УДК 532.546; 533.15

Подмодели движения газа с линейным полем скоростей, определяемые матрицами ранга 1

Ю. В. Тарасова

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Аннотация. Рассматриваются уравнения газовой динамики с произвольным уравнением состояния, решения которых разыскивались в виде линейного поля скоростей. В результате получены подмодели движения газа с линейным полем скоростей и найдены новые виды уравнений состояния.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, линейное поле скоростей, подмодель

1. Введение

Движения газа, у которого скорости частиц являются линейными функциями декартовых координат точки, изучались во многих научных работах. В статье Л. В. Овсянникова [1] впервые было показано, что для политропного газа система уравнений газовой динамики сводится к системе девяти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В работе В. К. Андреева [2] рассматриваются уравнения газовой динамики в лагранжевых переменных с учетом сил тяжести. О. И. Богоявленским в книге [3] доказаны некоторые свойства динамики газового эллипсоида с линейным полем скоростей. В настоящей работе, в отличии от вышеперечисленных, решались уравнения газовой динамики в эйлеровых переменных, причем с произвольным уравнением состояния.

2. Постановка задачи

Рассматриваются уравнения идеальной газовой динамики (УГД)

$$D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad Dp + \rho a^2 \nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{1}$$

с произвольным уравнением состояния $p = f(\rho, S)$, где $p = p(t, \vec{x})$ — функция давления; $\rho = \rho(t, \vec{x})$ — функция плотности; $\vec{u} = \vec{u}(t, \vec{x})$ — вектор скорости; $a^2 = f_\rho$ — скорость звука; $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ — оператор полного дифференцирования. Решение УГД будем искать в виде линейного поля скоростей в эйлеровых переменных

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \tag{2}$$

где $A(t)$ и $\vec{u}_0(t)$ — матрица и вектор, координаты которых зависят от времени. После подстановки представления скорости (2) в УГД (1) получим уравнения совместности для функции давления $p\,(t, \vec{x})$ [4]:

$$\nabla\rho \otimes \vec{c} + \rho B^T = \rho B + \vec{c} \otimes \nabla\rho, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}((A\vec{x} + \vec{u}_0) \cdot \nabla\rho + \rho\,\mathrm{tr}A)\,\vec{c} - \rho\vec{c}\,' - \nabla\rho\,(A\vec{x} + \vec{u}_0) \cdot \vec{c} = \\ = \rho A^T \vec{c} + \rho B^T\,(A\vec{x} + \vec{u}_0) - \mathrm{tr}A\left(\left(\rho a^2\right)_\rho \nabla\rho - \rho^2\left(a^2\right)_p \vec{c}\right),\end{gathered} \tag{4}$$

где $\vec{c} = B\vec{x} + \vec{u}_0' + A\vec{u}_0$; $B = A' + A^2$; $\otimes$ — тензорное произведение; $\mathrm{tr}A$ — след матрицы A.

Расписывая (3) покоординатно и составляя линейную комбинацию с вектором $\vec{c}$, получим линейное равенство $\vec{c} \cdot \vec{y} = 0$, в котором вектор $\vec{y} = (b_{23} - b_{32}, b_{31} - b_{13}, b_{12} - b_{21})$, b_{ij} — элементы матрицы B. В равенстве $\vec{c} \cdot \vec{y} = 0$ переменная $\vec{x}$ свободная (коэффициенты не зависят от $\vec{x}$), поэтому, приравнивая нулю коэффициенты при $\vec{x}$, получим матричное равенство

$$B^T \vec{y} = 0. \tag{5}$$

В [5] был рассмотрен случай, когда $\det B \neq 0$. В данной статье будет разобран случай, когда ранг матрицы B равен 1: $r\,(B) = 1$.

3. Подмодели в случае $r(B) = 1$

Из условия $r(B) = 1$ следует, что

$$\vec{b}_i = a_i(t)\vec{b}, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \tag{6}$$

где $a_i(t)$ — произвольная функция; $\vec{b}(t) \neq 0$ — произвольный вектор; $\vec{b}_i(t)$ — вектор, являющийся i-ой строкой матрицы B. Тогда матрицу B

можно записать в виде $B = \vec{a} \otimes \vec{b}$. С таким представлением матрицы B уравнение (5) тождественно выполняется.

В равенстве $\vec{c} \cdot \vec{y} = 0$ слагаемые, не содержащие $\vec{x}$, образуют смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{u}_0' + A\vec{u}_0$, которое равно нулю. Следовательно эти вектора линейно зависимы [6]

$$\vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \alpha\left(t\right)\vec{a} + \beta\left(t\right)\vec{b},$$

где $\alpha\left(t\right)$ и $\beta\left(t\right)$ — произвольные функции. Таким образом, из уравнения $\vec{c} \cdot \vec{y} = 0$ следует равенство

$$\vec{c} = \left(\vec{a} \otimes \vec{b}\right)\vec{x} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \tag{7}$$

где $\vec{a}^2 = 1$.

От уравнений совместности (3) остается два уравнения с частными производными первого порядка для функции ρ, которые находятся в инволюции. Решая их методом характеристик, находим функцию ρ:

$$\rho = F\left(t, I\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{x} + \alpha\right)^{-1}, \tag{8}$$

где $I = \left(\vec{b} \cdot \vec{x} + \alpha\right)^{\beta} \exp\left(\vec{a} \cdot \vec{x}\right)$.

Найденное представление решения (8) подставим в линейное уравнение для плотности из УГД (1). После замен

$$\begin{gathered} \ln\left|\vec{b} \cdot \vec{x} + \alpha\right| = \beta^{-1}\left(\ln I - \vec{a} \cdot \vec{x}\right) \quad \text{при } \beta \neq 0, \\ \vec{a} \cdot \vec{x} = l,\ \vec{b} \cdot \vec{x} = -\alpha + I^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{l}{\beta}} \equiv J_1,\ \vec{c}_1 \cdot \vec{x} = k, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\vec{c}_1 = \vec{a}' - \beta'\beta^{-1}\vec{a} + A^T\vec{a}$, l, k, I — новые независимые переменные, получим уравнение

$$\begin{gathered} \left[F_t + F\mathrm{trA} + IF_I\left(\beta'\beta^{-1}\ln I + \vec{u}_0 \cdot \vec{a}\right)\right] I^{1/\beta}e^{-l/\beta} + \\ + F_I k I^{1+1/\beta}e^{-l/\beta} + \left(\beta I F_I - F\right)\left(\vec{b}' + A^T\vec{b}\right)\vec{x} + \\ + \left(\beta I F_I - F\right)\left(\alpha' + \vec{b}\vec{u}_0\right) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Вектор $\vec{x}$ находим как решение системы (9) методом Крамера (при $\Delta = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) \neq 0$) и подставляем в (10).

В уравнении (10) независимыми являются переменные l, k, I и t; неизвестные функции β, $\vec{u}_0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, A зависят от t, а функция F зависит от t и I, то есть переменные k и l свободные. При этом переменная l входит в (10) нелинейно, а k — линейно, поэтому зануляем коэффициенты при k:

$$(\beta I F_I - F)\left(\vec{b}' + A^T\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{c}_1, \vec{a}, \vec{b}\right) F_I I^{1+1/\beta} e^{-l/\beta} = 0.$$

В последнем равенстве l свободная переменная, поэтому приравниваем нулю коэффициент при $\exp\left(-\beta^{-1} l\right)$. Получим

$$F = F(t), \quad \vec{b}' + A^T\vec{b} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}, \tag{11}$$

где α_1 и β_1 — произвольные функции от t.

С учетом уравнений (11) уравнение (10) примет вид:

$$\left(F'F^{-1} + \mathrm{tr}A\right)(J_1 - \alpha) - \Delta^{-1}\left(\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}\right)\times$$
$$\times\left[l\vec{b}\times\vec{c}_1 - J_1\vec{a}\times\vec{c}_1\right] - \alpha' - \vec{b}\cdot\vec{u}_0 = 0.$$

Переменная l свободная, поэтому, приравнивая нулю коэффициенты при l, получим уравнения подмодели

$$\alpha' + \vec{b}\cdot\vec{u}_0 = \alpha\left(F'F^{-1} + \mathrm{tr}A\right), \quad \vec{b}' + A^T\vec{b} = \left(F'F^{-1} + \mathrm{tr}A\right)\vec{b}, \tag{12}$$

при этом плотность вычисляется по формуле

$$\rho = F(t)\left(\vec{b}\cdot\vec{x} + \alpha\right)^{-1}. \tag{13}$$

Равенства (12), (13) получены из (3).

В уравнение совместности (4) подставим (7), (12), (13) и умножим на $\rho\left(\vec{b}\cdot\vec{x} + \alpha\right)$, получим уравнение

$$\begin{gathered}\vec{a}'F^2 + \vec{a}F\left[F' + F\mathrm{tr}A\rho\left(a^2\right)_p\right] + F^2A^T\vec{a} + \\ +\vec{b}\left[\rho(F\beta)' + \mathrm{tr}A\rho^2\left(\rho a^2\right)_\rho + \mathrm{tr}A\beta F\rho^2\left(a^2\right)_p\right] = 0,\end{gathered} \tag{14}$$

где независимыми являются переменные t, p и ρ, а неизвестными функциями — F, A, $\vec{a}$, $\vec{b}$, β и a^2. Уравнение (14) решаем методом разделения переменных, так как неизвестные функции зависят от разных переменных. В результате получается следующее утверждение.

Теорема 1 *Разделение переменных в уравнении (14) приводит к следующим подмоделям:*

1. *Если* $\mathrm{tr}A \neq 0$ *и* $\vec{a}\otimes\vec{b} \neq 0$, *то подмодель вполне определена и состоит из уравнений*

$$A' + A^2 = \vec{a}\otimes\vec{b},$$

$$\vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$
$$\vec{b}' + A^T\vec{b} = \vec{b}\left(F'F^{-1} + \mathrm{tr}A\right),$$
$$\alpha' + \vec{b}\cdot\vec{u}_0 = \alpha\left(F'F^{-1} + \mathrm{tr}A\right),$$
$$\vec{a}'F^2 + \vec{a}FF' + \mathrm{tr}A\left(\vec{a}\gamma F^2 + \vec{b}\gamma_2\right) + F^2A^T\vec{a} = 0, \quad |\vec{a}| = 1,$$

функция β и уравнение состояния задается тремя возможными видами формул:

1.1 $\beta = \left(m\exp\left(-\gamma\int \mathrm{tr}A dt\right) - \gamma_1\gamma^{-1}\right)F^{-1}$,

$$p = h_0\rho^\gamma - \gamma_1\gamma^{-1}\ln\rho + \gamma_2\left(\left(\gamma+1\right)\rho\right)^{-1} - \gamma_1\gamma^{-2} - \gamma_3\gamma^{-1};$$

1.2 $\beta = -\gamma_1F^{-1}\int \mathrm{tr}A dt, \quad p = \frac{1}{2}\gamma_1\left(\ln\rho\right)^2 + \gamma_3\ln\rho + \gamma_2\rho^{-1} + h_0;$

1.3 $\beta = \left(m\exp\left(\int \mathrm{tr}A dt\right) + \gamma_1\right)F^{-1}, \quad p = \left(\gamma_1 - \gamma_2\rho^{-1}\right)\ln\rho + h_0\rho^{-1} + \gamma_3 - \gamma_1$, *где* h_0, m, γ, γ_1, γ_2, γ_3 *— постоянные.*

Плотность и скорость вычисляются по формулам (13) и (2).

2. *Если* $\mathrm{tr}A \neq 0$ *и* $\vec{a}\otimes\vec{b} = 0$ *(*$\vec{a} = n\vec{b}$, n *— постоянная), то подмодель вполне определена и состоит из уравнений*

$$A' + A^2 = n\vec{b}\otimes\vec{b},$$
$$\vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \left(n\alpha + \beta\right)\vec{b},$$
$$\alpha' + \vec{b}\cdot\vec{u}_0 = \alpha\left(F'F^{-1} + \mathrm{tr}A\right),$$
$$n\left|\vec{b}\right| = 1,$$

где функция $\beta(t)$ *и уравнение состояния аналогичны случаям пункта 1, но функция* $F(t)$ *для соответствующих подслучаев имеет вид*

2.1 $F^2 = -\gamma_2n^{-1}\left(\gamma+1\right)^{-1} + C_1\exp\left(-\left(\gamma+1\right)\int \mathrm{tr}A dt\right)$,

2.2 $F^2 = -\gamma_2n^{-1} + C_1\exp\left(-\int \mathrm{tr}A dt\right)$,

2.3 $F^2 = -\gamma_2n^{-1}\int \mathrm{tr}A dt + C_1$, *где* C_1 *— постоянная.*

Специфический подслучай:

2.4 $\beta = \beta_0$, $F = F_0$ *— постоянные, имеет уравнение состояния, определенного из дифференциального уравнения*

$$nF_0^2 + \rho F_0\beta = \rho^2p'\left(\ln\rho + \ln p' + k\right).$$

3. *Если* $\mathrm{tr}A = 0$*, то уравнения подмодели получаются из уравнений пункта 1 подстановкой* $\mathrm{tr}A = 0$, $\beta(t) = kF^{-1}$ *(*k *— постоянная), при этом уравнение состояния произвольно.*

4. Заключение

В работе рассмотрены решения уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей, которое определяется матрицами ранга 1. В результате подстановки представления решения в уравнения газовой динамики получены подмодели из теоремы 1 для 4-х видов уравнения состояния.

Список литературы

[1] Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики // ДАН СССР. 1956. Т. 111, № 1. С. 47–49.

[2] Андреев В. К. К задаче о неустановившемся движении сжимаемой жидкости со свободной границей // ДАН СССР. 1979. Т. 244, № 5. С. 1107–1110.

[3] Богоявленский И. О. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 314 с.

[4] Тарасова Ю. В. Движение газа с линейным полем скоростей и плотностью, зависящей от времени // Труды 37-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2006. С. 258–262.

[5] Тарасова Ю. В. Главная подмодель движение газа с линейным полем скоростей // Труды 38-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2007. С. 210–213.

[6] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Высш. шк., 1998. С. 24.

[7] Dyson J. F. Dynamics of a spinning gas cloud // J.Math.Mech., 1968. V. 18, № 1. P. 91–101.