УДК 539.546

Поле давления при фильтрации газированной жидкости с учетом гравитации

Е. М. Девяткин, Н. В. Перемолотова

Стерлитамакский государственный педагогический институт, Стерлитамак

Аннотация. Осуществлена постановка задачи фильтрации газированной жидкости в гравитационном поле. Получено уравнение для поля давления при фильтрации газированной жидкости. Доказана неприменимость баротропного приближения при решении задачи с учетом гравитационного поля. Полученные результаты могут быть использованы в механике пористых сред, подземной гидродинамике и геофизике.

Ключевые слова: фильтрация газированной жидкости, гравитационное поле, пористая среда

1. Введение

Задачи о фильтрации газированной жидкости возникают в нефтепромысловом деле, химической технологии, гидрологии. Важность введения точных методов расчета в вопросы движения газированной жидкости в подземных пластах ясна, если учесть стремительный рост добычи нефти и газа, числа скважин. Специфическая трудность этой проблемы состоит в том, что нефть и газ в продуктивных пластах защищены от глаз наблюдателя мощной броней горных пород.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим поле давления при фильтрации газированной жидкости с учетом гравитации. В ряде месторождений давление насыщения равно

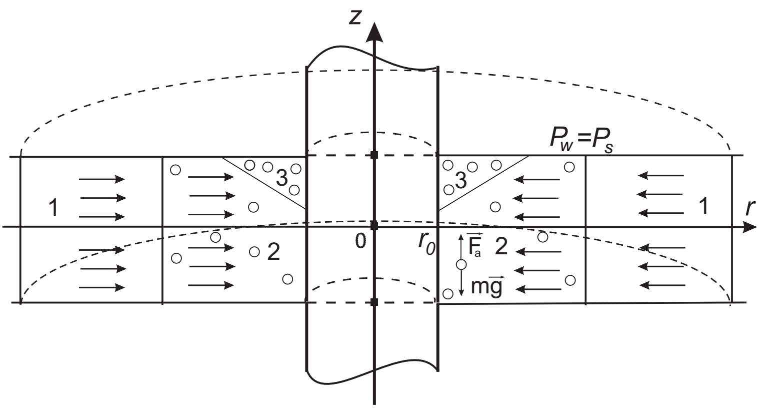

Рис. 1. Геометрия задачи о фильтрации газированной нефти вблизи эксплуатационных скважин: 1 — зона однофазной фильтрации; 2 — зона двухфазной фильтрации; 3 — зона фильтрации свободного газа

пластовому, тогда движение нефти в пласте сопровождается разгазированием на всем протяжении. Пусть в скважине поддерживается забойное давление P_w, ниже давления насыщения $P_s (P_w < P_s)$. Тогда при давлениях P, больших давления насыщения и меньших начального пластового $P_h (P_s < P < P_h)$, наблюдается однофазная фильтрация жидкости и растворенного газа. При давлениях, меньших P_s, из нефти выделяется растворенный газ и происходит двухфазная фильтрация.

Для простоты будем считать, что пористый пласт и окружающие породы являются однородными и изотропными. Считается также, что непроницаемые пласты расположены горизонтально и окружены сверху и снизу непроницаемыми породами.

Рассмотрим движение газированной нефти в цилиндрической системе координат (Рис. 1). Нефть содержит значительное количество газов, основным из которых является метан. В зоне 1 происходит фильтрация газированной нефти ($P > P_s$). В зоне 2 движутся нефть с растворенным газом и свободный газ. Под действием силы Архимеда газ всплывает, скапливаясь в кровле пласта возле скважины, образуя зону фильтрации свободного газа 3.

Не пренебрегая гравитационными силами, действующими на пласт газированной жидкости и свободный газ, будем считать, что каждая из фаз движется в пористой среде по закону Дарси:

для несущей фазы

$$\vec{v_1} = -\frac{k}{\mu_1} f_1(s) \left[\mathrm{grad}P - (\rho_1 + \rho_2)\vec{g}\right]; \tag{1}$$

для свободного газа

$$\vec{v_3} = -\frac{k}{\mu_3} f_3(s) \left(\mathrm{grad}P - \rho_3\vec{g}\right). \tag{2}$$

Связь между насыщенностями фаз: $s_1 = s_2 = 1 - s$, $s_3 = s$.

Уравнения неразрывности для несущей фазы, для растворенного в жидкости газа и для свободного газа соответственно равны

$$\frac{\partial(ms_1\rho_1)}{\partial t} + \nabla(\rho_1\vec{v_1}) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial(ms_2\rho_2)}{\partial t} + \nabla(\rho_2\vec{v_1}) = -q, \tag{4}$$

$$\frac{\partial(ms_3\rho_3)}{\partial t} + \nabla(\rho_3\vec{v_3}) = q. \tag{5}$$

Подставив (1) в (3), получим:

$$\frac{\partial[m(1-s)\rho_1]}{\partial t} + \nabla\left[-\frac{k}{\mu_1} f_1(s)\rho_1(\nabla P - (\rho_1+\rho_2)\vec{g})\right] = 0. \tag{6}$$

Распишем второе слагаемое

$$\frac{\partial[m(1-s)\rho_1]}{\partial t} - \frac{k}{\mu_1}\nabla[f_1(s)\rho_1\nabla P) + \frac{k}{\mu_1}\nabla[f_1(s)\rho_1(\rho_1+\rho_2)\vec{g}] = 0. \tag{7}$$

После некоторых преобразований получим следующее уравнение

$$\begin{gathered}\frac{d[m(1-s)\rho_1]}{dP}\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{k}{\mu_1} f_1(s)\rho_1\nabla P - \frac{k}{\mu_1}\frac{d[f_1(s)\rho_1]}{dP}(\nabla P)^2 + \\ + \frac{k}{\mu_1}\frac{d[f_1(s)\rho_1(\rho_1+\rho_2)]}{dP}\nabla P\vec{g} = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Сложив (4) и (5), с учетом закона Дарси для несущей фазы и для свободного газа

$$\begin{gathered}\frac{\partial[m((1-s)\rho_2 + s\rho_3)]}{\partial t} - \frac{k}{\mu_1}\nabla[f_1(s)\rho_2(\nabla P - (\rho_1+\rho_2)\vec{g}] - \\ - \frac{k}{\mu_3}\nabla[f_3(s)\rho_3(\nabla P - \rho_3\vec{g})] = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Распишем последние два слагаемых

$$\frac{\partial[m((1-s)\rho_2+s\rho_3)]}{\partial t}-\frac{k}{\mu_1}\nabla(f_1(s)\rho_2\nabla P)+\frac{k}{\mu_1}\nabla[f_1(s)\rho_2\times \\ \times(\rho_1+\rho_2)\vec{g})]-\frac{k}{\mu_3}\nabla(f_3(s)\rho_3\nabla P)+\frac{k}{\mu_3}\nabla(f_3(s)\rho_3^2\vec{g})=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial[m((1-s)\rho_2+s\rho_3)]}{\partial t}-\frac{k}{\mu_1}f_1(s)\rho_2\triangle P-\frac{k}{\mu_1}\frac{d[f_1(s)\rho_2]}{dP}\times \\ \times(\nabla P)^2+\frac{k}{\mu_1}\frac{d[f_1(s)\rho_2(\rho_1+\rho_2)]}{dP}\nabla P\vec{g}-\frac{k}{\mu_3}f_3(s)\rho_3\triangle P- \\ -\frac{k}{\mu_3}\frac{d[f_3(s)\rho_3]}{dP}(\nabla P)^2+\frac{k}{\mu_3}\frac{d[f_3(s)\rho_3^2]}{dP}\nabla P\vec{g}=0. \tag{11}$$

В итоге получим уравнение для поля давления при фильтрации газированной жидкости с учетом гравитационного поля

$$\frac{d[m((1-s)\rho_2+s\rho_3)]}{dP}\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{k}{\mu_1}\left[f_1(s)\rho_2+\frac{\mu_1}{\mu_3}f_3(s)\rho_3\right]\triangle P- \\ -\frac{k}{\mu_1}\frac{d}{dP}\left[f_1(s)\rho_2+\frac{\mu_1}{\mu_3}f_3(s)\rho_3\right](\nabla P)^2+ \\ +\frac{k}{\mu_1}\frac{d}{dP}\left[f_1(s)\rho_1(\rho_1+\rho_2)+\frac{\mu_1}{\mu_3}f_1(s)\rho_3^2\right]\nabla P\vec{g}=0. \tag{12}$$

Из физических соображений ясно, что уравнения (8) и (12) должны давать совпадающие решения, что возможно тогда, когда отношения коэффициентов при соответствующих производных равны

$$\frac{\frac{d}{dP}[m(1-s)\rho_2+s\rho_3]}{\frac{d}{dP}[m(1-s)\rho_1]}=\frac{f_1(s)\rho_2+\frac{\mu_1}{\mu_3}f_3(s)\rho_3}{f_1(s)\rho_1}= \\ \frac{\frac{d}{dP}\left[f_1(s)\rho_2+\frac{\mu_1}{\mu_3}f_3(s)\rho_3\right]}{\frac{d}{dP}[f_1(s)\rho_1]}= \\ =\frac{\frac{d}{dP}\left[f_1(s)\rho_1(\rho_1+\rho_2)+\frac{\mu_1}{\mu_3}f_3(s)\rho_3^2\right]}{\frac{d}{dP}[f_1(s)\rho_1(\rho_1+\rho_2)]}=c(P). \tag{13}$$

Из равенства отношений вторых и третьих коэффициентов следует, что $c(P)=\mathrm{const}$. Действительно, из равенства отношения двух функций отношению их производных, следует, что это отношение равно константе. Докажем это.

Пусть это отношение не равно константе, тогда

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = g(x). \tag{14}$$

Из (14) следует, что

$$f_1'(x) = f_2'(x)g(x), \tag{15}$$

$$f_1(x) = f_2(x)g(x). \tag{16}$$

Продифференцируя (16), получим

$$f_1'(x) = f_2'(x)g(x) + f_2(x)g'(x). \tag{17}$$

Сравнивая (15) с (17), приходим к противоречию, значит, $c(P)$ не зависит от P. Отыщем константу c. Из закона Генри при давлении насыщения $\rho_2(P = P_s) = \rho_{20} = \dfrac{\rho_1 \alpha P_s}{1 - \alpha P_s}$ и $\rho_1(P = P_s) = \rho_{10}$. Тогда, учитывая $f_3(s) = 0$, из (13) получим $c = \dfrac{\rho_{20}}{\rho_{10}}$.

Насыщенность является функцией давления и температуры, то есть $s = s(P, T)$. Однако в условиях рассматриваемой задачи относительная величина температурных изменений составляет приблизительно 1%, в то время как перепады давления на несколько порядков больше, поэтому целесообразно воспользоваться баротропным приближением $s = s(P)$, $\rho_3 = \rho_3(P)$.

Из (13) с учетом $c = \dfrac{\rho_{20}}{\rho_{10}}$ получим следующее выражение

$$\frac{\dfrac{d}{dP}[m(1-s)\rho_2 + s\rho_3]}{\dfrac{d}{dP}[m(1-s)\rho_1]} = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}. \tag{18}$$

Интегрируя (18) с учетом $s = 0$ при давлении насыщения P_s, получим выражение для газонасыщенности

$$s = \frac{\rho_{20}\dfrac{\rho_1}{\rho_{10}} - \rho_2}{\rho_3 - \rho_2 + \rho_{20}\dfrac{\rho_1}{\rho_{10}}}. \tag{19}$$

Из (13) получим

$$\frac{\dfrac{d}{dP}\left[f_1(s)\rho_1(\rho_1+\rho_2)+\dfrac{\mu_1}{\mu_3}f_3(s)\rho_3^2\right]}{\dfrac{d}{dP}[f_1(s)\rho_1(\rho_1+\rho_2)]}=\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}. \tag{20}$$

Проинтегрируем (20) и учтем условие давления насыщения $C=0$

$$(\rho_1+\rho_2)\rho_2+\frac{\mu_1}{\mu_3}\rho_3^2\frac{f_3(s)}{f_1(s)}=\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}(\rho_1+\rho_2)\rho_1. \tag{21}$$

Из (13) следует, что

$$\frac{f_1(s)\rho_2+\dfrac{\mu_1}{\mu_3}f_3(s)\rho_3}{f_1(s)\rho_1}=\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}, \tag{22}$$

откуда

$$\frac{f_3(s)}{f_1(s)}=\frac{\mu_3}{\mu_1}\frac{\rho_1}{\rho_3}\left(\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right). \tag{23}$$

Подставим (23) в (21)

$$(\rho_1+\rho_2)\rho_2+\frac{\mu_1}{\mu_3}\rho_3^2\frac{\mu_3}{\mu_1}\frac{\rho_1}{\rho_3}\left(\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)=\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}(\rho_1+\rho_2)\rho_1. \tag{24}$$

Упрощая (24), приходим к равенству

$$\rho_1+\rho_2=\rho_3. \tag{25}$$

Но этого не может быть, так как плотность несущей фазы не равна плотности свободного газа. Значит, при решении задачи фильтрации газированной жидкости с учетом гравитационного поля нельзя пользоваться баротропным приближением. Но без учета гравитационного поля баротропное приближение работает [2].

3. Заключение

Осуществлена постановка задачи фильтрации газированной жидкости с учетом фазовых переходов в гравитационном поле применительно к нефтегазовым пластам. Получено уравнение для поля давления при фильтрации газированной жидкости с учетом гравитационного поля. Было показано, что при решении задачи фильтрации газированной жидкости с учетом гравитационного поля нельзя пользоваться баротропны приближением. Полученные результаты важны для построения теории фильтрации газированной жидкости в гравитационном поле.

Список обозначений

m_i — пористость; μ_i — вязкость i-ой фазы, Па·с; P_i — давление, Па; P_w — давление в скважине, Па; P_s — давление насыщения, Па; P_h — пластовое давление, Па; $f_i(s)$ — фазовая проницаемость; k — проницаемость, м^2; s_i — насыщенность i-ой фазы; $\vec{v_i}$ — скорость фильтрации i-ой компоненты, м/с; ρ_i — плотность i-ой фазы, кг/м^3; α — коэффициент растворимости газа, 1/Па; T — температура, K.

Список литературы

[1] Савельев И. В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика: Учебное пособие. М.: Наука, 1982. 432 с.

[2] Филиппов А. И., Фридман А. А., Девяткин Е. М. Баротермический эффект при фильтрации газированной жидкости: Монография. Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 2000; Стерлитамакский филиал Академии наук Республики Башкортостан. 176 с.

[3] Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 351 с.

[4] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: В 3-х т. Т. 2. М.: Высш. шк., 1988. 576 с.