УДК 517.958

Редукция дифференциально-инвариантных подмоделей к инвариантным

Л. З. Уразбахтина

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Аннотация. В работе приведена классификация дифференциально-инвариантных подмоделей 3-х–параметрической группы, состоящей из двух переносов и переноса с растяжением. Доказана редукция четырех подмоделей к инвариантной подмодели на некоторой подгруппе.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, дифференциально-инвариантные подмодели, редукция

1. Введение

Рассматриваются уравнения газовой динамики (УГД) со специальным уравнением состояния (давление есть сумма степенной функции плотности и функции от энтропии). В этом случае УГД допускают группу преобразований, алгебра Ли которой имеет размерность 13. Оптимальная система допускаемых подалгебр приведена в работе [1]. Трехмерных подалгебр в оптимальной системе 57 штук. Для каждой из них можно строить инвариантные (ИП) и дифференциально-инвариантные (ДИП) подмодели. Способ построения ДИП описан в работе [2].

В настоящей работе рассматривается подалгебра 3.18, для которой выражения для инвариантов не содержат функцию давления. В этом случае, в работе доказаны теоремы о редукции ДИП к ИП.

ДИП строятся тогда, когда из инвариантов подалгебры нельзя определить все газодинамические функции. Частный случай ДИП есть частично инвариантные подмодели [3].

Определение. Дифференциально-инвариантной подмоделью ранга $r + r_1$ называется представление уравнений газовой динамики как многообразия размерности $r + r_1$ в пространстве независимых дифференциальных инвариантов, проекция которого в пространство инвариантов нулевого порядка имеет размерность r.

Для построения ДИП трехмерных подалгебр необходимо продолжить операторы на производные первого порядка, вычислить базис дифференциальных инвариантов (БДИ) и найти операторы инвариантного дифференцирования (ОИД). Тогда все остальные инварианты получаются действием ОИД на БДИ. Для трехмерных подалгебр возможны ДИП пяти рангов: $2 + 0$,$2 + 1$, $2 + 2$, $3 + 0$, $3 + 1$.

2. Представление уравнений газовой динамики через инварианты подалгебры

Уравнения газовой динамики

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla p = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \div \vec{u} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0 \tag{1}$$

замыкаются уравнением состояния для сжимаемой жидкости [4]

$$p = B\rho^{\gamma} + F(S).$$

Здесь $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; $F(S)$ — функция энтропии; B, γ — постоянные, $B\gamma > 0$, $\gamma \neq 0, 1$; $d/dt = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$ — оператор полного дифференцирования. Скорость звука определяется по формуле $c^2 = B\gamma\rho^{\gamma-1}$.

Для подалгебры 3.18 базис операторов в декартовой системе координат имеет вид [1]:

$$X_{10} = \partial_t, \;\; X_1 + X_{12} = \partial_x + t\partial_t - \vec{u}\partial_{\vec{u}} - (\bar{\gamma} - 2)\rho\partial_\rho - \bar{\gamma}p\partial_p, \;\; X_{13} = \partial_p,$$

где $\bar{\gamma} = 2\gamma(\gamma - 1)^{-1}$.

Базис дифференциальных инвариантов имеет вид:

$$\begin{aligned} &y, \quad z, \quad \vec{u_0} = \vec{u}\exp(x), \quad \rho_0 = \rho\exp((\bar{\gamma} - 2)x), \\ &p_0 = p_t\exp((\bar{\gamma} + 1)x), \quad p_1 = p_x\exp(\bar{\gamma}x), \\ &p_2 = p_y\exp(\bar{\gamma}x), \quad p_3 = p_z\exp(\bar{\gamma}x). \end{aligned} \tag{2}$$

Операторы инвариантного дифференцирования есть :

$$Y_0 = \exp(x)D_t, \quad Y_1 = D_x, \quad Y_2 = D_y, \quad Y_3 = D_z. \tag{3}$$

ОИД (3) образуют алгебру с коммутаторами:

$$
\begin{gathered}
[Y_0, Y_1] = -Y_0, \\
[Y_0, Y_2] = [Y_0, Y_3] = [Y_1, Y_2] = [Y_1, Y_3] = [Y_2, Y_3] = 0.
\end{gathered} \tag{4}
$$

С помощью инвариантов (2) и ОИД (3) УГД (1) записываются в виде:

$$
\begin{gathered}
Y_0 u_0 + u_0 Y_1 u_0 + v_0 Y_2 u_0 + w_0 Y_3 u_0 = u_0^2 - p_1 \rho_0^{-1}, \\
Y_0 v_0 + u_0 Y_1 v_0 + v_0 Y_2 v_0 + w_0 Y_3 v_0 = u_0 v_0 - p_2 \rho_0^{-1}, \\
Y_0 w_0 + u_0 Y_1 w_0 + v_0 Y_2 w_0 + w_0 Y_3 w_0 = u_0 w_0 - p_3 \rho_0^{-1}, \\
Y_0 \rho_0 + u_0 Y_1 \rho_0 + v_0 Y_2 \rho_0 + w_0 Y_3 \rho_0 + \rho_0 (k - (\bar{\gamma} - 1) u_0) = 0, \\
p_0 + u_0 p_1 + v_0 p_2 + w_0 p_3 + B \gamma \rho_0^{\gamma} (k - u_0) = 0,
\end{gathered} \tag{5}
$$

где $k = Y_1 u_0 + Y_2 v_0 + Y_3 w_0$.

Такое представление удобно для построения ДИП.

3. Дифференциально-инвариантная подмодель ранга $2+0$

ДИП ранга $2+0$ имеет представление решения

$$
\begin{gathered}
\vec{u} = \vec{u}_0(y, z) \exp(-x), \quad \rho = \rho_0(y, z) \exp((2 - \bar{\gamma}) x), \\
p_t = p_0(y, z) \exp(-(\bar{\gamma} + 1) x), \quad p_x = p_1(y, z) \exp(-\bar{\gamma} x), \\
p_y = p_2(y, z) \exp(-\bar{\gamma} x), \quad p_z = p_3(y, z) \exp(-\bar{\gamma} x).
\end{gathered} \tag{6}
$$

Общее решение уравнений (6) имеет вид:

$$
p = \exp(-\bar{\gamma} x) \varphi(y, z) + P_0 t \exp(-(\bar{\gamma} + 1) x) + P_1, \quad P_0 (\bar{\gamma} + 1) = 0,
$$

где P_0, P_1 — постоянные; $\varphi(y, z)$ — произвольная функция.

Утверждение 1. ДИП ранга $2+0$ совпадает с ИП на подалгебре, порожденной операторами

$$
< X_{10} + P_0 X_{13}, X_1 + X_{12} + \bar{\gamma} P_1 X_{13} >, \quad P_0 (\bar{\gamma} + 1) = 0. \tag{7}
$$

Таким образом $\vec{u}_0$, ρ_0, φ являются инвариантами указанной подалгебры.

УГД (5) примут вид:

$$
\begin{gathered}
D u_0 = u_0^2 + \bar{\gamma} \varphi \rho_0^{-1}, \ D v_0 + \varphi_y \rho_0^{-1} = u_0 v_0, \\
D w_0 + \varphi_z \rho_0^{-1} = u_0 w_0, \ D \rho_0 + \rho_0 (v_{0y} + w_{0z}) = (\bar{\gamma} - 1) u_0 \rho_0, \\
D \varphi + B \gamma \rho_0^{\gamma} (v_{0y} + w_{0z}) = u_0 (B \gamma \rho_0^{\gamma} + \bar{\gamma} \varphi) - P_0, \ P_0 (\bar{\gamma} + 1) = 0,
\end{gathered} \tag{8}
$$

где $D = v_0\partial_y + w_0\partial_z$; $c_0^2 = B\gamma\rho_0^{\gamma-1}$ — инвариантная скорость звука.

Система (8) есть подмодель стационарного типа [5]. В системе (8) объединены две инвариантные подмодели для подалгебры вида (7) с $P_0 = 0$ и для подалгебры с $\bar{\gamma} = -1$, $P_0 \neq 0$ из разных оптимальных систем.

4. Дифференциально-инвариантная подмодель ранга $3+0$

Представление решения для ДИП ранга 3+0 записывается в виде:

$$\begin{gathered}
\vec{u} = \vec{u}_0(y,z,\alpha)\exp(-x), \quad \rho = \rho_0(y,z,\alpha)\exp((2-\bar{\gamma})x), \\
p_t = p_0(y,z,\alpha)\exp(-(\bar{\gamma}+1)x), \quad p_x = p_1(y,z,\alpha)\exp(-\bar{\gamma}x), \\
p_y = p_2(y,z,\alpha)\exp(-\bar{\gamma}x), \quad p_z = p_3(y,z,\alpha)\exp(-\bar{\gamma}x)
\end{gathered} \tag{9}$$

где α — инвариант, составленный из независимых инвариантов базиса.

Введем новые функции — инварианты α_i, $i = 0,1,2,3$ по правилу

$$\alpha_i(y,z,\alpha) = Y_i\alpha. \tag{10}$$

С помощью коммутаторов (4) запишем условия совместности для α:

$$\begin{gathered}
\alpha_{1\alpha}\alpha_0 - \alpha_{0\alpha}\alpha_1 = -\alpha_0, \quad \alpha_{2\alpha}\alpha_1 - \alpha_{1\alpha}\alpha_2 - \alpha_{1y} = 0, \\
\alpha_{3\alpha}\alpha_0 - \alpha_{0\alpha}\alpha_3 - \alpha_{0z} = 0, \quad \alpha_{2\alpha}\alpha_0 - \alpha_{0\alpha}\alpha_2 - \alpha_{0y} = 0, \\
\alpha_{3\alpha}\alpha_1 - \alpha_{1\alpha}\alpha_3 - \alpha_{1z} = 0, \quad \alpha_{3\alpha}\alpha_2 - \alpha_{2\alpha}\alpha_3 - \alpha_{2z} + \alpha_{3y} = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Условия совместности для функции p, удовлетворяющей системе (9), имеют вид:

$$\begin{gathered}
p_{1\alpha}\alpha_0 - p_{0\alpha}\alpha_1 = -(\bar{\gamma}+1)p_0, \;\; p_{2\alpha}\alpha_1 - p_{1\alpha}\alpha_2 - p_{1y} = \bar{\gamma}p_2, \\
p_{3\alpha}\alpha_0 - p_{0\alpha}\alpha_3 - p_{0z} = 0, \;\; p_{2\alpha}\alpha_0 - p_{0\alpha}\alpha_2 - p_{0y} = 0, \\
vp_{3\alpha}\alpha_1 - p_{1\alpha}\alpha_3 - p_{1z} = \bar{\gamma}p_3, \;\; p_{3\alpha}\alpha_2 - p_{2\alpha}\alpha_3 - p_{2z} + p_{3y} = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Из условий совместности (11) и (12) находим общее решение

$$\alpha_1 = \psi_\alpha^{-1}, \;\; \alpha_2 = -\psi_y\psi_\alpha^{-1}, \;\; \alpha_3 = -\psi_z\psi_\alpha^{-1}, \;\; \alpha_0 = \exp(\psi)\psi_\alpha^{-1}, \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
p_1 = \chi_\alpha\psi_\alpha^{-1} - \bar{\gamma}\chi, \quad p_2 = \chi_y - \psi_y\chi_\alpha\psi_\alpha^{-1}, \\
p_3 = \chi_z - \psi_z\chi_\alpha\psi_\alpha^{-1}, \quad p_0 = \chi_\alpha\exp(\psi)\psi_\alpha^{-1},
\end{gathered} \tag{14}$$

где ψ и χ — функции от переменных y, z, α.

Интегрируя представления (9) и (10), в силу (13) и (14) получим:

$$\psi(y,z,\alpha)=x-\ln(-t), t<0,\ \ p(y,z,\alpha)=\exp(-\bar{\gamma}x)\chi(y,z,\alpha). \qquad (15)$$

УГД (5) примут вид:

$$\begin{gathered}
Du_0+mu_{0\alpha}+\chi_\alpha\psi_\alpha^{-1}\rho_0^{-1}=u_0^2+\bar{\gamma}\chi\rho_0^{-1},\\
Dv_0+mv_{0\alpha}-\psi_y\chi_\alpha\psi_\alpha^{-1}\rho_0^{-1}=u_0v_0-\chi_y\rho_0^{-1},\\
Dw_0+mw_{0\alpha}-\psi_z\chi_\alpha\psi_\alpha^{-1}\rho_0^{-1}=u_0w_0-\chi_z\rho_0^{-1},\\
D\rho_0+m\rho_{0\alpha}+\rho_0(v_{0y}+w_{0z}+k)=(\bar{\gamma}-1)u_0\rho_0,\\
D\chi+m\chi_\alpha-\bar{\gamma}u_0\chi+B\gamma\rho_0^\gamma(v_{0y}+w_{0z}-u_0+k)=0,\\
P_0(\bar{\gamma}+1)=0,
\end{gathered}$$

где $D=v_0\partial_y+w_0\partial_z$, $m=(\exp(\psi)+u_0-D\psi)\psi_\alpha^{-1}$, $k=(u_{0\alpha}-\psi_yv_{0\alpha}-$ $-\psi_zw_{0\alpha})\psi_\alpha^{-1}$.

Утверждение 2. Выражения y, z, $x-\ln(-t)$, $t<0$ являются инвариантами подалгебы X_1+X_{12} из алгебры L_{13}.

Утверждение 3. ДИП ранга $3+0$ редуцируется к ИП на подалгебре X_1+X_{12}.

Утверждение 3 доказывается введением новой переменной $\beta=\psi(y,z,\alpha)$.

5. Редукция подмодели ранга $2+1$

Представление решения ДИП ранга $2+1$ имеет вид:

$$\begin{gathered}
\vec{u}=\vec{u}_0(y,z)\exp(-x),\quad \rho=\rho_0(y,z)\exp((2-\bar{\gamma})x),\\
p_t=p_0(y,z,\alpha)\exp(-(\bar{\gamma}+1)x),\quad p_x=p_1(y,z,\alpha)\exp(-\bar{\gamma}x),\\
p_y=p_2(y,z,\alpha)\exp(-\bar{\gamma}x),\quad p_z=p_3(y,z,\alpha)\exp(-\bar{\gamma}x),
\end{gathered} \qquad (16)$$

где α — независимый инвариант базиса.

Введем новые функции по правилу (10). Действуя коммутаторами (4) на α, получим условия совместности (11). Общее решение переопределенной системы (11) имеет вид (13). Подействовав коммутаторами (4) на p, в силу (16), находим условия совместности (12). Общее решение системы (12) имеет вид (14). Интегрируя представления (16) и (10), в силу (13) и (14) получим решение (15).

УГД (5) примут вид:

$$
\begin{gathered}
Du_0 + \chi_\alpha \psi_\alpha^{-1} \rho_0^{-1} = u_0^2 + \bar{\gamma} \chi \rho_0^{-1}, \\
Dv_0 - \psi_y \chi_\alpha \psi_\alpha^{-1} \rho_0^{-1} = u_0 v_0 - \chi_y \rho_0^{-1}, \\
Dw_0 - \psi_z \chi_\alpha \psi_\alpha^{-1} \rho_0^{-1} = u_0 w_0 - \chi_z \rho_0^{-1}, \\
D\rho_0 + \rho_0 (v_{0y} + w_{0z}) = (\bar{\gamma} - 1) u_0 \rho_0, \\
D\chi - \bar{\gamma} u_0 \chi + (\exp(\psi) + u_0 - D\psi) \chi_\alpha \psi_\alpha^{-1} + \\
+ B\gamma \rho_0^\gamma (v_{0y} + w_{0z} - u_0) = 0, \quad P_0(\bar{\gamma} + 1) = 0,
\end{gathered}
$$

где $D = v_0 \partial_y + w_0 \partial_z$.

Утверждение 4. ДИП ранга $2 + 1$ редуцируется к ДИП 2+0.

Утверждение доказывается методом разделения переменных.

6. Редукция подмодели ранга $2 + 2$

Представление решения для ДИП ранга 2+2 совпадает с представлением для частично инвариантного решения ранга 2 дефекта 1 [3]:

$$
\vec{u} = \vec{u}_0(y, z) \exp(-x), \quad \rho = \rho_0(y, z) \exp((2 - \bar{\gamma})x), \quad p = p(t, x, y, z).
$$

УГД (5) примут вид:

$$
\begin{gathered}
Du_0 - u_0^2 + p_x \exp(\bar{\gamma} x) \rho_0^{-1} = 0, \\
Dv_0 - u_0 v_0 + p_y \exp(\bar{\gamma} x) \rho_0^{-1} = 0, \\
Dw_0 - u_0 w_0 + p_z \exp(\bar{\gamma} x) \rho_0^{-1} = 0, \\
D\rho_0 + \rho_0 (v_{0y} + w_{0z}) = (\bar{\gamma} - 1) u_0 \rho_0, \\
p_t \exp((\bar{\gamma} + 1)x) + u_0 p_x \exp(\bar{\gamma} x) + v_0 p_y \exp(\bar{\gamma} x) + \\
w_0 p_z \exp(\bar{\gamma} x) + B\gamma \rho_0^\gamma (v_{0y} + w_{0z} - u_0) = 0,
\end{gathered}
$$

где $D = v_0 \partial_y + w_0 \partial_z$.

Утверждение 5. ДИП ранга $2 + 2$ редуцируется к ДИП ранга $2 + 0$.

Утверждение доказывается исследованием на совместность p_t, p_x, p_y, p_z.

7. Заключение

В работе доказана редукция ДИП рангов 2+0, 2+1, 2+2, 3+0. ДИП ранга $3 + 1$ совпадает с частично-инвариантным решением ранга 3 дефекта 2.

Условие теоремы о редукции [3] не выполнены. Редукция для ДИП ранга $3+1$ не доказана.

Список литературы

[1] Хабиров С. В. Оптимальная система подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики // Препринт института механики УНЦ РАН. Уфа: Гилем, 1998. 33 с.

[2] Хабиров С. В. Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.

[3] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[4] Станюкович К. П. Неустановившееся движения сплошной среды. М.: ГИТТЛ, 1955. 804 с.

[5] Хабиров С. В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003. 192 с.