

УДК 539.546

К ТЕОРИИ БАРОТЕРМИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В ГАЗАХ

Е. М. Девяткин

Стерлитамакский государственный педагогический институт, Стерлитамак

Аннотация. Осуществлена постановка задачи о температурных процессах при фильтрации газа в пористой среде при осесимметричном движении. Получено уравнение для поля давления при баротермическом эффекте. Приведены результаты расчетов величины баротермического эффекта при различных барических сжимаемостях. Полученные результаты могут быть использованы для решения различных задач нефтегазовой геологии.

Ключевые слова: фильтрация газа, баротермический эффект, пористая среда

1. Введение

Задачи о температурных процессах при фильтрации газа в пористой среде представляют огромный интерес как для расчетов оптимальных режимов отбора для предотвращения выпадения газогидратов, так и для интерпретации температурных кривых при исследовании газовых пластов. Решение такого рода задач представляет известные трудности в связи с нелинейностью системы, включающей как термодинамические, так и гидродинамические уравнения.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим движение газа в пористом пласте. Будем полагать, что рассматриваемое движение — осесимметричное и направлено от некоторого контура питания радиусом R_c к скважине, радиус которой r_w (Рис. 1).

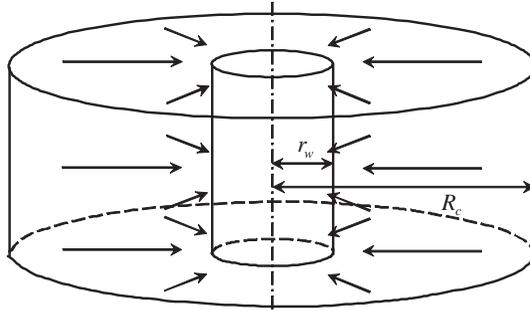


Рис. 1. Геометрия задачи

Температурное поле в этом случае описывается уравнением Чекалука в пренебрежении теплопроводностью [1–8]

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{c_p k}{c_n \mu} \frac{\partial P}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial r} \right) + c_p \rho \eta \frac{\partial P}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) приводит к необходимости решения дополнительной гидродинамической задачи для отыскания поля давления. Для описания движения газа воспользуемся квазистационарным уравнением неразрывности:

$$\operatorname{div}(\rho V) = 0. \quad (2)$$

Фильтрация газа сквозь пористую среду подчиняется закону Дарси:

$$V = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} P. \quad (3)$$

Полагая, что k и μ не меняются при движении газа к скважине, и что плотность газа зависит только от давления (баротропное приближение), перепишем уравнение неразрывности в следующем виде:

$$\operatorname{div}[\rho(P) \operatorname{grad} P] = 0. \quad (4)$$

Функцию Лейбензона представим в виде:

$$\Phi(P) = \int_A^P \rho(P') dP' + C, \quad (5)$$

где величины C и A задаются граничными условиями. Подставляя функцию Лейбензона в уравнение (4), получим:

$$\Delta \Phi = 0. \quad (6)$$

Учитывая, что для осесимметричного течения поле давлений является функцией координаты r , уравнение (6) можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0. \quad (7)$$

Решение этого уравнения представим в виде:

$$\Phi(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2, \quad (8)$$

здесь C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями: $P|_{r=R_c} = P_c$, $P|_{r=r_w} = P_w$, где P_c и P_w давление на контуре питания R_c и на границе скважины r_w соответственно. Тогда согласно (5) и (8) имеем

$$\int_A^{P_w} \rho(P') dP' + C = C_1 \ln r_w; \quad (9)$$

$$\int_A^{P_c} \rho(P') dP' + C = C_1 \ln R_c. \quad (10)$$

Решая систему уравнений (9)–(10) относительно C_1 и C , получим:

$$C_1 = \frac{1}{\ln(R_c/r_w)} \int_{P_w}^{P_c} \rho(\gamma) d\gamma; \quad (11)$$

$$C = \frac{\ln r_w}{\ln(R_c/r_w)} \int_{P_w}^{P_c} \rho(\gamma) d\gamma - \int_A^{P_w} \rho(\gamma) d\gamma. \quad (12)$$

Подставив выражения (11)–(12) в уравнение (8), будем иметь

$$\int_{P_w}^P \rho(P') dP' = \frac{\ln(r/r_w)}{\ln(R_c/r_w)} \int_{P_w}^{P_c} \rho(P') dP'. \quad (13)$$

Выражение (13) представляет неявную зависимость давления P от координаты r , если известна зависимость плотности от давления $\rho = \rho(P)$. Очевидно, что при рассмотрении баротермического эффекта в пластах газ нельзя рассматривать как идеальный, поскольку коэффициент Джоуля–Томсона для идеального газа равен нулю. Поэтому в дальнейшем плотность газа будем представлять в виде какого-либо уравнения для реального газа (например, уравнения Ван-дер-Ваальса).

Учитывая (13), выражение для градиента давления представится в виде:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{r\rho(P)\ln(R_c/r_w)} \int_{P_w}^{P_c} \rho(P') dP'. \quad (14)$$

С учетом (14) уравнение баротермического эффекта (1) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{c_p k}{c_n \mu r} \frac{1}{\ln(R_c/r_w)} \int_{P_w}^{P_c} \rho(\gamma) d\gamma \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{r\rho(P)\ln(R_c/r_w)} \int_{P_w}^{P_c} \rho(\gamma) d\gamma \right\} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Вводя обозначение

$$\xi = \frac{1}{\ln(R_c/r_w)} \int_{P_w}^{P_c} \rho(P') dP', \quad (16)$$

представим уравнение Чекалюка в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{c_p k \xi}{c_n \mu r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{c_p k \xi^2}{c_n \mu r^2} \frac{\varepsilon}{\rho(P)}. \quad (17)$$

Начальные и граничные условия для температуры имеют вид соответственно:

$$T|_{t=0} = 0; \quad (18)$$

$$T|_{r=R_c} = 0. \quad (19)$$

Решение уравнения (17) методом характеристик дает зависимость координаты r от времени t :

$$r^2 = -2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi t + C. \quad (20)$$

Характеристика, удовлетворяющая условию $r|_{t=0} = R_c$:

$$r^2 = R_c^2 - 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi t, \quad (21)$$

определяет область применимости нестационарного решения

$$r^2 \leq R_c^2 - 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi t. \quad (22)$$

Уравнение (17) с учетом (20) можно представить в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c_p k}{c_n \mu} \frac{\varepsilon \xi^2}{\left(C - 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi t \right) \cdot \rho \left[P \left(\sqrt{C - 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi t} \right) \right]}. \quad (23)$$

Проинтегрировав последнее выражение от 0 до t , получим:

$$T = \varepsilon \xi^2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \int_0^t \frac{d\tau}{\left(C - 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi \tau \right) \cdot \rho \left[P \left(\sqrt{C - 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi \tau} \right) \right]}. \quad (24)$$

где

$$C = r^2 + 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi t. \quad (25)$$

Исключив константу C из (23) и (24), окончательно получаем нестационарное решение:

$$T = \varepsilon \xi^2 \frac{c_p}{c_n} \times \frac{k}{\mu} \int_0^t \frac{d\tau}{\left(r^2 + 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi (t - \tau) \right) \cdot \rho \left[P \left(\sqrt{r^2 + 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi (t - \tau)} \right) \right]}. \quad (26)$$

Пределы применимости этого решения ограничены областью (22). Следовательно, рассматриваемое время t должно удовлетворять условию: $< \frac{c_p k}{c_n \mu} \frac{(R_c - r^2)}{2\xi}$. Для моментов времени $t > > \frac{c_p k}{c_n \mu} \frac{(R_c - r^2)}{2\xi}$ значения r^2 больше, чем $R^2 - 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi t$, что соответствует зоне, по которой волна температуры уже прошла и где распределение температуры уже установилось, то есть $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Для этой области

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{\varepsilon \xi}{r \rho [P(r)]}, \quad (27)$$

и стационарное решение, удовлетворяющее условию (19), имеет вид:

$$T(r) = \varepsilon \xi - \int_r^{P_c} \frac{dr'}{r' \rho [P(r')]}, t > \frac{c_p k}{c_n \mu} \frac{(R_c^2 - r^2)}{2\xi}. \quad (28)$$

Выражения (26) и (28) полностью решают поставленную задачу для любого уравнения состояния. Выпишем полученные решения для линеаризованного баротропного уравнения состояния

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha (P - P_0)]. \quad (29)$$

Вычислив интеграл, входящий в (3):

$$\int_{P_w}^P \rho(P') dP' = \frac{\rho_0}{2} [\alpha(P - P_0)^2 + 2(P - P_0) - \alpha(P_w - P_0)^2 - 2(P_w - P_0)]. \quad (30)$$

Представим зависимость между давлением и радиальной координатой r в виде:

$$\alpha(P - P_0)^2 + 2(P - P_0) = \alpha(P_w - P_0)^2 - 2(P_w - P_0) + \frac{\ln(r/r_w)}{\ln(R_c/r_w)} (P_c - P_w) [2 + \alpha(P_c + P_w - 2P_0)]. \quad (31)$$

Введем обозначение

$$2F = \alpha(P_w - P_0)^2 - 2(P_w - P_0) + \frac{\ln(r/r_w)}{\ln(R_c/r_w)} (P_c - P_w) [2 + \alpha(P_c + P_w - 2P_0)]. \quad (32)$$

Тогда уравнение (31) преобразуется к виду:

$$\alpha(P - P_0)^2 - 2(P_w - P_0) - 2F = 0. \quad (33)$$

Откуда найдем

$$\alpha(P - P_0) = -1 \pm \sqrt{1 + 2\alpha F}. \quad (34)$$

Физический смысл имеет только значение полученного выражения со знаком плюс перед квадратным корнем. Введем обозначения

$$G = \frac{\alpha}{2 \ln(R_c/r_w)} (P_c - P_w) [2 + \alpha(P_c + P_w - 2P_0)]; \quad (35)$$

$$H = 1 + \alpha \left\{ \alpha(P_w - P_0)^2 + 2(P_w - P_0) - \frac{\ln r_w}{\ln(R_c/r_w)} (P_c - P_w) [2 + \alpha(P_c + P_w - 2P_0)] \right\}, \quad (36)$$

которые позволяют представить подкоренное выражение в виде $1 + 2\alpha F = G \cdot \ln(r^2) + H$, и упростить запись выражения (34)

$$\alpha(P - P_0) = -1 + \sqrt{G \cdot \ln(r^2) + H}. \quad (37)$$

Подставив (37) в (29), получим зависимость плотности от радиальной координаты r :

$$\rho = \rho_0 \sqrt{G \cdot \ln(r^2) + H}. \quad (38)$$

В этом случае нестационарное решение для температуры (33) записывается в виде:

$$T = \frac{c_p k}{c_n \mu} \frac{\varepsilon \xi^2}{\rho_0} \int_0^t \frac{d\tau}{\left[r^2 + 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi(t-\tau) \right] \sqrt{G \cdot \ln \left[r^2 + 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi(t-\tau) \right] + H}}. \quad (39)$$

Интеграл в (39) легко вычисляется; окончательно нестационарное решение представляется в виде

$$T = \frac{\varepsilon \xi}{\rho_0 G} \sqrt{G \cdot \ln \left[r^2 + 2 \frac{c_p k}{c_n \mu} \xi t \right] + H} - \sqrt{G \cdot \ln(r^2) + H}; \quad (40)$$

$$t > \frac{c_n \mu}{c_p k} \frac{(R_c^2 - r^2)}{2\xi}.$$

Выражения для G и H представляются формулами (35) и (36), а для ξ представляется в виде, следующем из (16)

$$\xi = \frac{1}{\ln(R_c/r_w)} \int_{P_w}^{P_c} \rho(\gamma) d\gamma = \quad (41)$$

$$\frac{\rho_0}{2} \frac{1}{\ln(R_c/r_w)} (P_c - P_w) [2 + \alpha(P_c + P_w - 2P_0)].$$

В пределе при $\alpha \rightarrow 0$ из (40)–(41) следует известное решение для несжимаемой жидкости [9]:

$$T = \frac{\varepsilon}{2} \frac{P_c - P_w}{\ln(R_c/r_w)} \ln \left(1 + 2\rho_0 \frac{c_p k}{c_n \mu} \frac{P_c - P_w}{\ln(R_c/r_w)} \frac{t}{r^2} \right); \quad (42)$$

$$t < \frac{1}{2\rho_0} \frac{c_n \mu}{c_p k} \frac{R_c^2 - r^2}{P_c - P_w} \ln(R_c/r_w).$$

Аналогично в стационарном случае из (28) получим:

$$T = \frac{\varepsilon \xi}{\rho_0 G} \left(\sqrt{G \cdot \ln R_c^2 + H} - \sqrt{G \cdot \ln r^2 + H} \right); \quad (43)$$

$$t \geq \frac{1}{2\xi} \frac{c_n \mu}{c_p k} (R_c^2 - r^2).$$

В пределе при $\alpha \rightarrow 0$ из (43) и (41) следует известное решение для несжимаемой жидкости [9]:

$$T = \frac{\varepsilon(P_c - P_w)}{\ln(R_c/r)}; \quad t \geq \frac{1}{2\rho_0} \frac{c_n \mu}{c_p k} \frac{R_c^2 - r^2}{P_c - P_w} \ln(R_c/r_w). \quad (44)$$

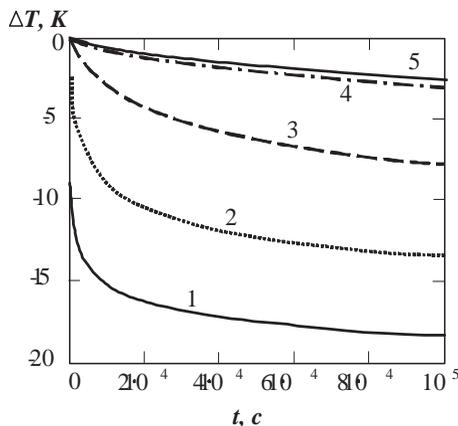


Рис. 2. Зависимость величины баротермического эффекта от времени при различных барических сжимаемостях. Обозначения: 1 — $\alpha = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Па}^{-1}$, 2 — 10^{-5} , 3 — 10^{-6} , 4 — 10^{-7} , 5 — $5 \cdot 10^{-8}$

3. Результаты расчетов

На Рис. 2 приведены результаты расчетов величины баротермического эффекта от времени при различных барических сжимаемостях. В расчетах принято: $R_c = 100 \text{ м}$, $r_w = 0.1 \text{ м}$, $P_c = 1.5 \cdot 10^7 \text{ Па}$, $P_w = 5 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $M = 0.016 \text{ кг/моль}$. Коэффициент Джоуля–Томсона рассчитывается из известных зависимостей на основе уравнений состояния реального газа. Из рисунка видно, что изменение температуры подчиняется следующим закономерностям. Линейное нарастание температуры при малых временах сменяется логарифмической стабилизацией при больших временах. Время, при котором происходит смена линейного нарастания на логарифмическую стабилизацию, зависит от барической сжимаемости; с увеличением сжимаемости это время уменьшается. Величина температурного эффекта также сильно зависит от сжимаемости. С увеличением сжимаемости величина температурного эффекта возрастает. Коэффициент барической сжимаемости приблизительно обратно пропорционален давлению. Реальные значения этого коэффициента в условиях газовых пластов лежат в пределах от $3 \cdot 10^{-8} \text{ Па}$ до 10^{-5} Па , поэтому величина эффекта лежит в пределах до $-10 \div -15 \text{ К}$. Это хорошо согласуется с величиной измеряемых в скважинных условиях температурных эффектов.

4. Заключение

Важно отметить, что согласно разработанной нами теории время установления температурного эффекта при $\alpha \sim 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$, что часто встречается на практике, составляет около суток. Этот факт чрезвычайно важен при практическом использовании баротермического эффекта. Полученные результаты могут быть использованы для решения различных задач нефтегазовой геологии: определения местоположения продуктивного пласта, газонефтяного контакта, места потери циркуляции в бурящейся скважине, определения зон гидроразрыва.

Список обозначений

a — постоянная уравнения состояния Ван-дер-Ваальса, $\text{м}^6/(\text{Па}\cdot\text{моль}^2)$; a_n — коэффициент температуропроводности пласта, $\text{м}^2/\text{с}$; b — постоянная уравнения состояния Ван-дер-Ваальса, $\text{м}^3/\text{моль}$; c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении, $\text{Дж}/(\text{К}\cdot\text{моль})$; c_n — объемная теплоемкость пласта, $\text{Дж}/(\text{К}\cdot\text{м}^3)$; k — проницаемость, м^2 ; m — пористость; $\text{кг}/(\text{м}^3\cdot\text{с})$; P — давление, Па ; P_c — пластовое давление, Па ; P_w — давление в скважине, Па ; r — расстояние до центра скважины, м ; r_w — радиус скважины, м ; r_s — радиус зоны насыщения, м ; R — универсальная газовая постоянная, $\text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$; M — молярная масса, $\text{кг}/\text{моль}$; R_c — радиус контура питания, м ; s — газонасыщенность; T — температура (разность температур), К ; ε — коэффициент Джоуля-Томсона, $\text{К}/\text{Па}$; μ — вязкость, $\text{Па}\cdot\text{с}$; η — адиабатический коэффициент, $\text{К}/\text{Па}$; \mathbf{V} — скорость фильтрации, $\text{м}/\text{с}$; ρ — плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$. Индексы: n — пласт; C — контур; ef — эффективный; w — скважина.

Список литературы

- [1] Чекалок Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра, 1965.
- [2] Лапук Б. Б. О термодинамических процессах при движении газа в пористых пластах // Нефтяное хозяйство. 1940. № 3. С. 15–20.
- [3] Филиппов А. И. Скважинная термометрия переходных процессов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989.
- [4] Филиппов А. И., Фридман А. А., Девяткин Е. М. Баротермический эффект при фильтрации газированной жидкости: Монография. Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 2000; Стерлитамакский филиал Академии наук Республики Башкортостан. 176 с.

-
- [5] Филиппов А. И., Девяткин Е. М. Баротермический эффект в газовом пласте // ТВТ. 2001. № 2. С. 274–282.
- [6] Филиппов А. И., Девяткин Е. М. Нестационарное температурное поле при фильтрации газожидкостных смесей // ТВТ. 2001. Т. 39, № 6. С. 962–969.
- [7] Филиппов А.И., Ефимова Г.Ф. Теория баротермического эффекта в жидкостях с учетом теплопроводности в одномерном случае // ТВТ. 1997. Т. 35, № 4. С. 560–563.
- [8] Филиппов А. И., Девяткин Е. М. Исследование баротермического эффекта в газах // Труды 2-й национ. конф. по теплообмену: В 8 т. М.: Изд-во МЭИ, 1998. Т. 7. С. 236–239.
- [9] Филиппов А. И. Скважинная термометрия переходных процессов. Дис. ... д-ра техн. наук. Уфа, 1990. 419 с.