УДК 621.9.048

Решение задач об автомодельном электрохимическом формообразовании с помощью гидродинамической аналогии

А. Р. Ураков, А. А. Гордеев, С. С. Поречный

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Аннотация. Рассматриваются автомодельные (при сохранении геометрического подобия границ) решения нестационарных задач Хеле-Шоу применительно к электрохимическому формообразованию. Для решения используется задача обтекания дуги окружности, на границе которой условие для функции Жуковского имеет вид, аналогичный краевому условию автомодельной задачи.

Ключевые слова: автомодельные решения, аналитические функции

1. Введение

Исследование электрохимической обработки материалов (ЭХО) предполагает изучение формы обрабатываемой поверхности, образующейся в ходе растворения материала в электролите. Даже в случае идеального процесса (при допущении однородности электролита и выполнении закона Фарадея) задача в общем случае осложнена нестационарностью формы зазора между электродами, поскольку скорость растворения материала различна в разных точках обрабатываемой поверхности и изменяется во времени. В связи с этим, как правило, исследуются случаи стационарного формообразования для разных форм электрода–инструмента (ЭИ), а также случаи начального и предельного формообразования [1].

В данной работе предлагается рассмотреть автомодельный случай нестационарного формообразования, то есть такой, при котором форма

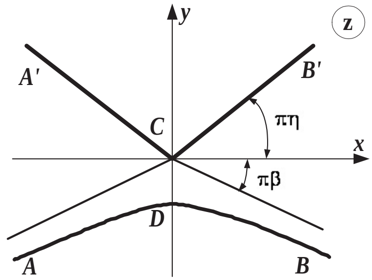

Рис. 1. Физическая плоскость

обрабатываемой поверхности остается геометрически подобной начальной. Обработка приводит только к изменению масштаба межэлектродного пространства, при этом форма эпюры распределения плотностей тока на поверхности материала остается постоянной.

2. Постановка задачи

Схема процесса электрохимического растворения представлена на Рис. 1, где ADB — граница растворяемого материала, C — точка пересечения асимптот кривой ADB. Согласно закону Фарадея изменение комплексной координаты точки определяется по формуле

$$\Delta z = kE\Delta\tau, \tag{1}$$

где $z = x+iy$ — точка, расположенная на обрабатываеой поверхности; τ — время; k — электрохимическая постоянная; E — вектор напряженности электрического поля $E = \operatorname{grad}\varphi = \overline{dW/dz}$ ($W = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал, чертой сверху обозначается операция комплексного сопряжения). Введем функцию:

$$\chi = \mu + i\nu = \ln\left(\frac{z}{b}\right), \tag{2}$$

где b — характерный размер (например, расстояние от точки пересечения асимптот до ближайшей точки обрабатываемой поверхности); α — скорость изменения масштаба в ходе обработки; $z = 0$ — координаты центра подобия.

Тогда краевое условие автомодельности получается подстановкой (2) в (1) в виде [2]:

$$e^{2\mu}\frac{d\nu}{d\psi} = \frac{2k}{\alpha\, b^2}. \tag{3}$$

Это условие сходно с условием обтекания дуги окружности

$$\pm\frac{1}{R} = V_0 e^{\tau}\frac{d\theta}{d\varphi_1}, \tag{4}$$

выраженным через функцию Жуковского:

$$\omega = \ln\frac{1}{V_0}\frac{dW_1}{dz_1} = \tau - i\theta, \quad \tau = \ln\frac{V}{V_0}.$$

Здесь: z_1 — плоскость течения; R — радиус обтекаемой окружности; θ — угол наклона вектора скорости в каждой точке течения; $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ — комплексный потенциал течения; V — скорость течения каждой точке потока; V_0 — характерная скорость.

Теперь достаточно выразить условие (3) через гидродинамические параметры, что позволяет свести задачу к конформным отображениям. Для этого положим $\omega{=}2\chi$ (в этом случае $\tau = 2\mu$, $\theta = -2\nu$) и установим соответствие между электрической и гидродинамической плоскостями комплексного потенциала $W_1 = iW$ (тогда $\varphi_1 = \psi$). При условии равенства констант $RV_0 = \alpha b^2/k$ и знаке «$-$» перед $1/R$, уравнения (3) и (4) совпадают.

После определения производной dW_1/dz_1 решение может быть найдено из соотношения между электрохимической и гидродинамической задачами в виде:

$$z = b\sqrt{\frac{1}{V_0}\frac{dW_1}{dz_1}}.$$

Переходя к решению автомодельных задач, необходимо учесть, что в связи с автомодельностью (самоподобием) не только форма обрабатываемой поверхности, но и форма электрода–инструмента (ЭИ) должна быть подобна исходной. Будем рассматривать следующие формы ЭИ: бесконечно удаленный, точечный, двугранный электрод (клин).

В дальнейшем будем предполагать, что форма обрабатываемой поверхности изначально вписана в некоторый угол ACB, равный $\pi - 2\pi\beta$. Условие автомодельности требует, чтобы этот угол оставался неизменным.

3. Примеры аналитических решений

Все аналитические решения находятся методом конформных отображений с использованием плоскости вспомогательного течения с участком границы в виде дуги окружности. Связь между условиями электрохимической и гидродинамической задач найдена ранее. Исходные условия

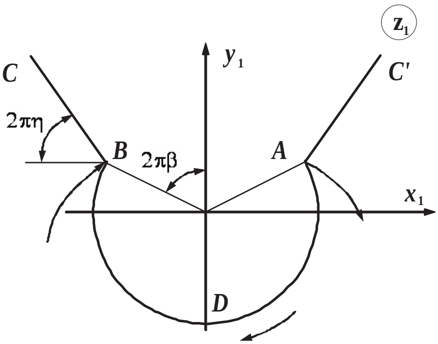

Рис. 2. Плоскость вспомогательного течения

электрохимической задачи задают форму границ вспомогательного течения, которые будут состоять из дуги окружности и лучей, исходящих из концов дуги. Полученная фигура представляет собой круговой треугольник (Рис. 2). В общем случае конформное отображение кругового треугольника на полуплоскость может быть получено как решение дифференциального уравнения второго порядка и выражается через гипергеометрические функции. В частных же случаях мы можем подобрать параметры задачи, влияющие на форму границ вспомогательного течения так, что конформное отображение будет выражаться через элементарные функции.

При рассмотрении бесконечно удаленного ЭИ, а также для ЭИ в форме точки, можно заметить, что границы, исходящие из концов обтекаемой дуги, всегда параллельны оси ординат. Это означает, что аналитическое решение возможно только тогда, когда дуга охватывает угол $k\pi$, где k — целое. Решение будет соответствовать обоим вышеприведенным случаям, а в электрохимической задаче мы получим случай обработки плоской поверхности. Во всех решениях, приведенных ниже, t — параметрическая плоскость, такая что границе AB на плоскости t соответствует действительная ось, причем точке A соответствует $t = -\infty$, точке B соответствует $t = +\infty$.

Решение для бесконечно удаленного ЭИ

$$z = b(t - i),$$

для точечного ЭИ

$$z = \frac{(t + 2i)(t - i)}{2\sqrt{3\alpha\pi}(t + i)}.$$

Решая задачу с клиновидным ЭИ, имеет смысл распределить возможные решения по формам границ следующим образом: 1) дуга охватывает угол π; 2) прямые, которым принадлежат границы проходят через середину обтекаемой дуги; 3) границы или продолжения границ пересекаются с продолжением обтекаемой дуги в точке, противоположной середине обтекаемой дуги по диаметру; 4) границы или их продолжения проходят через центр обтекаемой дуги; 5) границы перпендикулярны оси симметрии. Эти случаи не взаимоисключающие, например, первый случай заключает в себе частные решения каждого другого случая. Если на плоскости ЭХО задать углы β и η согласно Рис. 2, тогда для электрохимической задачи эти случаи, соответственно, означают обработку клином при: 1) $\beta = 0$ (обрабатываемая поверхность вписана в плоскость); 2) $\beta + 2\eta = 1/2$ и $\beta + 2\eta = 3/2$; 3) $\beta + 2\eta = 0$ и $\beta + 2\eta = 1$; 4) $\beta + \eta = 1/4$ и $\beta + \eta = 3/4$; 5) $\eta = 0$ и $\eta = 1/2$ (обработка клином, вырожденным в плоскость и в пластину).

Варианты 1–3 и 5 решаются переносом точки пересечения в бесконечность, вариант 4 — логарифмированием. В случаях 1–4 используется симметрия течения и рассматривается половина области, в случае 5 это невозможно.

Полученный набор решений приведен ниже.

Для случая 1 решение может быть записано в виде:

для $\eta = 0$

$$z = \frac{b}{U_0}\left(W_1 - iU_0\right), \quad W_1 = 2\frac{U_0}{\pi}\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right),$$

для $\eta = 1/4$

$$z = \sqrt{\frac{-U_0 k(1+it)}{\pi\alpha}\sqrt{\frac{1+it}{1-it}}},$$

для $\eta = 1/2$

$$z = \sqrt{\frac{kU_0}{\alpha}\frac{t\sqrt{t^2+1} + \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) - i\frac{\pi}{2}}{\pi\sqrt{t^2+1}}},$$

для $\eta = 3/4$

$$z = \sqrt{\frac{kU_0}{6\pi\alpha}\frac{\left(t-i\right)^2\left(t+2i\right)}{\left(t^2+1\right)^{3/4}}}.$$

Для случая 4 получены решения

при $\beta + \eta = 1/4$

$$z = e^{-i\pi\beta}\sqrt{\frac{kU_0\sqrt{t^2+1}}{\pi\alpha\left(1-2\beta\right)}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{(1-2\beta)/2}},$$

при $\beta + \eta = 3/4$

$$z = e^{-i\pi\beta} \sqrt{\frac{kU_0\sqrt{t^2+1}\,(t^2+4)}{6\pi\alpha\,(1-2\beta)}} \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{(1-2\beta)} \left(\frac{t+2i}{t-2i}\right)^{(1-2\beta)/2}.$$

Для случая 5 при $\eta = 0$ получено решение:

$$z = \sqrt{\frac{kU_0 \sin 2\beta\pi}{\pi\alpha\,(z_1/-ie^{-2i\beta\pi})\,(z_1/R-ie^{2i\beta\pi})}}.$$

Остальные решения через элементарные функции не выражаются, а сводятся к квадратурам.

4. Заключение

При численном решении задач весьма важным элементом исследований является обоснование достоверности получаемых данных. Аналитические решения, полученные в данной работе, могут быть использованы в качестве тестовых примеров для проверки результатов численного решения задач.

Список литературы

[1] Клоков В. В. Электрохимическое формообразование. Казань: Казанск. ун-т. 1984. 80 с.

[2] Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Ураков А. Р. Применение метода выделения особенностей для решения задач гидродинамики весомой жидкости и электрохимического формообразования // Динамика сплошных сред со свободными границами. Чебоксары: ЧГУ. 1996. С. 97–106.

[3] Житников В. П. Решение плоских и осесимметричных задач с помощью методов теории функций комплексного переменного. Уфа: УГАТУ. 1994. 106 с.