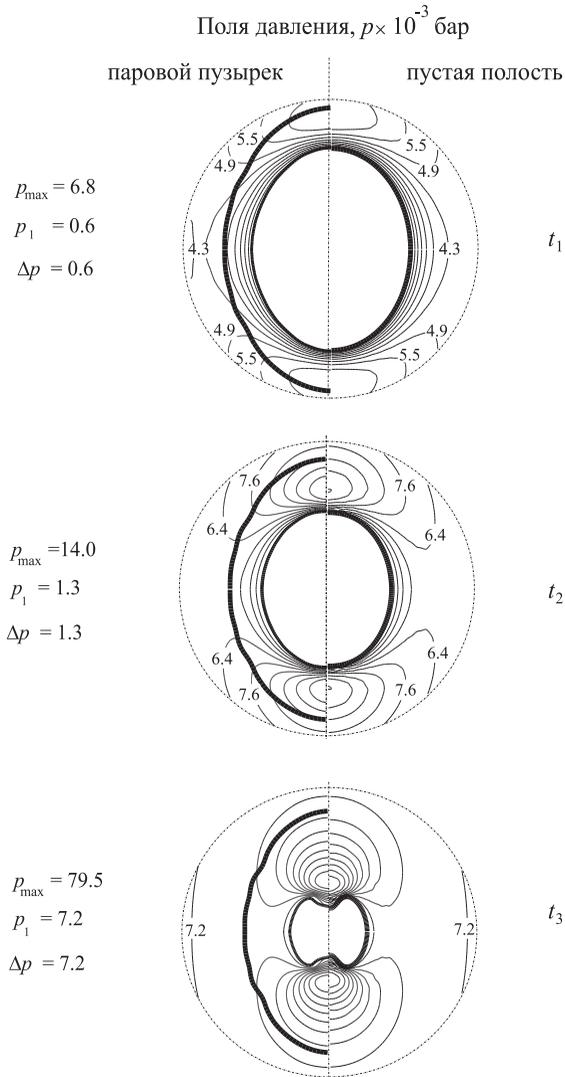


Рис. 5. Изолинии давления в пузырьке и окружающей жидкости ($r \leq 30$ мкм) (колонка слева) и в окружающей полости жидкости (колонка справа) в три момента времени t_{1-3} финальной стадии сжатия

ударной волны еще более усложняется. При этом поверхность пузырька продолжает иметь вид эллипсоида, вытянутого в направлении оси симметрии.

Более детально динамика газа в небольшой окрестности ($r \leq 6$ мкм) центра пузырька в момент t_3 иллюстрируется на рис. 4. По изолиниям давления и плотности видно, что ко времени t_3 в верхней (и нижней) части осевого сечения фронта ударной волны при $\theta \approx \pi/3$ ($\theta \approx 2\pi/3$) возникает заострение, связанное с углублением возникшей ранее в интервале $t_1 < t < t_2$ вмятины в области оси симметрии $\theta \approx 0$. При этом температура принимает большие значения не только непосредственно за фронтом, но и в небольшой области, отходящей в виде полукруга вверх от угловой точки профиля волны.

Область высоких давлений не совпадает с областью высоких температур. Она располагается в окрестности оси симметрии на довольно большом удалении от фронта волны. Сильно отличается от сферического и поле вектора скорости в представленном на рис. 4 фрагменте пузырька.

Значительная часть среды в этом фрагменте движется не радиально к центру пузырька, а сначала в направлении области с высоким давлением, а затем оттуда (с очень большой скоростью) вдоль оси симметрии к центру пузырька.

На рис. 5 приведены поля давления и формы ударной волны и пустой полости на заключительной высокоскоростной стадии сжатия кавитационного пузырька и схлопывания аналогичной пустой полости.

Видно, что форма пустой полости во многом подобна форме фронта ударной волны (по крайней мере, до тех пор, пока радиус фронта ударной волны не достигает половины радиуса кавитационного пузырька).

Поля давления в жидкости при сжатии пустой полости и за фронтом ударной волны (и внутри пузырька, и в окружающей жидкости) в случае сжатия кавитационного пузырька также являются схожими.

Такое согласование довольно любопытно. Оно открывает дополнительные возможности для анализа ударной волны (известны ее форма и скорости точек в каждый момент времени, они задаются формулами для пустого пузырька). В частности, задачу можно свести к одномерной (по радиусу).

4. О начальном распределении несферичности пузырька по гармоникам

Распределение начального отклонения по гармоникам является важным для изучения динамики пузырька и анализа эволюции ударной волны в его полости. Так, если начальная форма пузырька возмущена по низким гармоникам ($i = 2, 3$), то в его полости образуются отдельные зоны с значениями давления, плотности, температуры, сравнимыми с тем, что достигается при чисто сферическом сжатии.

Если же начальная форма пузырька возмущена по высоким гармоникам, то около его поверхности возникает множество мелких зон с высокими значениями указанных параметров.

В этом случае повышается вероятность перемешивания внутрипузырькового вещества и окружающей жидкости, т.е. может образоваться слой перемешивания. Формирование такого слоя облегчается тем, что в конце сжатия плотности обеих сред становятся сравнимыми.

Перемешивание может занять почти весь объем внутри пузырька, что, естественно, отразится на степени сжатия содержимого пузырька. Например, известно [6], что при лазерном обжати сферической оболочки размером порядка 1 мм образуется слой мелкомасштабных возмущений, где происходит перемешивание материала оболочки и внутреннего дейтерированного вещества, и это сильно уменьшает эффективность сжатия.

Более вероятным распределением начального отклонения по гармоникам является убывание их амплитуды по мере роста номера гармоники i (как $i^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, ниспадающий участок распределения Гаусса и т.д. [7]).

Начальное отклонение от сферической формы возникает ввиду наличия гидростатического давления, влияния близких границ, слияния пузырьков, неоднородности гидроакустического воздействия, тепловых флуктуаций и т.д.

Если длины волн неоднородностей гидроакустического воздействия имеют порядок линейных размеров пузырька (и больше), то амплитуды гармоник начального отклонения являются по мере возрастания i убывающими. Такому закону распределения начального возмущения способствуют также и эффекты вязкости и поверхностного натяжения, что особенно проявляется при сжатии малых пузырьков.

В настоящее время строгое определение конкретного вида начальных отклонений не представляется возможным. Следует отметить, что аналогичная проблема имеет место и в установлении структуры начальных возмущений в случае лазерного обжатия мишеней [6].

В настоящей работе делается попытка качественной оценки спектра несферичности пузырька в начале сжатия, исходя из двух примеров. Первый пример связан со схлопыванием пузырька вблизи стенки твердого тела. Другим примером является слияние двух одинаковых пузырьков в ходе их расширения под действием больших растягивающих напряжений в жидкости.

5. Неустойчивость пузырька с образованием струи

На основании данных высокоскоростной киносъемки известно, что схлопывание пузырька вблизи твердого тела происходит с образованием микроструи, направленной к поверхности тела [8]. На рис. 6 слева приведена форма пузырька, полученная в эксперименте с применением высокоскоростной киносъемки [9], а справа — форма пузырька, построенная по формуле

$$r = R \left[1 + \varepsilon_2^* \sum_{i=2}^{\infty} (i-1)^{-\alpha} Y_i(\theta) \right], \quad (3)$$

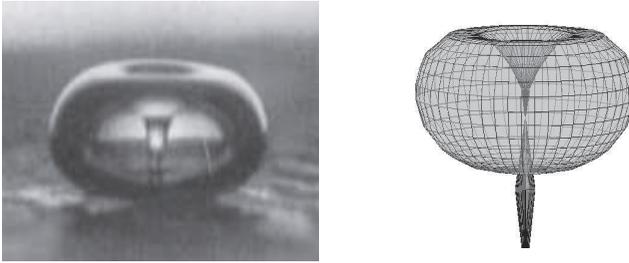


Рис. 6. Схлопывание пузырька у жесткой стенки с образованием струи на его поверхности. Слева — кадр высокоскоростной кино съемки [9], справа — расчет по формуле (3) при $\alpha = 1$, $\varepsilon_2^* = 0.8$, $Y_i(\theta) = P_i(\cos \theta)$

при $\alpha = 1$; $\varepsilon_2^* = 0.8$; $Y_i(\theta) = P_i(\cos \theta)$; P_i — полином Лежандра степени i . Видно, что принятое в данном выражении убывание амплитуды гармоник с ростом номера i по довольно простому закону $(i - 1)^{-\alpha}$ с $\alpha = 1$ качественно хорошо описывает наблюдаемую в экспериментах форму пузырька.

Такое согласование можно рассматривать как аргумент в пользу того, что начальное возмущение сферичности пузырька имеет вид суммы гармоник с убывающей зависимостью их амплитуды от номера i .

6. Слияние двух одинаковых пузырьков

Рассмотрим закон распределения по гармоникам начальных отклонений формы пузырька от сферической в случае слияния двух одинаковых сферических пузырьков под действием больших растягивающих напряжений в жидкости. Увеличение радиуса R , возникающего при слиянии пузырька при его расширении, в таких условиях происходит с мало меняющейся скоростью \dot{R} (здесь и далее точка сверху означает производную по времени) [2]. Это обстоятельство позволяет принять скорость \dot{R} постоянной, так что в уравнении для радиуса пузырька будем иметь $R|\dot{R}| \ll \dot{R}^2$. Кроме того, для простоты не будем учитывать зависимость радиального движения от поверхностного натяжения

σ ($2\sigma \ll |p_\infty|R$ при $\sigma = 0.07 \text{ кг/с}^2$, $p_\infty = -15 \text{ бар}$, $R = 1 \text{ мкм}$). Тогда можно записать

$$\dot{R} = \left(-\frac{2p_\infty}{3\rho}\right)^{1/2}, \quad R = R_0 + \left(-\frac{2p_\infty}{3\rho}\right)^{1/2} t,$$

где принято $R = R_0$; $\dot{R} = 0$ при $t = 0$; R_0 — начальный радиус возникающего при слиянии пузырька.

Начальный радиус R_0 образованного слиянием пузырька и распределение его начальной несферичности по гармоникам можно определить, учитывая ортогональность сферических гармоник и используя уравнение

$$r = R_0 + \sum_{i=2}^{\infty} a_{0i} P_i(\cos \theta). \quad (4)$$

Однако его значение проще определяется на основе равенства объема вновь образованного слиянием пузырька объему сливающихся пузырьков. С учетом этого считается, что радиус R_0 в 1.25 раза больше радиуса сливающихся пузырьков R_* . Распределение начального отклонения от сферической формы пузырька принимается в следующем виде

$$a_{0i} = a_{02}(-1)^{(i+2)/2}(i-1)^{-\alpha}, \quad i = 2, 4, 6, \dots \quad (5)$$

где α — мера затухания амплитуды гармонических возмущений при росте i . Из рис. 7(a,b) следует, что при $a_{02} = 0.8R_0$, $\alpha = 1$ такое распределение вполне удовлетворительно описывает указанную начальную форму.

Без учета влияния вязкости жидкости уравнение изменения амплитуд малых размерных отклонений имеет вид

$$\ddot{a}_i + \frac{3\dot{R}}{R}\dot{a}_i + \left[\frac{(i^2-1)(i+2)\sigma}{\rho R^3} - (i-1)\ddot{R}\right] a_i = 0. \quad (6)$$

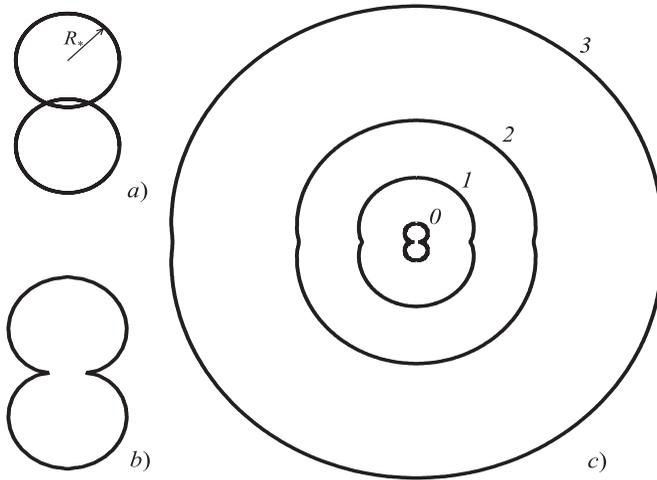


Рис. 7. Изменение формы гантелеобразного пузырька, образованного слиянием двух одинаковых сферических пузырьков радиусом R_* (а), в ходе его сильного расширения (с). Начальная форма гантелеобразного пузырька аппроксимируется в расчетах формой (b), полученной по формулам (4), (5) при $R_0 = 1.25R_*$, $a_{02} = 0.8R_0$, $\alpha = 1$

В нашем качественном анализе эволюции формы образованного слиянием пузырька при его расширении влияние первого члена \ddot{a}_i в уравнении (6) учитываться не будет [2]. В случае малых пузырьков и больших отрицательных напряжений в жидкости и больших скоростей движения границы может быть $R|\ddot{a}_i| < 3|\dot{R}\dot{a}_i|$.

Кроме того, отбрасывается второй член в квадратных скобках по сравнению с первым, что допустимо на значительной части стадии расширения. Уравнение (6) принимает вид $\dot{a}_i + \lambda_i R_0 R^{-2} a_i = 0$, где $\lambda_i = (i^2 - 1)(i + 2)\sigma / (3\rho R_0 \dot{R}^2)$. Его интегрирование дает

$$a_i = a_{0i} e^{-\lambda_i(R-R_0)/R}. \quad (7)$$

Как видно, амплитуда отклонения уменьшается с ростом радиуса пузырька и тем больше, чем больше номер гармоники i .

На рис. 7(с) показано изменение формы пузырька, образовавшегося при слиянии двух пузырьков, в процессе его расширения при $\sigma = 0.07$ кг/с², $p_\infty = -15$ бар, $R_0 = 1$ мкм, $\dot{R} = 30$ м/с, $\rho = 1000$ кг/м³, $\varepsilon_{02} = 0.8$, $\alpha = 1$. Видно, что при сильном расширении несферичность пузырька довольно быстро уменьшается. Отметим, что при описании эволюции отклонения с использованием приближенного выражения (7) основной вклад в уменьшение несферичности пузырька при расширении вносит увеличение его радиуса.

7. Нелинейные эффекты при деформации пузырька

Большинство приведенных выше результатов основывается на линейном уравнении относительно амплитуды искажений сферичности пузырька ε_i или a_i . Возникает вопрос об их точности при значениях $|\varepsilon_i|$, не малых по сравнению с единицей.

В случае длительного процесса колебаний пузырька под действием акустического возбуждения или скачкообразного изменения давления жидкости разница между линейным и нелинейным решениями четко проявляется (рис. 8(а)). Решение линейного уравнения экспоненциально возрастает со временем, а нелинейного уравнения ограничено.

Однако в начале колебаний, а также при однократном сжатии пузырька линейное и нелинейное решения заметно не различаются (рис. 8(б)). Это дает основание утверждать, что нелинейное уравнение необходимо применять при рассмотрении параметрической неустойчивости.

При однократном сжатии удовлетворительный результат дает и линейное решение, хотя непонятно, почему это так.

8. Заключение

Итак, процесс сжатия пузырька является неустойчивым, причем бурный рост относительного отклонения от сферичности

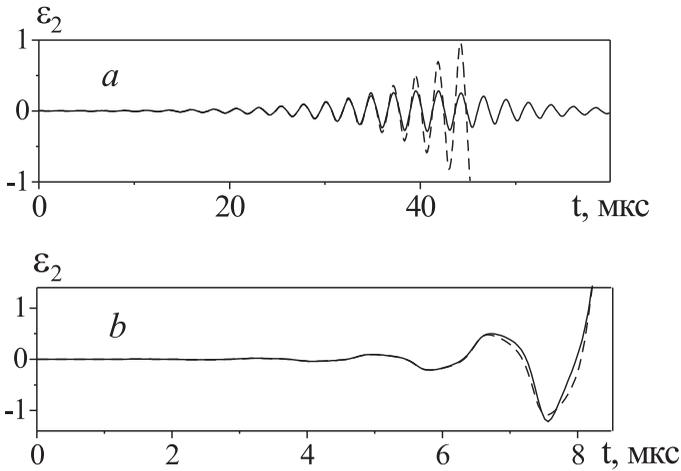


Рис. 8. Развитие эллипсоидальных искажений ($i = 2$) сферической формы пузырька при скачкообразном изменении давления жидкости $p_\infty = p_0 + p_a$ при $p_0 = 1$ бар, $\varepsilon_{02} = 10^{-3}$ и $p_a = 0.3$ бар (a) и $p_a = 1.1$ бар (b). Штриховые линии — линейное решение, сплошные — решение с учетом квадратичной нелинейности [10]

происходит после прохождения границей 90–95% от начального радиуса, особенно при торможении из-за противодействия. На этой стадии в полости пузырька от его поверхности отходит ударная волна, форма которой определяется распределением по гармоникам начальной (и промежуточной) несферичности межфазной поверхности.

Отклонения по низким гармоникам приводят к образованию отдельных зон внутри пузырька, в которых параметры волны достигают значений, сравнимых с тем, что получается в случае чисто радиального схождения. Начальные отклонения по высшим гармоникам могут привести к смешению двух сред, что снижает эффект кумуляции внутри пузырька.

Рассмотрение отдельных примеров позволяет предположить, что по мере роста номера i амплитуда соответствующих гармо-

нических возмущений в составе начального отклонения довольно быстро уменьшается. Меньшие уровни коротковолновых возмущений означают, что вероятность возникновения неблагоприятного для достижения высоких степеней сжатия перемешивания внутрипузырьковой среды и окружающей жидкости уменьшается. Возмущения же по низким гармоникам не препятствует достижению уровней сжатия, характерных для чисто сферического случая.

Для описания убывания амплитуд, составляющих начальное отклонение гармонических возмущений, можно воспользоваться довольно простым законом $(i - 1)^{-\alpha}$, где α — мера убывания ($\alpha > 0$).

Примеры схлопывания пузырьков у твердой стенки и слияния двух одинаковых сферических пузырьков под действием больших растягивающих напряжений в жидкости показывают, что такой закон убывания при $\alpha = 1$ является вполне приемлемым.

Список литературы

- [1] Ляпунов А. М. Общая задача теории устойчивости движения. Гостехиздат, 1949.
- [2] Ильгамов М. А. Качественная теория устойчивости сферической формы полости // Сб. Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 15-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань: Казанский государственный университет им В.И.Ульянова-Ленина. 2006. С. 8–35.
- [3] Аганин А. А., Ильгамов М. А., Нигматулин Р. И., Топорков Д. Ю. Эволюция искажений сферичности кавитационного пузырька при акустическом сверхсжатии // Известия РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 57–69.
- [4] Аганин А. А., Халитова Т. Ф., Хисматуллина Н. А. Метод численного решения задач сильного сжатия несферического кавитационного пузырька // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 1. С. 12–31.

-
- [5] Taleyarkhan R. ., West C.D., Cho J.S. et al. Evidence for Nuclear Emissions During Acoustic Cavitation // Science. 2002. Vol. 295. P. 1868–1873.
- [6] Kull H. J. Theory of the Rayleigh-Taylor instability // Physics Reports. 1991. Vol. 206, № 5. P. 197–325.
- [7] Ильгамов М. А. Перестройка гармоник при динамической потере устойчивости в механических системах // ДАН. 2010. № 5. С. 624–628.
- [8] Kornfeld M. and Suvorov N. On the destructive action of cavitation // App. Phys. 1944. V. 15. P. 495–506.
- [9] Blake J.R., Gibson D.C. Cavitation bubbles near boundaries // An.Rev.Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 99–123.
- [10] Аганин А. А., Ильгамов М. А., Косолапова Л. А., Малахов В. Г. Эллипсоидальные колебания газового пузырька при периодическом изменении давления в жидкости // Известия РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 45–52.