

УДК 532.5.013.13: 536.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЕЛ НУССЕЛЬТА ПРИ КОНВЕКЦИИ ТЕРМОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ¹

К. В. Моисеев, А. М. Ильясов

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. В работе численно исследована свободная конвекция термовязких жидкостей в квадратной ячейке. Рассмотрены квадратичные и показательные зависимости вязкости от температуры. Изучено влияние этих зависимостей на числа Нуссельта. Установлено, что зависимость чисел Нуссельта от чисел Рэлея характеризуется средней вязкостью, монотонностью и выпуклостью функции вязкости от температуры.

Ключевые слова: термовязкая жидкость, численное моделирование, число Нуссельта

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о свободной конвекции ньютоновской термовязкой жидкости в замкнутой квадратной ячейке с вертикальными теплоизолированными и горизонтальными изотермическими границами длины L . Полагаем, что полость подогревается снизу (температура T_H) и охлаждается сверху (температура $T_C < T_H$).

Свободная конвекция термовязкой жидкости в двумерной области моделируется следующей безразмерной системой уравнений в приближении Буссинеска [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

¹ Работа выполнена в рамках Программы целевых расходов Президиума РАН «Поддержка молодых ученых».

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}(\theta) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu}(\theta) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}(\theta) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu}(\theta) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \text{Gr}\theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

где u и v — продольная и поперечная составляющие вектора скорости; p — отклонение от гидростатического давления при постоянной температуре $T_0 = \frac{T_H + T_C}{2}$; $\bar{\mu}(\theta) = \frac{\mu(T)}{\mu_0}$ — динамическая вязкость и $\theta = \frac{T - T_0}{T_H - T_C}$ — температура, отсчитываемая от среднего значения T_0 . В системе уравнений введены параметры подобия: $\text{Gr} = \frac{g\beta(T_H - T_C)L^3}{\nu_0^2}$ — число Грасгофа и $\text{Pr} = \frac{\mu_0 c_p}{k}$ — число Прандтля; где L — характерный размер полости; μ_0, ν_0, c_0, k_0 — динамическая и кинематическая вязкости, теплоемкость и коэффициент теплопроводности жидкости в состоянии равновесия.

Граничные условия имеют вид:

на теплоизолированных границах $x = 0$ и $x = 1$:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0;$$

на нижней границе $y = 0$:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \theta = 0.5;$$

на верхней границе $y = 1$:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \theta = -0.5.$$

Начальные условия есть состояние равновесия жидкости

$$u = 0, \quad v = 0, \quad p = 0, \quad \theta = 0.$$

Параметры задачи примем такими же, как и в работе [2], где рассмотрена конвекция жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры с числом Прандтля $\text{Pr} = 118$. Пусть размерная вязкость $\mu(T)$ определена в интервале температур $[T_C, T_H]$, и область ее значений разделена на область «малых» — $[\mu_{\text{inf}}, \mu_0]$ и область «больших» вязкостей — $[\mu_0, \mu_{\text{sup}}]$. Причем μ_{sup} в 10 раз превосходит μ_0 , а μ_0 в 10 раз превосходит

μ_{inf} . В обеих областях исследуем влияние монотонных и немонотонных зависимостей вязкости на числа Нуссельта.

Безразмерные числа Нуссельта вычисляем по следующим формулам [1]:

$$\text{Nu}_H = - \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx, \quad \text{Nu}_C = - \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=1} dx.$$

Немонотонные зависимости вязкости от температуры моделируем квадратичными функциями с экстремумом в средней точке интервала температур T_0 . В качестве монотонных зависимостей используем показательные функции вязкости от температуры. В области «больших» вязкостей зависимости зададим формулами:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1(\theta) &= 36 \cdot \theta^2 + 1, & \bar{\mu}_2(\theta) &= -3.6 \cdot \theta^2 + 10, \\ \bar{\mu}_3(\theta) &= 10^{-(\theta-0.5)}, & \bar{\mu}_4(\theta) &= 10^{(\theta+0.5)}, \end{aligned}$$

а в области «меньших» вязкостей формулами:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_5(\theta) &= 4 \cdot \theta^2 + 0.1, & \bar{\mu}_6(\theta) &= -36 \cdot \theta^2 + 1, \\ \bar{\mu}_7(\theta) &= 10^{-(\theta+0.5)}, & \bar{\mu}_8(\theta) &= 10^{(\theta-0.5)}. \end{aligned}$$

Для лучшего понимания влияния вязкости на числа Нуссельта на горизонтальных стенках введем понятие эффективной вязкости. Эффективную вязкость определим как ординату центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осью $\mu = 0$ и графиком исследуемой зависимости вязкости $\mu(T)$, взятую в размерном виде:

$$\mu^* = \frac{\int_{T_C}^{T_H} \mu^2(T) dT}{2 \cdot \int_{T_C}^{T_H} \mu(T) dT}.$$

Подставляя в эту формулу $\bar{\mu}_i$, $i = 1, \dots, 8$, получим значения эффективных вязкостей: $\mu_1^* = 0.0725$ Па·с, $\mu_2^* = 0.1004$ Па·с, $\mu_3^* = 0.0687$ Па·с, $\mu_4^* = 0.0687$ Па·с, $\mu_5^* = 0.0073$ Па·с, $\mu_6^* = 0.0100$ Па·с, $\mu_7^* = 0.0069$ Па·с, $\mu_8^* = 0.0069$ Па·с.

2. Результаты моделирования

Уравнения конвекции интегрируем методом контрольного объема с использованием алгоритма «SIMPLE», подробно описанного в работе [3].

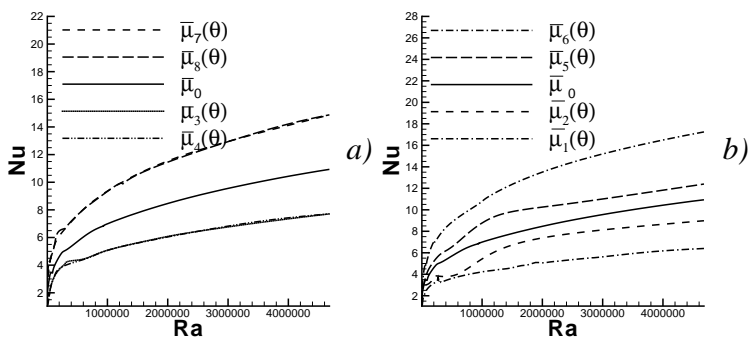


Рис. 1. Зависимость чисел Нуссельта от числа Рэлея на подогреваемой стенке: а) — монотонные зависимости вязкости от температуры, б) — немонотонные зависимости вязкости от температуры

Как и в работе [2] все вычисления произведены на равномерной сетке 50×50 узлов и постоянным безразмерным временным шагом $\Delta t = 10^{-4}$. В этой же работе можно ознакомиться с тестовыми расчетами. Числа Грасгофа варьировались в диапазоне значений $1 \leq Gr \leq 40000$.

На Рис. 1 представлена зависимость чисел Нуссельта на подогреваемой стенке от числа Рэлея $Ra = Pr \cdot Gr$ для монотонных (а) и немонотонных (б) зависимостей вязкости от температуры.

Для эффективных вязкостей рассматриваемых в работе монотонных зависимостей выполняются следующие неравенства: $\mu_7^* \leq \mu_8^* < \mu_0 < \mu_3^* \leq \mu_4^*$. Как видно из Рис. 1(а) для чисел Нуссельта при фиксированных числах Рэлея выполняются те же соотношения. Кривые зависимости числа Нуссельта от числа Рэлея для вязкостей $\bar{\mu}_7(\theta)$ и $\bar{\mu}_8(\theta)$ мало отличаются и лежат выше кривых с вязкостями μ_0 , $\bar{\mu}_3(\theta)$ и $\bar{\mu}_4(\theta)$. Кривые $Nu(Ra)$ для вязкостей $\bar{\mu}_3(\theta)$ и $\bar{\mu}_4(\theta)$ также очень близки.

Таким образом, для монотонных зависимостей вязкости от температуры числа Нуссельта возрастают с ростом эффективной вязкости, то есть полностью определяются эффективной вязкостью жидкости.

Для немонотонных зависимостей картина представляется более сложной. Для эффективных вязкостей выполняются неравенства $\mu_5^* < \mu_6^* < \mu_0 < \mu_1^* < \mu_2^*$. Однако, монотонная зависимость чисел Нуссельта от эффективной вязкости не наблюдается. Из Рис. 1(б) видно что, несмотря на то что $\mu_5^* < \mu_6^*$, кривая зависимости числа Нуссельта от числа Рэлея для $\bar{\mu}_5(\theta)$ лежит ниже, чем для $\bar{\mu}_6(\theta)$, то есть не зависит от эффективной вязкости.

Отметим, что вязкости $\bar{\mu}_5(\theta)$ и $\bar{\mu}_6(\theta)$ лежат в одной и той же обла-

сти $[\mu_{\text{inf}}, \mu_0]$. Аналогичная картина наблюдается для зависимостей числа Нуссельта от числа Рэлея в диапазоне $[\mu_0, \mu_{\text{sup}}]$. Кривая $\text{Nu}(\text{Ra})$ зависимости вязкости $\bar{\mu}_1(\theta)$ лежит ниже, чем кривая для $\bar{\mu}_2(\theta)$. Однако для эффективных вязкостей выполняется неравенство $\mu_1^* < \mu_2^*$. Анализ кривых $\text{Nu}(\text{Ra})$ на Рис. 1(b) для $\bar{\mu}_5(\theta)$ и $\bar{\mu}_6(\theta)$, а также $\bar{\mu}_1(\theta)$ и $\bar{\mu}_2(\theta)$ показывает, что для кривых $\text{Nu}(\text{Ra})$, лежащих в одной области вязкостей, числа Нуссельта определяются не эффективной вязкостью, а второй производной вязкости $\mu''(T)$. Для выпуклых вверх функций ($\mu''(T) < 0$) числа Нуссельта выше, чем для функций выпуклых вниз ($\mu''(T) > 0$). Однако, если рассмотреть области $\mu > \mu_0$ и $\mu < \mu_0$, то из Рис. 1(b) видно, что кривые $\text{Nu}(\text{Ra})$ для диапазона $[\mu_0, \mu_{\text{sup}}]$ лежат выше кривой для μ_0 , а кривые из диапазона $[\mu_{\text{inf}}, \mu_0]$ — ниже. Следовательно, если рассматривать различные области вязкости, то кривые $\text{Nu}(\text{Ra})$ располагаются согласно эффективной вязкости.

3. Заключение

В работе показано что взаимное расположение графиков $\text{Nu}(\text{Ra})$ для различных зависимостей вязкости от температуры связано со значением эффективной вязкости, график $\text{Nu}(\text{Ra})$ располагается ниже, чем выше эффективная вязкость. Для зависимостей вязкости от температуры с точкой максимума график $\text{Nu}(\text{Ra})$ расположен выше, чем график для зависимости $\mu(T)$ с точкой минимума. Каждый график $\text{Nu}(\text{Ra})$ из области малых вязкостей лежит выше любого графика $\text{Nu}(\text{Ra})$ из области больших вязкостей.

Список литературы

- [1] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
- [2] Ильясов А. М., Моисеев К. В., Урманчиев С. Ф. Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. VIII, № 4(24). С. 51–59.
- [3] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.